Основна теорема интегралног рачуна

$\boxed{\text{T}}$ • Ако је f интеграбилна на $[a,b]$, онда је

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{непрекидна на } [a,b]$$

• Ако је f непрекидна у тачки $x_0\in(a,b)$, онда је

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{диференцијабилна у } x_0 \text{ и важи } F'(x_0)=f(x_0).$$

Напомене: • уместо a смо могли да узмемо и неку другу тачку

• иако се интеграли по t, у граници је x, па зато F зависи само од x

Шта ако хоћемо да нађемо извод од $F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$, када немамо само x у горњој граници? Решење __није__ $F'(x)=e^{-x^2}$!

⊛ $h(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$ посматрамо, где $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ диференц.

$$h=F\circ\varphi,\ \text{тј. } h(x)=F(\varphi(x))=\int_0^{\varphi(x)} f(t)\,dt.$$

извод сложене ф-је: $h'(x)=F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\underset{F'=f}{=}f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

Онда је $$\left(\int_0^{\overbrace{x^2}^{\varphi}} \underbrace{e^{-t^2}}_{f}\,dt\right)' = e^{-(x^2)^2}\cdot 2x = e^{-x^4}\cdot 2x$$

⊛ Слично, за $u(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$ имамо:

$$u(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt-\int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow u'(x)=\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)'-\left(\int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)'=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)-f(\psi(x))\cdot\psi'(x)$$

пример: $$\left(x\mapsto\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)'=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2-\frac{\sin x}{x}\cdot 1=\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$$

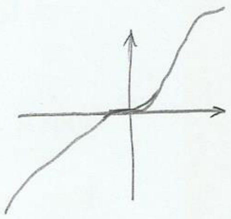
① Доказати да је $f(x)=e^{x^2}\cdot\int\limits_0^x e^{-t^2}dt - x$ строго растућа на $\mathbb{R}$

e^{-t^2} непр. на $\mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ дифер. на $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x^2}\cdot\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' + (e^{x^2})'\cdot\int_0^x e^{-t^2}dt - 1 = e^{x^2}\cdot e^{-x^2} + e^{x^2}\cdot 2x\cdot\int_0^x e^{-t^2}dt - 1 = 2xe^{x^2}\cdot\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$e^{-t^2}>0$, па је за $x>0$: $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt>0$

$$x<0:\ \int_0^x e^{-t^2}dt = -\underbrace{\int_x^0 e^{-t^2}dt}_{>0} < 0$$



$$x>0:\ f'(x) = \underbrace{2x}_{>0}\cdot\underbrace{e^{x^2}}_{>0}\cdot\underbrace{\int_0^x e^{-t^2}dt}_{>0} > 0$$

$$x=0:\ f'(0)=0$$

$$x<0:\ f'(x) = \underbrace{2x}_{<0}\cdot\underbrace{e^{x^2}}_{>0}\cdot\underbrace{\int_0^x e^{-t^2}dt}_{<0} > 0$$

$\Rightarrow f'(x)\geq 0$, али је само у нули $f'(0)=0$, а иначе $f'(x)>0$

$\Downarrow$

f строго расте на $\mathbb{R}$, јер та једна тачка не смета

② Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\right)^2}{x^2+1}=L.$

Пошто $x^2+1 \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, хоћемо Лопитала. Шта је лимес са изводима?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\right)^2\right]'}{(x^2+1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\cdot\left(\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\right)'}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\cdot(\operatorname{arctg}x)^2}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{x}$$

$(\operatorname{arctg}x)^2 \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

Још једном лимес са изводима $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\right)'\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\dfrac{(\operatorname{arctg}x)^2}{1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$

Сад се вратимо назад и по Лопиталу 2 пута је:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2dt\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$ и $L=\left(\frac{\pi}{2}\right)^4.$

③ Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција и $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

Доказати да $\exists c\in(a,b)$ тд. $f(c)=\int_a^c f(x)\,dx$.

Треба да докажемо постојање, а немамо превише алата који нам то дају.

- теорема о међувредности за непрекидне функције
- Ролова, Лагранжева, Кошијева теорема

Извод од $\int_a^c f(x)\,dx$ по c је баш $f(c)$.

Ако означимо $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, пошто је f непр $\Rightarrow$ F диференцијабилна

$$F'(x)=f(x) \text{ и } F'(c)=f(c) \text{ и треба доказати}$$

$$\exists c\in(a,b):\ F'(c)=F(c).$$

Посматрајмо $G(x)=F(x)\cdot e^{-x}$, $G:[a,b]\to\mathbb{R}$. Хоћемо Рола:

$$\left.\begin{aligned} G(a)&=F(a)\cdot e^{-a}=\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0}\cdot e^{-a}=0\\ G(b)&=F(b)\cdot e^{-b}=\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{=0,\ \text{из услова задатка}}\cdot e^{-a}=0 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \exists c\in(a,b),\ G'(c)=0$$

$$\begin{aligned} G'(x)=\left(F(x)\cdot e^{-x}\right)'=F'(x)\cdot e^{-x}\cdot F(x)\cdot\left(e^{-x}\right)'&=F'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}F(x)\\ &=e^{-x}\left(F'(x)-F(x)\right) \end{aligned}$$

$$0=G'(c)=e^{-c}\cdot\left(F'(c)-F(c)\right)\Rightarrow F'(c)=F(c),\ \text{тј.}$$

$$f(c)=\int_a^c f(x)\,dx$$

④ Наћи све непрекидне функције $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ т.д. $\forall x>0$:

$$2x\cdot\int_0^x f(t)\,dt = f(x). \quad (*)$$

f непр $\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt$ диф. $\Rightarrow$ пошто је лева страна диференцијабилна, онда је и десна. Нападнемо изводом $(*)$:

$$\boxed{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)}$$

$$2x\cdot\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' + (2x)'\cdot\int_0^x f(t)\,dt = f'(x)$$

$$\Rightarrow 2x\cdot f(x) + 2\int_0^x f(t)\,dt = f'(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}f'(x) - x f(x)$$ – убацимо ово у $(*)$

Идеја је да из $(*)$ елиминишемо интеграл.

$$2x\cdot\left(\frac{1}{2}f'(x) - xf(x)\right) = f(x) \Rightarrow xf'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \boxed{-\left(2x+\frac{1}{x}\right)} f(x) = 0 \quad (\#)$$

Идеја: уочити функцију $G(x) = f(x)\cdot e^{g(x)}$, тако да $G'(x)$ има сличности са $(\#)$. Тражимо $g(x)$.

$$G'(x) = f(x)\cdot\left(e^{g(x)}\right)' + f'(x)\cdot e^{g(x)} = f(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x) + f'(x)\cdot e^{g(x)} = e^{g(x)}\cdot\left(f'(x) + \boxed{g'(x)} f(x)\right)$$

Хоћемо $g'(x) = -\left(2x+\frac{1}{x}\right)$ и можемо да узмемо $g(x) = -x^2 - \ln x$ $(x>0)$.

$(\#)$ помножимо са $e^{-(x^2+\ln x)} = e^{g(x)} \Rightarrow e^{g(x)}\cdot\left(f'(x) - \left(2x+\frac{1}{x}\right)f(x)\right) = 0$

$\Rightarrow G'(x) = 0$. Пошто ово важи $\forall x>0$ (множење са $e^{g(x)}>0$ је у реду), а скуп $(0,+\infty)$ је интервал $\Rightarrow$ $G(x) = c > 0 \Rightarrow f(x) = ce^{-g(x)} = c\cdot e^{x^2+\ln x}$

Теореме о средњој вредности за интеграле

T1 (Прва теорема о средњој вредности)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, g интеграбилна, f непрекидна, $g\geq 0$ (или $g\leq 0$)

$\Rightarrow \exists \xi\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

Прочитати Т45 у професоркиним предавањима или Т2 из професорове скрипте

T2 (Друга теорема о средњој вредности)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f непрекидна, g је C^1 и монотона

$\Rightarrow \exists \xi\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\,dx$

Прочитати Т47 у професоркиним предавањима или Т5 из професорове скрипте

(1) Нека је f непрекидна на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx$.

Уводимо смену тако да унутар f имамо само променљиву: $nx=t$, $n\,dx=dt$

$$\int_0^1 f(nx)\,dx = \Big/ \begin{matrix} nx=t \\ n\,dx=dt \end{matrix} \Big/ \begin{matrix} x: 0\to 1 \\ t: 0\to n \end{matrix} \Big/ = \int_0^n f(t)\cdot\frac{1}{n}\,dt = \frac{\int_0^n f(t)\,dt}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n f(t)\,dt}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{n+1} f(t)\,dt - \int_0^n f(t)\,dt}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(t)\,dt \quad (*)$$

(ако десни lim постоји)

$\left.\begin{matrix} a_n = \int_0^n f(t)\,dt \\ b_n = n \end{matrix}\right\}$ Хоћемо Штолцову Т, $b_n \nearrow \infty$

Хоћемо на $\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ да применимо T_1: за функцију g можемо узети $g=1\geq 0$

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\cdot 1\,dt = f(\xi)\cdot\int_n^{n+1} 1\,dt = f(\xi)\cdot t\Big|_n^{n+1} = f(\xi)\cdot(n+1-n) = f(\xi) \quad (\#)$$

$\xi\in[n,n+1]$ је неки број (који зависи од n!) $\xi=\xi(n)$

По Хајнеу $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi(n)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ (☆)

јер $\xi(n)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

Следи, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx \overset{(*)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(t)\,dt \overset{(\#)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi(n)) \overset{(☆)}{=} A.$

② Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx$, за $p>0$.

I начин Примењујемо T_2: $f(x)=\sin x$

$g(x)=\frac{1}{x}$

f - непрекидна ✓

g - опада на $[n,n+p]$ и $g'=-\frac{1}{x^2}$ непрекидно (C^1) ✓

$$\overset{T_2}{\Rightarrow} \exists\, \xi(n)\in[n,n+p]: \int_n^{n+p} f(x)\cdot g(x)\,dx = g(n)\cdot\int_n^{\xi(n)}\sin x\,dx + g(n+p)\cdot\int_{\xi(n)}^{n+p}\sin x\,dx =$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(-\cos\xi(n)+\cos n\right)+\frac{1}{n+p}\cdot\left(-\cos(n+p)+\cos\xi(n)\right)$$

$\boxed{\text{важи јер } \int \sin x\,dx = -\cos x + C}$

$$\Rightarrow 0\le\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{\cos n-\cos\xi(n)}{n}+\frac{\cos\xi(n)-\cos(n+p)}{n+p}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\cos n-\cos\xi(n)}{n}\right|+\left|\frac{\cos\xi(n)-\cos(n+p)}{n+p}\right|\le\frac{|\cos n|+|\cos\xi(n)|}{n}+\frac{|\cos\xi(n)|+|\cos(n+p)|}{n+p}$$

$$\le\frac{1+1}{n}+\frac{1+1}{n+p}=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+p}\right)$$

$\boxed{\text{неједнакост троугла } |a+b|\le|a|+|b|}$

$\boxed{|\cos(\cdot)|\le 1}$

Пошто $\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+p}\right)=0 \underset{\text{Т о 2 полицајца}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx=0$

II начин

$$0\le\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|\le\int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\overset{|\sin x|\le 1}{\le}\int_n^{n+p}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_n^{n+p}=\ln\frac{n+p}{n}=\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$\boxed{\int|f(x)|\,dx\ge\left|\int f(x)\,dx\right|}$

$\boxed{\text{Ако } f\ge g \Rightarrow \int f(x)\,dx\ge\int g(x)\,dx}$

Опет, Т о 2 полицајца $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx=0.$

③ Нека је $h(x)=\int\limits_x^{2x} \frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt$. Нађи $\lim\limits_{x\to 0+} h(x)$.

↳ интегралимо по t, али цео израз зависи само од x, јер се појављује у границама

$x>0 \Rightarrow x<2x$

T_1 хоћемо: бирамо $f(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$, $g(t)=\frac{1}{t}$

$t\in[x,2x] \Rightarrow t>0 \Rightarrow f$ је непрекидна (не делимо нулом)

g је непрекидна (па и интеграбилна) и $g>0$

$$\Rightarrow \exists\, \xi(x)\in[x,2x] \text{ т.д. } h(x)=f(\xi(x))\cdot\int\limits_x^{2x} g(t)\,dt=\left(\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n\cdot\underbrace{\int\limits_x^{2x}\frac{dt}{t}}=\ln 2\cdot\left(\frac{\sin\xi(x)}{\sin\xi(x)}\right)^n$$

$\boxed{\xi \text{ зависи од } x, \text{ јер } \xi\in[x,2x]}$

$$\ln(t)\Big|_x^{2x}=\ln 2x-\ln x=\ln\frac{2x}{x}=\ln 2$$

$$\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\ln 2\cdot\left(\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n\right)=\ln 2\cdot\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n$$

Пошто $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ опада на $[0,\varepsilon]$, за неко $\varepsilon>0$ и $\xi(x)\xrightarrow[x\to 0+]{} 0+$

следи

$$\frac{\sin 2x}{2x}\le\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\le\frac{\sin x}{x} \quad \Big/\lim_{x\to 0}$$

$$\frac{\sin 2x}{2x}\xrightarrow{x\to 0+}1, \qquad \frac{\sin x}{x}\xrightarrow{x\to 0+}1$$

$$\Downarrow$$

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}=1$, по Т о 2 полицајца

Следи, $\lim\limits_{x\to 0+} h(x)=\ln 2\cdot(1)^n=\ln 2$.