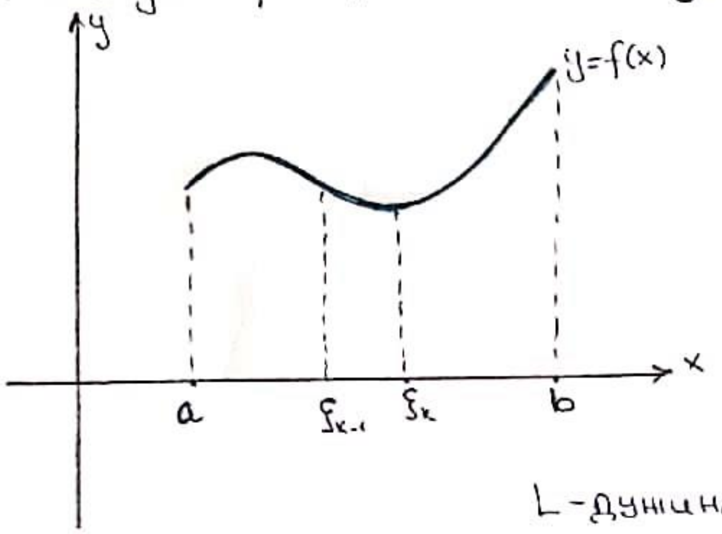
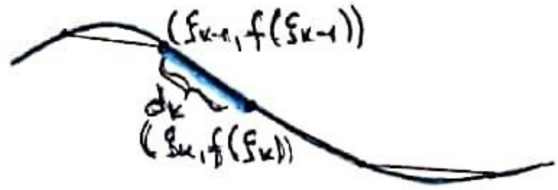
# ПРИМЕНА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

## Дужина лука криве

Нека je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ткд. je $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$




L - дужина лука графика функције f

$a=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_n=b$

$d_k=\sqrt{(\xi_k-\xi_{k-1})^2+(f(\xi_k)-f(\xi_{k-1}))^2}$ - растојање између 2 тачке $(\xi_k, f(\xi_k))$ и $(\xi_{k-1}, f(\xi_{k-1}))$

$$L=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}d_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi_{k-1})\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})}{\xi_k-\xi_{k-1}}\right)^2}_{f'(c_k),\ c_k\in(\xi_{k-1},\xi_k)\ \text{Лагранж}}}$$

$$L=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\sqrt{1+f'(c_k)}=\boxed{\int_a^b\sqrt{1+f'(x)}\,dx}$$

~ Крива задата параметарски

$$\left.\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\}\ \alpha\le t\le\beta,\quad \varphi,\psi\in C^1[a,b]$$

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt}$$

1. Задатак

Израчунај дужину лука криве $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, $1\le y\le e$

Решење:

Посматрамо ф-ју $x=g(y)$ за $1\le y\le e$

Дужину лука криве рачунамо по формули

$$L=\int_1^e\sqrt{1+g'(y)^2}\,dy$$

Тада, $L=\int_1^e\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{2}}\,dy=$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^e\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\int_1^e\frac{1}{2}y\,dy+\int_1^e\frac{1}{2y}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_1^e+\frac{1}{2}\cdot\ln y\Big|_1^e=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\underbrace{\ln e}_{1}-\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0}=$$

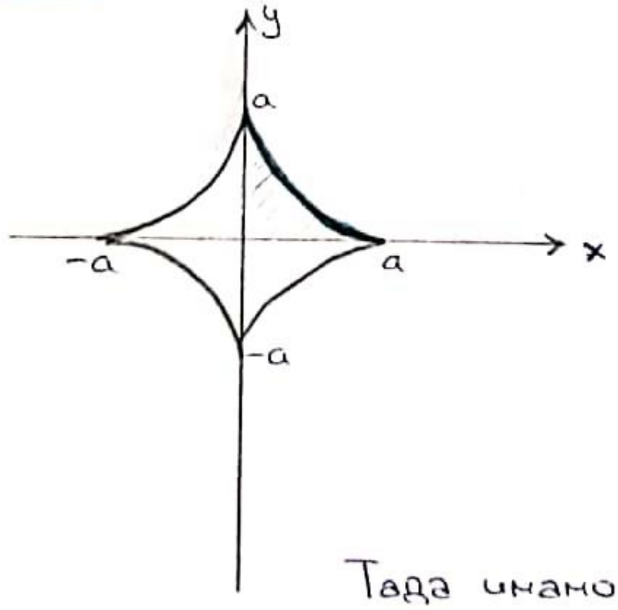
$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

2. Задатак

Астероида $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $a>0$

Израчунати дужину лука криве.

Решење:




Посматрајмо $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ \Big|:a^{\frac{2}{3}}$, $a>0$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

$$\Bigg(\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\cos t}\Bigg)^2+\Bigg(\underbrace{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\sin t}\Bigg)^2=1$$

Тада имамо $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}=\cos t$ и $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\sin t$

Посматрајмо само део обојен зеленом бојом. Дужина лука целе астероиде једнака је 4 пута дужина „обојена" зеленом. На том шрафираном делу $x\ge 0$ и $y\ge 0$. Имамо

$x = a\cos^3 t$ и $y = a\sin^3 t$ , $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Дакле, параметризовали смо криву. Имамо још

$x' = a \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$ и $y' = a \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$

Тада је формула за рачунање лука криве

$$L = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}_{\substack{\text{посматрано I квадрант} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \text{одатле}\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]}} dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} |3a| \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t \cdot \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}}\, dt =$$

пошто је $a > 0$
$|3a| = 3a$ и како је
$t \in [0, \pi/2]$, $\sin t, \cos t \geq 0$

$$= \int_0^{\pi/2} 3a \cdot \cos t \sin t\, dt = -3a \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \underbrace{d\cos t}_{-\sin t dt} = -3a \cdot \frac{1}{2}\cos^2 t \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -3a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 0\right) = \frac{3a}{2}$$

И на крају дужина лука целе криве је

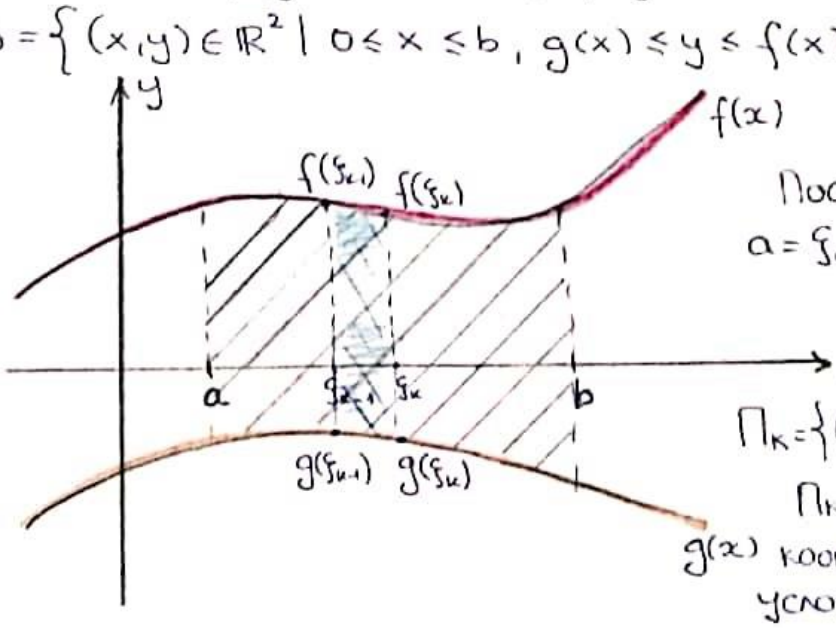
$$L = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a$$

$\boxtimes$

## ПОВРШИНА РАВНОГ ЛИКА

Нека су $f, g \in C[a,b]$ , $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$




Посматрајмо:

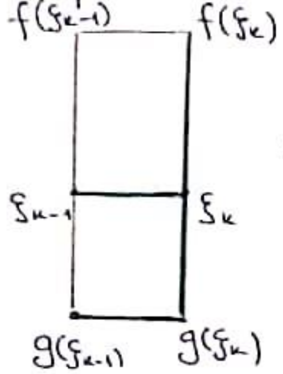
$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b$

$\xi_k - \xi_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

$\Pi_k = \{(x,y) \mid \xi_{k-1} \leq x \leq \xi_k,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$

$\Pi_k$ је скуп свих тачака којима координате задовољавају дати услов.

Посматрано "мали правоугаоник" обојен зеленом бојом.

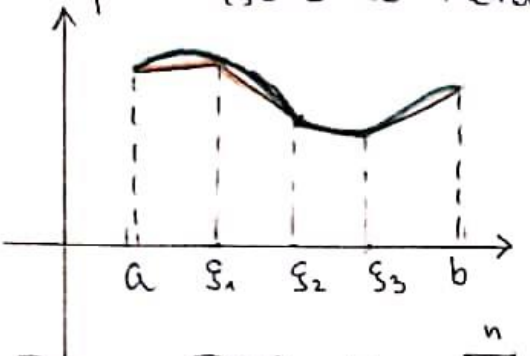


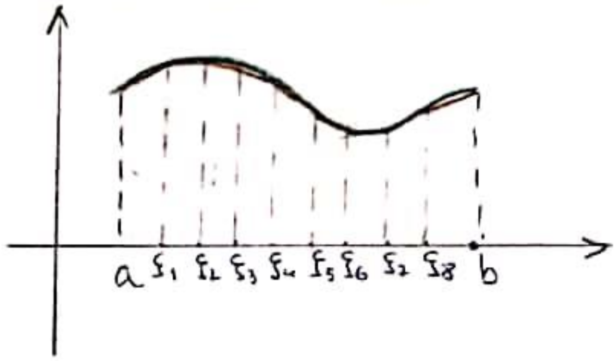

Површина малог правоугаоника је:

$$A(\Pi_k) = (\xi_k - \xi_{k-1})\cdot(f(\xi_k) - g(\xi_k))$$

Ако просумирано све овакве мале правоугаонике добићено површину шрафираног дела. Што више уситњавано поделу правоугаоници су све ужи и линија обојена плавом бојом која представља полином је све сличнија ф-ји.

Нпр. подела са мање чворова и са више (слика 1 и 2)




Дакле, $P(S) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} A(\Pi_k)$

$$P(S) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi_{k-1})(f(\xi_k) - g(\xi_k)) =$$

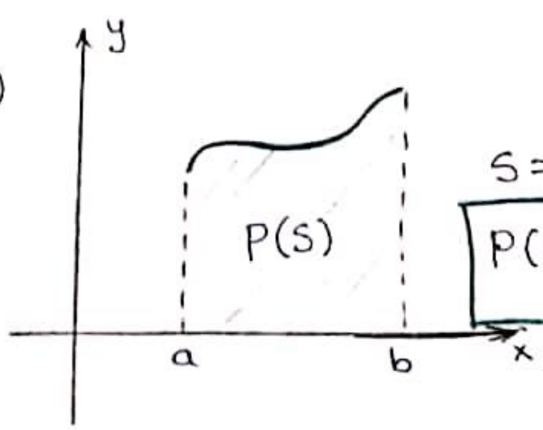
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}(f(\xi_k) - g(\xi_k)) = \boxed{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

Ф-ла површине равног лика између две ф-је $f(x)$ и $g(x)$

$$P(S) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Посматрајно сада 3 различита случаја површине равног лика:

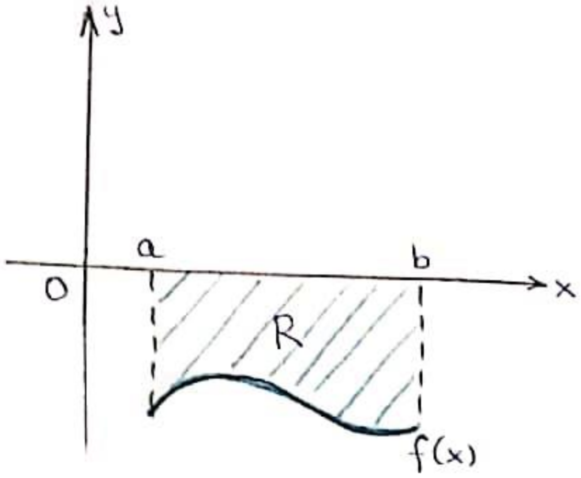
1)




$$S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$$

$$\boxed{P(S) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

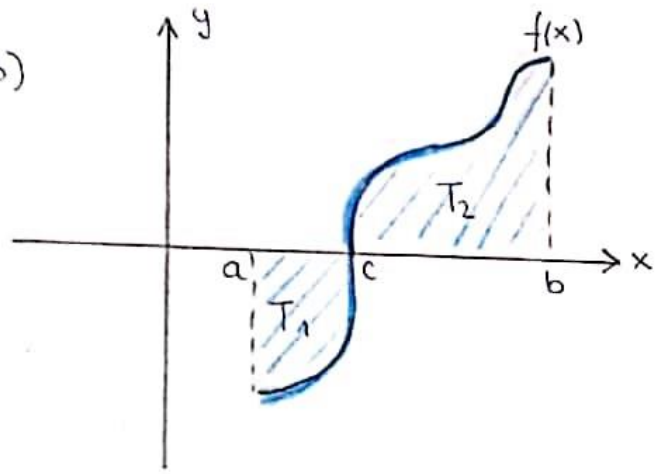
2)




$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$$

$$\boxed{P(R)=-\int_a^b f(x)\,dx}$$

3)



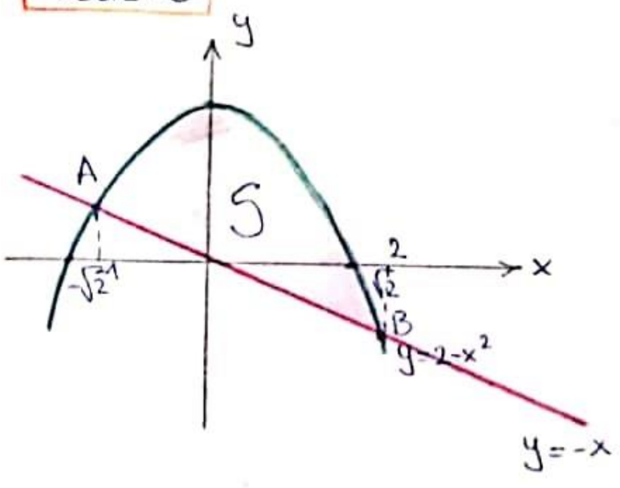

$$T=T_1\cup T_2$$

$$\boxed{P(T)=\int_a^c(-f(x))\,dx+\int_c^b f(x)\,dx}$$

## 3. Задатак

Наћи површину између параболе $y=2-x^2$ и праве $x+y=0$

**Решење:**




Нађимо тачке пресека ове две криве.

$$
\begin{aligned}
y&=2-x^2\\
x+y&=0\\
\hline
y+x^2-2&=0\\
x+y&=0\\
\hline
-x+x^2-2&=0\\
y&=-x\\
\hline
x_1=-1\ &,\ x_2=2
\end{aligned}
$$

$A(-1,1)$, $B(2,-2)$

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 2,\ -x\le y\le 2-x^2\}$$

$$P(S)=\int_{-1}^{2}(2-x^2-(-x))\,dx=\left(2x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

## 4. Задатак

Израчунај површину између $y=x^4-2x^2$ и $y=2x^2$

## Решење

Скицирајмо $f(x)=x^4-2x^2$. Уочимо следеће:

1. ф-ја је парна $f(x)=f(-x)$, $D_f=\mathbb{R}$

пошто је парна посматрамо за $x\geq 0$. ф-ја је за $x<0$ симетрична у односу на y-осу делу на $x\geq 0$.

2. Нуле ф-је $f(x)=0$

$$x^4-2x^2=0 \iff x^2(x^2-2)=0$$
$$x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=-\sqrt{2}$$

$f(\sqrt{2})=0$, $f(0)=0$, $f(-\sqrt{2})=0$

3. Монотоност: $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

| x | | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| f' | | − | + |
| f | | ↘ | ↗ |

Тачка минимума $T_{min}(1, f(1))$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

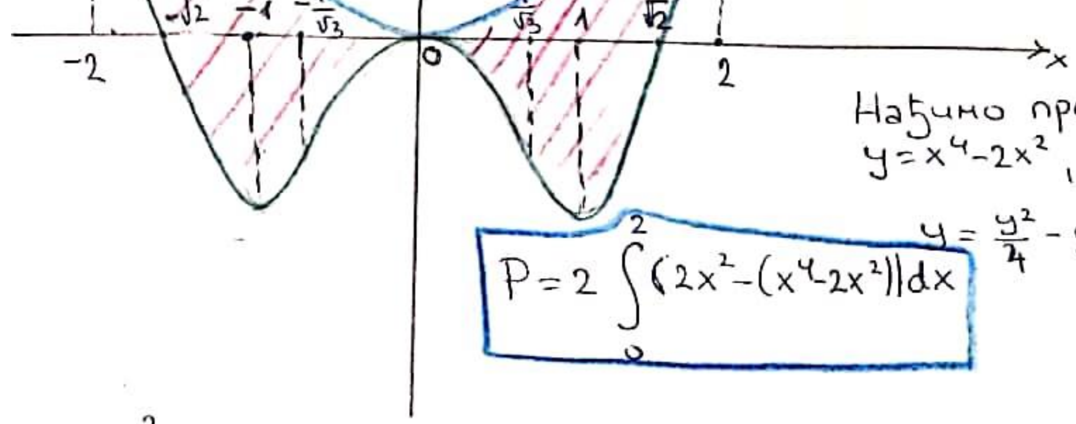
4. Конвексност и конкавност: $f''(x)=12x^2-4=4(3x^2-1)$

| x | | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
|---|---|---|---|
| f'' | | − | + |
| f | | ∩ | ∪ |

Тачка превоја $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{5}{9}$

<u>Напомена</u>:

Ово није прецизно испитивање графика ф-је $f(x)=x^4-2x^2$ већ смо посматрали само онолико колико је било „довољно" да скицирамо.




Површина између ове две ф-је за $x\geq 0$ је једнака површини између ове две ф-је за $x<0$.

Нађимо пресечне тачке ф-ја.

$y=x^4-2x^2$, $y=2x^2$

$x^2=\frac{y}{2}$

$y=\frac{y^2}{4}-y \Rightarrow \frac{y^2}{4}-2y=0$

$y^2-8y=0$

$y(y-8)=0$

$y=0$ и $y=8$

$x=0$ и $x=\pm 2$

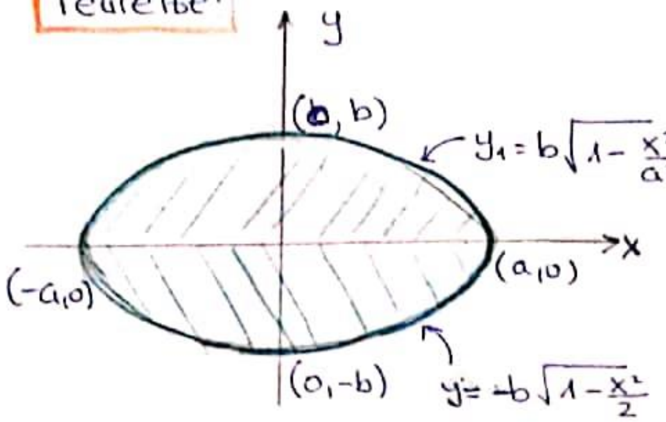
$$\boxed{P=2\int_0^2 (2x^2-(x^4-2x^2))\,dx}$$

$$P=2\int_0^2 (4x^2-x^4)\,dx=2\cdot\left(4\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2-\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2\right)=\frac{128}{15}$$

## 5 Задатак

Наћи површину скупа који је ограничен са $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

## Решење:




Ако имамо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ одатле

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2}{a^2}\cdot b^2$$

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$y_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, ако посматрано изнад x-осе

$y_2 = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, ако посматрано испод x-осе

$$P = \int_{-a}^{a}(y_1(x)-y_2(x))\,dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left[\text{подинтегрална ф-ја је парна, на симетричном интервалу интеграције}\right] =$$

$$= 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} x = a\sin t & t = \arcsin\frac{x}{a} \\ dx = a\cos t\,dt & \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2}\end{array} & \end{array}\right\} = 4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2 t}{\ldots}}\,a\cos t\,dt$$

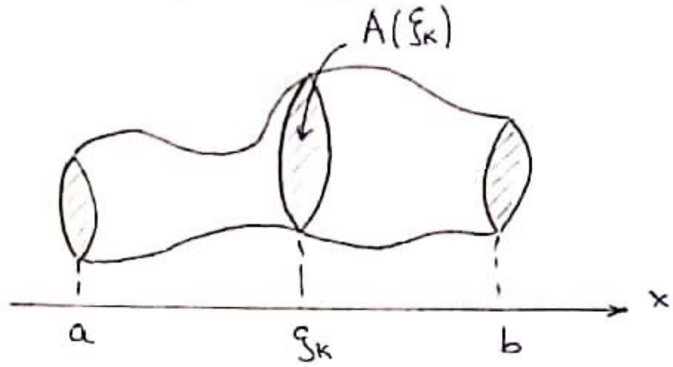
$$= 4ba\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos t|}_{\substack{\cos t > 0 \\ \text{за } t\in[0,\frac{\pi}{2}]}}\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

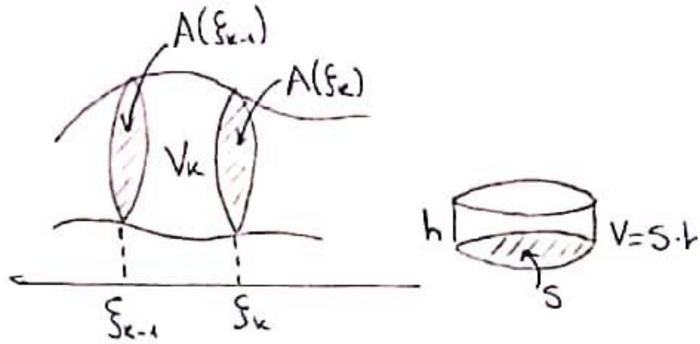
$$= 4ab\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,dt + \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos 2t\,dt\right) = 4ab\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\overset{0}{\cancel{\sin 2t}}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \underline{\mathbf{ab\pi}}$$

# ЗАПРЕМИНА И ПОВРШИНА ОБРТНОГ ТЕЛА

## Запремина тела:

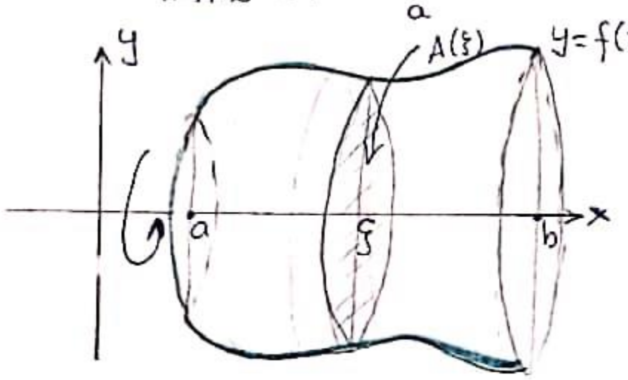
Нека имамо тело $K$ и нека је $V(K)$ запремина тог тела.




$$\min_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} A(\xi)\,\frac{b-a}{n} \le V_k \le \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} A(\xi)\,\frac{b-a}{n}$$

$V(K)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} V_k=\int_a^b A(\xi)\,d\xi$ – Кавалијеријев принцип




$f\in C[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, $x\in[a,b]$

$A(\xi)=\pi\cdot(f(\xi))^2$

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

**6. Задатак**

Израчунати запремину тела које се добије ротацијом око $x$-осе оног лука криве $y=2x-x^2$ који се налази изнад $x$-осе.

**Решење:**

Пошто тражимо лук криве изнад $x$-осе имамо услов $y\geqslant 0$,

тј. $2x-x^2\geqslant 0 \iff x(2-x)\geqslant 0 \implies x\in[0,2]$

$$V=\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2\,dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)\,dx=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{16}{15}\pi$$

7 Задатак

Израчунати запремину тела ограниченог са површи која се добија ротацијом криве $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ око x-осе

Решење

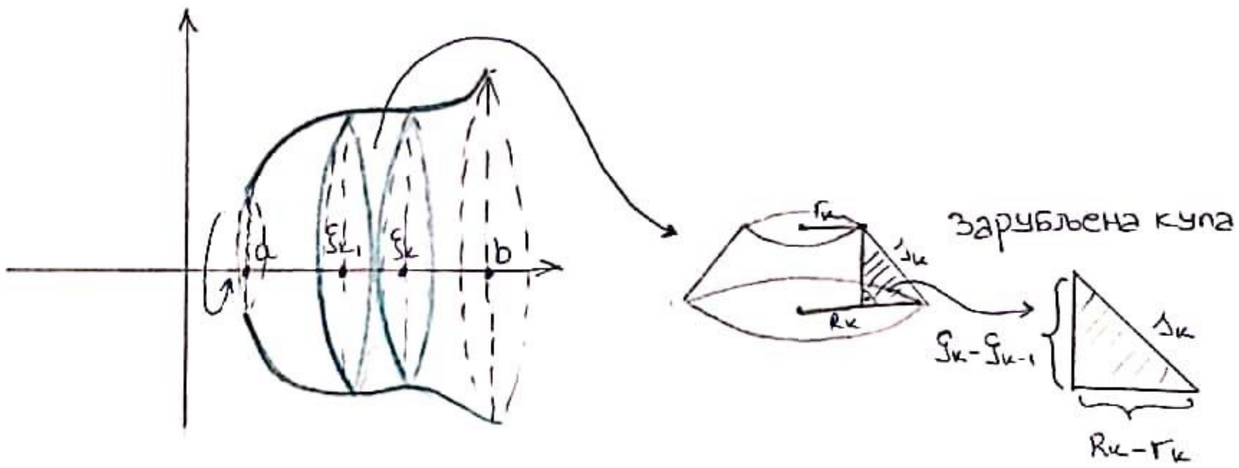
$$V=\pi\int_0^{2\pi} y^2(x)\,dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,d(a(t-\sin t))=$$

$$=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

$$=a^3\pi\left(2\pi-3\cancel{\sin t}\Big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-\int_0^{2\pi}\underbrace{(1-\sin^2 t)\cdot\cos t}_{\cos^2 t\cdot\cos t=\cos^3 t}\,dt\right)=$$

$$=a^3\pi\left(2\pi+\frac{3}{2}\cdot 2\pi+\frac{3}{4}\cancel{\sin 2t}\Big|_0^{2\pi}-\cancel{\sin t}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{3}\cancel{\sin^3 t}\Big|_0^{2\pi}\right)=5\pi^2a^3$$

Површина ротационог тела




$$P_k=\pi(R_k+r_k)s_k\ ,\ R_k=f(\xi_{k-1})\ ,\ r_k=f(\xi_k)\ ,\ s_k=$$

$$s_k=\sqrt{(\xi_k-\xi_{k-1})^2+(f(\xi_k)-f(\xi_{k-1}))^2}$$

$$P(S_n)=\sum_{k=1}^{n}P_k=\sum_{k=1}^{n}\pi\left(f(\xi_k)+f(\xi_{k-1})\right)(\xi_k-\xi_{k-1})\cdot\sqrt{1+\frac{(f(\xi_k)-f(\xi_{k-1}))^2}{(\xi_k-\xi_{k-1})^2}}\approx$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}\pi\cdot 2f(\xi_k)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\sqrt{1+f'^2(c_k)}\qquad\Big/\lim_{n\to+\infty}$$

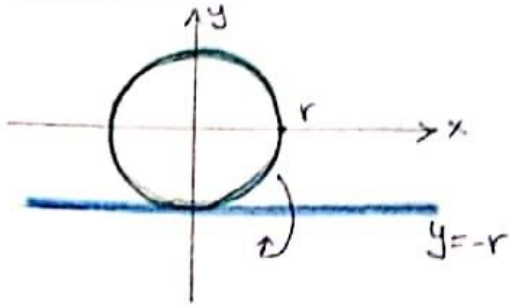
$$c_k\in(\xi_{k-1},\xi_k)$$

$$\boxed{P(S)=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

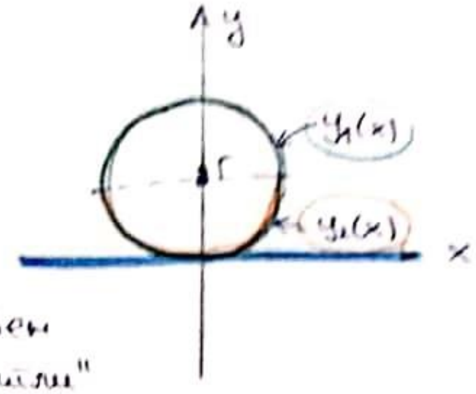
8. Задатак

Наћи површину тела које се добије ротацијом круга $x^2+y^2=r^2$ око праве $y=-r$.

Решење:




нови систем смо "подигли" за r на горе ↑




$P=P_1+P_2$

$P_i$ је површина тела која се добије ротацијом графика $y_i(x)$ око x-осе, $i=1,2$.

$$y_1(x)=r+\sqrt{r^2-x^2} \qquad y_2(x)=r-\sqrt{r^2-x^2}, \quad -r\le x\le r$$

$$y_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad y_2'(x)=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$P=2\pi\int_{-r}^{r} y_1(x)\sqrt{1+(y_1'(x))^2}\,dx+2\pi\int_{-r}^{r} y_2(x)\sqrt{1+(y_2'(x))^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}(y_1(x)+y_2(x))\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}2r\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=\left\{\begin{array}{l} x=r\sin t\\ dx=r\cos t\,dt\\ t=\arcsin\frac{x}{r}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & -r & r \\ \hline t & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\end{array}$$

$$=4\pi r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r\cos t}{\underbrace{|\cos t|}_{\cos t\ge 0 \text{ за } x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}\,dt=4\pi r^2$$