Разни задаци

① Доказати да је за $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{[x]}dx=-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$x\in[1,2)$: $\displaystyle I_1=\int_1^2\frac{\sin(\pi x)}{1}dx$

$x\in[2,3)$: $\displaystyle I_2=\int_2^3\frac{\sin(\pi x)}{2}dx$

$\vdots$

$x\in[k,k+1)$: $\displaystyle I_k=\int_k^{k+1}\frac{\sin(\pi x)}{k}dx=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot(-\cos(\pi x))\Big|_k^{k+1}=\frac{\cos k\pi-\cos(k+1)\pi}{k\pi}=\frac{2(-1)^k}{k\pi}$

$k\in\{1,2,\dots,n\}$

$$\int_1^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{[x]}dx=I_1+I_2+\dots+I_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^k}{k\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

② Наћи дужину криве $\displaystyle y=\int_0^x\sqrt{\cos(2t)}\,dt$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$

$0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le t\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le 2t\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos(2t)\geq 0$

$\displaystyle L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=$, $\displaystyle y'=\left(\int_0^x\sqrt{\cos(2t)}\,dt\right)'=\sqrt{\cos(2x)}$

$$=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\left(\sqrt{\cos2x}\right)^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos2x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+2\cos^2x-1}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2\cos^2x}\,dx=\dots$$

③ Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^n e^{-x^2} dx$.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$$

Абел:

1° $\sum a_n$ конвергира : по Лајбницу $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$

2° $e^{-x^2} \geq 0 \Rightarrow \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx \geq \int_0^n e^{-x^2} dx \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n \Rightarrow b_n \uparrow$

Ограниченост b_n:

I) $$b_n = \int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II) $$b_n = \int_0^1 \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq 1} dx + \int_1^n \underbrace{e^{-x^2}}_{e^{-x}} dx \leq \int_0^1 1 dx + \int_1^n e^{-x} dx = 1 + (-e^{-x})\Big|_1^n =$$

$e^{-x^2} \leq e^{-x} \leq 1, \; x \geq 1$

$$= 1 - e^{-n} + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^n} \leq 1 + \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ по Абелу конвергира

Апсолутна конвергенција:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^n e^{-x^2} dx}$$

$$b_n = \int_0^n e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

јер $e^{-x^2} \geq 0$

јер $e^{-x^2} \geq e^{-x}, \; x \in [0,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^n e^{-x^2} dx \geq \frac{1 - e^{-1}}{\sqrt{n}}$$

$$\sum \frac{1 - e^{-1}}{\sqrt{n}} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n e^{-x^2} dx = +\infty$$

$\Rightarrow$ условно конвергира почетни

4) $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ непрекидна. Доказати $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists \xi(n)\in\mathbb{R})$ т.д.

$$\frac{1}{n}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx$$ и да је

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\xi(n)=\frac{1}{f(0)}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx$$

пошто је $f>0 \Rightarrow 0<\frac{1}{n}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^1 f(x)\,dx$

функција $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ је непрекидна и

$$F(0)=\int_0^0 f(x)\,dx=0 \quad \text{и} \quad F(1)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$F(0)=0<F(t)\le\int_0^1 f(x)\,dx=F(1) \Rightarrow \exists t=\xi(n) \text{ т.д. } F(\xi(n))=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx$$

$\xi(n)>0$ јасно и због $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx}_{=0}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\xi(n)=0.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\xi(n)}\cdot\int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx=?$$

Налазимо $$\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t f(x)\,dx \underset{\text{Лопитал}}{=} \lim_{t\to0+}\frac{\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)'}{(t)'}=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{1}=f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\xi(n)}\cdot\int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx=f(0).$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\xi(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi(n)\cdot n}{\int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx}\cdot\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(0)}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{f(0)}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx.$$

3. Нека је дат низ $\{I_n\}_{n\geq 0}$ са

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

а) [2] Доказати да је $I_0 = \frac{\pi}{2}$ и $I_1 = 1$.

б) [4] Доказати да је $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ за све $n \geq 2$.

в) [2] Доказати да је $I_{2n} \cdot I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\frac{\pi}{2}$ за све $n \geq 0$.

г) [4] Доказати да је низ $\{I_n\}_{n\geq 0}$ конвергентан и наћи му граничну вредност.

д) [3] Доказати да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

ђ) [2] Доказати неједнакост

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

е) [3] Доказати да је $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$, а затим помоћу тврђења под ђ) (или на неки други начин) доказати неједнакост

$$\sqrt{n} \cdot I_{2n+1} \leq \int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n} \cdot I_{2n-2}.$$

На крају, израчунати вредност интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. а) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^1 = \pi/2$.
$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_1^0 \frac{-dt/2}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}|_0^1 = 1$.

б) $I_n = \int_0^1 x^{n-1}d(-\sqrt{1-x^2}) = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2}|_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx = (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.
Одавде следи тражена једнакост.

в) Доказује се индукцијом. $n = 0$ следи из а), а индуктивни корак следи из б).

г) Из чињенице да је $x^{n+1} \leq x^n$ за $0 \leq x \leq 1$ следи $I_{n+1} \leq I_n$, па је низ опадајући. Низ је ограничен одоздо нулом, па је конвергентан. Ако са a означимо лимес овог низа, из в) следи да је $a^2 = 0$, тј. $a = 0$.

д) Како је I_n опадајућуи низ, следи $nI_{2n}I_{2n+1} \leq nI_{2n}^2 \leq nI_{2n-2}I_{2n-1}$. Применом в) добијамо $\frac{n}{2n+1}\frac{\pi}{2} \leq (\sqrt{n}I_{2n})^2 \leq \frac{n}{2n-1}\frac{\pi}{2}$, одакле кореновањем па преласком на лимес следи тврђење.

ђ) Из конвексности експоненцијалне функције следи неједнакост $e^x \geq 1 + x$ за све $x \in \mathbb{R}$. Сада имамо $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$, одакле степеновањем на n и интеграљењем следи прва неједнакост, а и имамо и $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, одакле степеновањем на $-n$ и интеграљењем следи друга неједнакост.

е) Увођењем смене $x = \cos t$ следи $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.
У неједнакостима из ђ уведемо смене $x = \sin t$, $x = t/\sqrt{n}$, $x = \tan t$ редом у интеграле и добијамо $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \int \cos^{2n-2} t dt$, што су управо тражене неједнакости.
Сада имамо $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n+1}I_{2n+2} \leq \sqrt{n}I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{n-1}I_{2n-2}$, одакле преласком на лимес на основу д) следи $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.