1. Њутнов интеграл

Нека је $f : (a,b) \to \mathbf{C}$ непрекидна функција и $F : (a,b) \to \mathbf{C}$ њена примитивна функција:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{за све} \quad x \in (a,b).$$

Број

$$\lim_{x \to b-0} F(x) - \lim_{x \to a+0} F(x) \in \mathbf{C}$$

се назива *Њутновим*[3] *интегралом* функције f. Он је добро дефинисан, тј. независан од избора примитивне функције F, јер се две примитивне функције за исту функцију f на интервалу разликују за константу.

На први поглед, није јасно у каквој је вези Њутнов интеграл са методом ексхаустије о коме је било речи у уводу. Међутим, ту везу ћемо ускоро да видимо, у склопу дискусије о Кошијевом интегралу.

2. Кошијев интеграл

Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна и позитивна функција. Нека је интервал $[a,b]$ подељен на n интервала једнаких дужина $\frac{b-a}{n}$ и нека је $\xi_k = a + k\frac{b-a}{n}$ десна граница интервала $[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}]$. Величина

$$f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

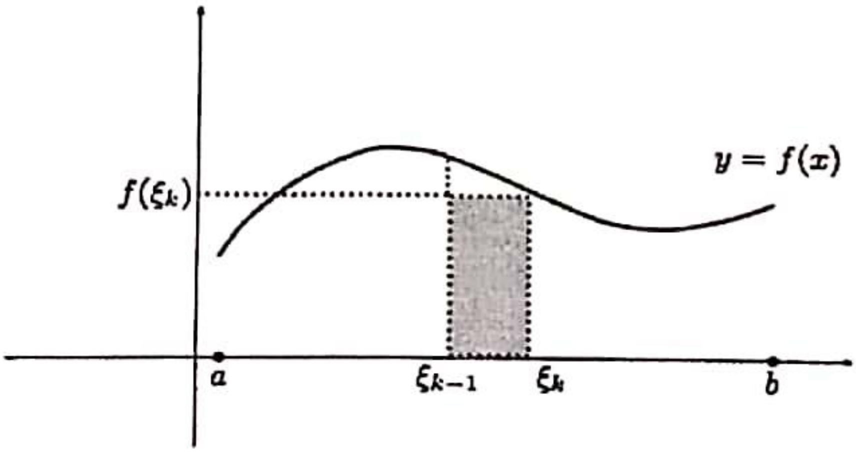
је површина правоугаоника са теменима

$$(\xi_{k-1}, 0),\ (\xi_k, 0),\ (\xi_k, f(\xi_k)),\ (\xi_{k-1}, f(\xi_k)),$$

па величина

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

апроксимира површину између графика функције $y = f(x)$ и x–осе.



Интуитивно је јасно да кад $n \to \infty$ та апроксимација постаје све боља, па је логично величину

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n},$$

[3]Њутн (Sir Isaac Newton, 1643–1727), енглески физичар, математичар, астроном, филозоф и алхемичар

Лема 2.

Нека је $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ непрекидна ф-ја. Тада је ф-ја $F:[a,b]\to\mathbb{C}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ непрекидна.

Особине одређеног интеграла:

1. Адитивност по интервалу интеграције
$c\in(a,b)$, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$, ф-ла важи без обзира како су распоређене тачке a,b,c на реалној оси.

2. Ако је ф-ја f дефинисана у тачки a,
$$\int_a^a f(x)dx=0$$

3. Ако је $a<b$ онда:
$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

4. Нека су $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ и $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ непрекидне ф-је и $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Тада важи:

4.1.) $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$

4.2.) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \mathrm{Re}f(x)dx+\int_a^b \mathrm{Im}f(x)dx$

4.3.) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

5. Ако су f и g реалне, онда важи импликација
$$(\forall x)\, f(x)\leq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

Лема 3.

Ако je $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ непрекидна ф-ја таква да je
$(\forall x\in[a,b]\ f(x)\geq 0)$ и $\int_a^b f(x)dx=0$
онда je $f(x)=0$ за све $x\in[a,b]$.

ОСНОВНА ТЕОРЕМА ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА

Нека je $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ непрекидна ф-ја и

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Тада je $F'(x)=f(x)$.

Теорема 1.

ЊУТН - ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

Нека je $\phi:[a,b]\to\mathbb{C}$ произвољна примитивна ф-ја непрекидне ф-je f. Тада je

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)}$$

Претходна ф-ла се записује и као

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(x)\Big|_a^b \quad \text{, где je}$$

$$\phi(x)\Big|_a^b=\phi(b)-\phi(a)$$

Пример 1

Израчунати по дефиницији $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $0<a<b$

▷ Прво уочимо да je $f(x)=\frac{1}{x^2}\in C[a,b]$

Нека je задата подела $P:\ a=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_{n-1}<\xi_n=b$ и нека су $c_k\in[\xi_k,\xi_{k+1}]$ истакнуте тачке.

Посматрајмо низ: $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)(\xi_{k+1}-\xi_k)$ # $\xi_{k+1}-\xi_k=\frac{b-a}{n}$

Изаберимо $c_k=\sqrt{\xi_k\cdot\xi_{k+1}}$, $k=0,\dots,n-1$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(\xi_{k+1}-\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_k\cdot\xi_{k+1}}(\xi_{k+1}-\xi_k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\xi_k}-\frac{1}{\xi_{k+1}}\right)=\frac{1}{\xi_0}-\cancel{\frac{1}{\xi_1}}+\cancel{\frac{1}{\xi_1}}-\cancel{\frac{1}{\xi_2}}+\dots+\cancel{\frac{1}{\xi_{n-1}}}-\frac{1}{\xi_n}=\frac{1}{\xi_0}-\frac{1}{\xi_n}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

Ради провере:

Њутн - Лајбницова ф-ла:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_a^b=-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$ ▨

Пример 2

Израчунај Њутн - Лајбницовом ф-лом

$$\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

▷ $$\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_a^b=\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a$$ ▨

Као последице Њутн - Лајбницове ф-ле:

Уз претпоставке Теореме 1 важе следеће ф-ле:

1. Смена променљивих:

Ако је $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ непрекидно-диференцијабилна ф-ја таква да је $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, тада је

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

2. Парцијална интеграција

Ако су u и v непрекидно диференцијабилне ф-је на интервалу $[a,b]$ онда важи

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

1. Задатак

Израчунај следећи интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$

Δ $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = x\,dx \\ du = d\operatorname{arctg} x & dv = d\frac{x^2}{2} \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$

$= \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} 0 \cdot \frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$

$= \left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} 0 \cdot \frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\sqrt{3}} 1\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx\right) =$

$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 0 - (\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 0)\right) =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ▨

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. Задатак

$\int_0^a x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a\sin t \in [0, a] \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$

$= \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t \cdot |a| \cdot \underbrace{|\cos t|}_{\geq 0 \text{ на } [0, \frac{\pi}{2}]} \cdot a\cos t\,dt =$

$= a^3 \cdot |a| \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t\,dt = a^3|a| \int_0^{\pi/2} (\sin t \cos t)^2 dt =$

$= a^3 \cdot |a| \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt = a^3|a| \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt =$

$= \frac{a^3 \cdot |a|}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2}dt = \frac{a^3|a|}{8}\left(\int_0^{\pi/2} 1\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos 4t\,dt\right) =$

$= \frac{a^3 \cdot |a|}{8}\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{a^3 \cdot |a|}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \left(\frac{1}{4}\underbrace{\sin 4\frac{\pi}{2}}_{0} - \frac{1}{4}\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right)$

$= \frac{a^3 \cdot |a|}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{a^3 \cdot |a| \cdot \pi}{16}$ ▨

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^3 \cdot |a| \cdot \pi}{16}$$

БИТНО:

~ Уколико je $f(x)$ парна ф-ја,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

~ Уколико je $f(x)$ непарна ф-ја:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

3. Задатак

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x + 2\sin x + \cos^3 x + 2\cos x + \sin x \cdot \ln(\cos^7 x + 7)}{(\cos^2 x + 2)\cdot(\cos^2 x + 3)}\,dx$$

▷

Запишимо интеграл на следећи начин:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x + 2\sin x + \sin x \cdot \ln(\cos^7 x + 7)}{(\cos^2 x + 2)\cdot(\cos^2 x + 3)}dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + 2\cos x}{(\cos^2 x + 2)\cdot(\cos^2 x + 3)}dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{\sin^3 x + 2\sin x + \sin x \cdot \ln(\cos^7 x + 7)}{(\cos^2 x + 2)\cdot(\cos^2 x + 3)} & g(x) = \dfrac{\cos^3 x + 2\cos x}{(\cos^2 x + 2)\cdot(\cos^2 x + 3)} \\ f(-x) = -f(x),\ f(x) \text{ непарна} & g(-x) = g(x),\ g(x) \text{ парна} \\ \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx = 0 & \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x)dx = 2\int_{0}^{\pi/2} g(x)dx \end{array} \right\}$$

$$I = 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + 2\cos x}{(\cos^2 x + 2)\cdot(\cos^2 x + 3)}dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,(\cancel{\cos^2 x + 2})}{(\cancel{\cos^2 x + 2})(\cos^2 x + 3)}dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos^2 x + 3}dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \sin x & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \\ dt = \cos x\,dx & \sin x \text{ je } \nearrow \text{ на } [0, \pi/2] \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x & \end{array} \right\} =$$

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{4 - t^2} = 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{(2-t)(2+t)} = -2\int_{0}^{1} \frac{dt}{(t-2)(t+2)} =$$

$$= -2\int_{0}^{1} \left(\frac{\frac{1}{4}}{t-2} - \frac{\frac{1}{4}}{t+2}\right)dt = -2\cdot\frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{1}{t-2}dt + 2\cdot\frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{1}{t+2}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t-2|\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln|t+2|\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3 \quad ◙$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln 3}$$

7. Задатак

$$\int_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$ израчунај дати интеграл

▷ Посматрајмо смену $t=x+\frac{1}{x}$, ф-ја $\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$ мора бити монотона на $[1/2, 2]$.

Проверимо:

$\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$

$\varphi'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

x	$1/2$		1		2
φ'		$-$		$+$	
φ		$\searrow$		$\nearrow$	

Дата ф-ја је опадајућа на интервалу $[\frac{1}{2},1]$, а растућа на $[1,2]$.

И онда почетни интеграл делимо на збир два:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

Како је $t=x+\frac{1}{x}$, тада

$xt=x^2+1 \;;\; x\neq 0$

$x^2-xt+1=0$

$x_{1,2}=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$

x	$\frac{1}{2}$	1	2
t	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

Уочимо, пошто посматрамо за $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ и $1\leq x\leq 2$ можемо уочити:

$\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\leq 1$

$\Longleftrightarrow\; t-\sqrt{t^2-4}\leq 2$

$\Rightarrow\; t-2\leq\sqrt{t^2-4}$

$\Rightarrow\; (t-2)^2\leq t^2-4$

$t^2-4t+4\leq t^2-4$

$8\leq 4t$

$t\geq 2$ W

$\Rightarrow$ Смена: $$\boxed{\begin{aligned} x&=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}, \quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1\\ x&=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}, \quad 1\leq x\leq 2\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $dx=\dfrac{1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}}{2}$, $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

$dx=\dfrac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}}{2}$, $1\leq x\leq 2$

$$I = \int_{1/2}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx =$$

$$= \int_{\frac{5}{2}}^{2}\left(1+\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{2}{t-\sqrt{t^2-4}}\right)e^{t}\cdot\frac{1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}}{2}\,dt +$$

$$+ \int_{2}^{5/2}\left(1+\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{2}{t+\sqrt{t^2-4}}\right)e^{t}\cdot\frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}}{2}\,dt =$$

$$= \int_{5/2}^{2}\left(1+\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{2}{t-\sqrt{t^2-4}}\right)e^{t}\cdot\frac{1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}}{2}\,dt \; -$$

$$- \int_{5/2}^{2}\left(1+\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{2}{t+\sqrt{t^2-4}}\right)e^{t}\cdot\frac{1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}}{2}\,dt =$$

$$= \int_{5/2}^{2}\frac{e^{t}}{2}\cdot\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\frac{(t+\sqrt{t^2-4})^2}{2\sqrt{t^2-4}}-\frac{2}{\sqrt{t^2-4}}-1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\frac{(\sqrt{t^2-4}+t)^2}{2\sqrt{t^2-4}}-\frac{2}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2}^{5/2}e^{t}\cdot\left(\frac{2t-4}{\sqrt{t^2-4}}+\frac{2t^2+2(t^2-4)}{2\sqrt{t^2-4}}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{2}^{5/2}e^{t}\left(\frac{2t^2+2t-8}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$= \int_{2}^{5/2}e^{t}\cdot\frac{t^2+t-4}{\sqrt{t^2-4}}\,dt = \underbrace{\int_{2}^{5/2}e^{t}\cdot\sqrt{t^2-4}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{2}^{5/2}\frac{e^{t}\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-4}}}_{I_2} = \star$$

$$I_1 = \int_{2}^{5/2}e^{t}\sqrt{t^2-4}\,dt = \left[\begin{array}{ll} u=\sqrt{t^2-4} & dv=e^{t}dt \\ du=\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}dt & dv=de^{t} \\ & v=e^{t}\end{array}\right] =$$

$$= e^{t}\cdot\sqrt{t^2-4}\Big|_{2}^{5/2} - \int_{2}^{5/2}e^{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}dt = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}} - \int_{2}^{5/2}\frac{e^{t}\cdot t}{\sqrt{t^2-4}}dt$$

$$\star = \underbrace{\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}} - \int_{2}^{5/2}\frac{e^{t}\cdot t}{\sqrt{t^2-4}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{2}^{5/2}\frac{e^{t}\cdot t}{\sqrt{t^2-4}}dt}_{I_2} = \boxed{\frac{3}{2}e^{5/2}}$$

■

5. Задатак

Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}$

$$\triangleright \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)} = \underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}}_{I_1} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)} = \star$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)} = \left\{\begin{array}{l} t=-x \\ dt=-dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 0 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}\end{array}\right\} = \int_{1}^{0}\frac{-dt}{(1+t^2)(1+e^{-t})} = -\int_{1}^{0}\frac{dt}{(1+t^2)(1+e^{-t})} =$$

$$= \int_{0}^{1}\frac{dt}{(1+t^2)(1+e^{-t})} = \int_{0}^{1}\frac{dt}{(1+t^2)e^{-t}(1+e^{t})} = \int_{0}^{1}\frac{e^t}{(1+t^2)(1+e^t)}dt = \left\{\begin{array}{l} t=x \\ dt=dx \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1 \\ \hline x & 0 & 1 \end{array}\end{array}\right.$$

$$\star = \int_{0}^{1}\frac{e^x}{(1+x^2)(1+e^x)}dx + \int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)} = \int_{0}^{1}\frac{1+e^x}{(1+x^2)(1+e^x)}dx =$$

$$= \int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare$$

Битно:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C(\mathbb{R})$ и периодична са периодом $T>0$

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

6. Задатак

Израчунај интеграл $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$\triangleright\ I = \int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \left\{\begin{array}{l} t=\pi-x \\ dt=-dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi \\ \hline t & \pi & 0 \end{array}\end{array}\right\} = -\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt = \int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \underbrace{\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt}_{I}$$

$$I = \int_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I$$

$$2I = \int_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi \\ \hline u & 1 & -1 \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \pi \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = -\pi \int_1^{-1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi \cdot \operatorname{arctg} u \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \pi \cdot (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)) = \pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$2I = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$$

7. Задатак

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1+\cos^4 x}\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1+\cos^4 x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1+\cos^4 x}\,dx}_{I_2} = \ast$$

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1+\cos^4 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \pi - x \\ dt = -dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & \pi/2 & \pi \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right\} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^3(\pi - t)\cos(\pi - t)}{1+\cos^4(\pi - t)}(-dt) =$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^3 t\,(-\cos t)}{1+\cos^4 t}\,dt = -\underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t \cos t}{1+\cos^4 t}\,dt}_{I_1}$$

$$I_2 = -I_1$$

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + (-I_1) = 0$$