Риманова теорема

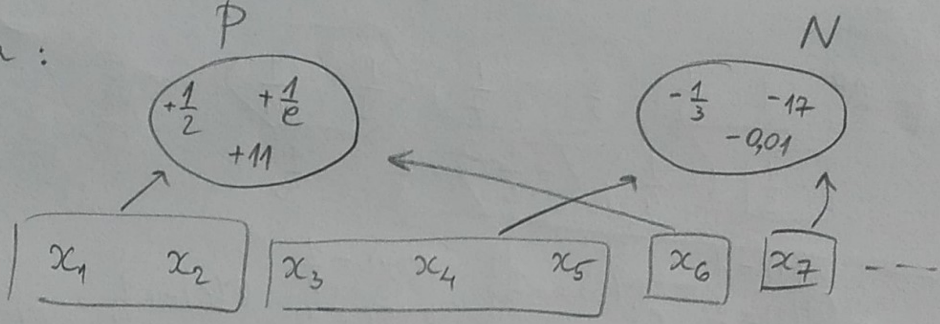
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

$\boxed{\text{T}}$ (Риман) Ред $\sum x_n$ условно (неапсолутно) конвергира. Тада $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists$ пермутација $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тд. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \lambda$.

скрипта: стр 207, Т17

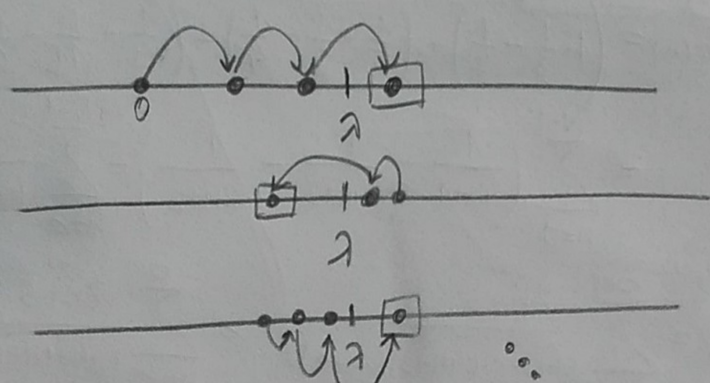
$$\left[\begin{array}{l} \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ бијекција} \\ 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; \ldots \longmapsto 17 \;\; 2 \;\; 18 \;\; 11 \;\; \ldots \end{array}\right]$$

идеја доказа:



• – вредности парцијалних сума

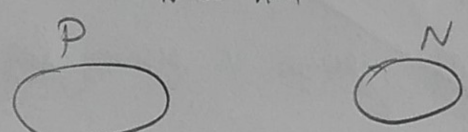
⊡ – кад пребацимо λ

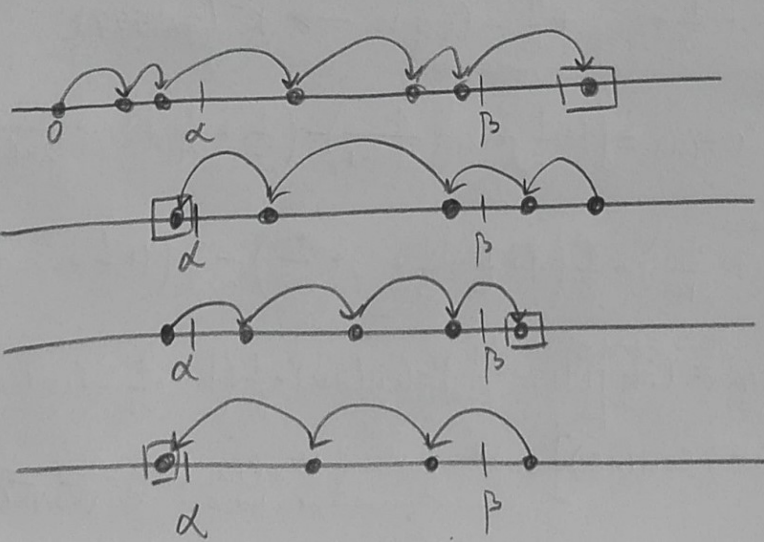


Важи јаче! Измењена Риманова теорема:

Ред $\sum x_n$ условно конвергира. Тада $\forall \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \le \beta$ $\exists\, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ пермутација тд. $\underline{\lim}_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} = \alpha$ и $\overline{\lim}_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} = \beta$.

идеја доказа:





Пример: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ знамо да условно конвергира.

По Римановој Т можемо да добијемо било шта!

Циљ да добијемо две различите вредности.

1° $\sigma = id$: $\sigma(n) = n$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad , x \in (-1,1]$$

$$x=1: \quad \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

2°

$$\boxed{1 \quad \tfrac{1}{3}} \quad \tfrac{1}{5} \quad \tfrac{1}{7} \quad \tfrac{1}{9} \quad \tfrac{1}{11} \quad \ldots$$

$$\boxed{-\tfrac{1}{2}} \quad -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{6} \quad -\tfrac{1}{8} \quad -\tfrac{1}{10} \quad \ldots$$

$\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 5$, $\sigma(5) = 7$, $\sigma(6) = 4$, $\sigma(7) = 9$, $\sigma(8) = 11$, $\sigma(9) = 6$

$$S_{3N} = \sum_{n=1}^{3N} x_{\sigma(n)} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{8n+5}{(4n+1)(4n+3)(2n+2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{8n+5}{(4n+1)(4n+3)(2n+2)}}}_{\geq 0} \geq \sum_{n=0}^{0} \frac{8n+5}{(4n+1)(4n+3)(2n+2)} = \frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

$$0{,}83 \approx \frac{5}{6} > \log 2 \approx 0{,}7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

(*) Општије, ако σ узима a позитивних, па b негативних (било $a=2, b=1$) добија се сума $\log\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

идеја: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n \longrightarrow \gamma \; (\approx 0.577)$

$$S_{(a+b)k} = \sum_{n=0}^{(a+b)k} x_{\sigma(n)} = \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2ka-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2kb}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2ka}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{ka}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{kb}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{k\to\infty} S_{(a+b)k} = \lim_{k\to\infty} \Big[\left(1 + \ldots + \frac{1}{2ka}\right) - \log(2ka) - \frac{1}{2}\left(1 + \ldots + \frac{1}{ka} - \log(ka)\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \ldots + \frac{1}{kb} - \log(kb)\right)$$

$$+ \log(2ka) - \frac{1}{2}\log(ka) - \frac{1}{2}\log(kb)\Big] = \underbrace{\gamma - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \lim_{k\to\infty} \log \frac{2ka}{\sqrt{ka}\sqrt{kb}} = \log\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$