НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ

У дефиницији одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ узимали смо да је област интегрисања коначна, а подинтегрална ф-ја $f(x)$ дефинисана и ограничена на коначном интервалу $[a,b]$. Уколико један од ових услова није испуњен, дефиниција одређеног интеграла губи смисао, јер интегралне суме неограничених ф-ја немају коначан лимес, а бесконачне интервале не можемо поделити на n коначних лимеса. Да бисмо обухватили овакве случајеве (код којих границе интеграције нису коначне или подинтегрална ф-ја није коначна), уводимо појам несвојственог интеграла.

Дефиниција 1.

Нека је ф-ја f дефинисана у интервалу $[a,b)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha,\beta]\subset[a,b)$. Ако постоји лимес

$$\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

он се назива несвојственим интегралом ф-је f на интервалу $[a,b)$ и означава са $\int_a^b f(x)dx$.

- $\int_a^b f(x)dx$ се назива се несвојственим интегралом са сингуларитетом у тачки b и уколико $\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)dx$ постоји и коначан је, кажемо да интеграл $\int_a^b f(x)dx$ конвергира, у супротном дивергира.

Слично, дефинишемо ако је сингуларитет у тачки a.

$f:(a,b] \to \mathbb{C}$ // $a \in \mathbb{R}, a = -\infty$ // $(\forall \alpha \in (a,b]\ f \in \mathcal{R}[\alpha, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(x)dx$$

Уколико су a и b сингуларитети тада:

$c \in (a,b)$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ решавамо као претходно

Особине:

- линеарност: $\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b g dx$, b сингуларна тачка

- парцијална интеграција:

$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$, где је $uv\Big|_a^b = \lim_{\to b^-} (u(x)v(x) - u(a)v(a))$

РАЧУНАЊЕ НЕСВОЈСТВЕНОГ ИНТЕГРАЛА

1. Задатак

Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Решење:

Овај интеграл је несвојствени интеграл, чији је интервал интеграције $[0, +\infty)$.

Тада $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^M =$

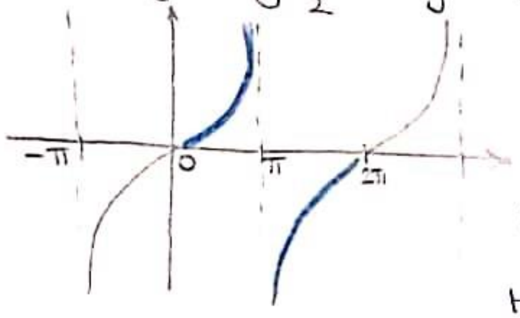
$= \lim_{M \to +\infty} (\operatorname{arctg} M - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0}) = \lim_{M \to \infty} \operatorname{arctg} M = \frac{\pi}{2}$

12. Задатак

Израчунати $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

Решење

Овде не можемо увести смену $t=tg\frac{x}{2}$, јер на интервалу $[0,2\pi]$ ф-ја $tg\frac{x}{2}$ није монотона.



Али можемо интервал интеграције поделити на два интервала на којима је ф-ја $tg\frac{x}{2}$ монотона, тј. на $[0,\pi]$ и $[\pi,2\pi]$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}}_{I_2}$$

$$I_1=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=\left[\begin{array}{ll} t=tg\frac{x}{2} & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi \\ \hline t & 0 & +\infty\end{array} \\ x=2\,arctg\,t & \\ dx=2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+t^2}{1+t^2}\cdot\frac{4+2t^2}{1+t^2}}=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{(3+t^2)\underbrace{(4+2t^2)}_{2(2+t^2)}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)}dt$$

Сада: $\frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)}=\frac{At+B}{3+t^2}+\frac{Ct+D}{2+t^2}$

$$1+t^2=(At+B)\cdot(2+t^2)+(Ct+D)\cdot(3+t^2)$$
$$1+t^2=2At+At^3+2B+Bt^2+3Ct+Ct^3+3D+Dt^2$$
$$1+t^2=(A+C)t^3+(B+D)t^2+(2A+3C)t+2B+3D$$

$A + C = 0 \Rightarrow A = -C \Rightarrow A = 0$

$B + D = 1 \Rightarrow B = 1 - D \Rightarrow B = 2$

$2A + 3C = 0 \Rightarrow -2C + 3C = 0 \Rightarrow C = 0$

$2B + 3D = 1 \Rightarrow 2(1-D) + 3D = 1$

$2 - 2D + 3D = 1$

$D = -1$

Тада је, $\frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)} = \frac{2}{3+t^2} + \frac{-1}{2+t^2}$

Дакле,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+t^2} =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} dt =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

! Када поделимо несвојствени интеграл на 2 несвојствена интеграла, узимамо исту променљиву

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^M - \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{M\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^M =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\lim_{M\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{M}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}0\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{M\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{M}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}0\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Посматрајмо сада $I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \left[\begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \begin{array}{c|c|c} x & \pi & 2\pi \\ \hline t & -\infty & 0 \end{array} \\ dx = 2\,\frac{1}{1+t^2}dt & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1+t^2}{(3+t^2)\cdot(2+t^2)} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3+t^2} dt - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2+t^2} dt =$$

$$= \text{(рачун као претходно)} = \lim_{M\to-\infty} \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_M^0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{M\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_M^0 =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \lim_{M\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{M}{\sqrt{3}}}_{\downarrow -\pi/2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{M\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \frac{M}{\sqrt{2}}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ГАМА Ф-ЈА

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

Уопштење: $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^{n-1} & dv = e^{-x} dx \\ du = (n-1)x^{n-2} dx & dv = d(-e^{-x}) \\ & v = -e^{-x} \end{array}\right] =$

$$= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(x^{n-1}\cdot(-e^{-x})\Big|_0^M - \int_0^M (-e^{-x})\,(n-1)x^{n-2} dx \right.$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (M^{n-1}\cdot(-e^{-M}) - 0) + \lim_{M\to+\infty} (n-1) \underbrace{\int_0^M x^{n-2} e^{-x} dx}_{\Gamma(n-1)} \Rightarrow$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = (n-1)!\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (\underbrace{-e^{-M}}_{\downarrow 0} + \underbrace{e^0}_{=1}) = 1$$

Дакле, $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

3. Задатак.

а) Доказати $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 0$

б) Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{\log x \sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$.

Доказати:

а) Посматрајмо интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ уочимо да су обе тачке $b=+\infty$ и $a=0$ сингуларне тачке.

Тада узмимо произвољну тачку $c \in (0,+\infty)$, тако да је ф-ја добро дефинисана у тој тачки. Можемо уочити да је ф-ја непрекидна на интервалу $(0,+\infty)$.

Нека је $c=1$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx}_{\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{x} \quad \frac{x \mid 1 \mid \infty}{t \mid 1 \mid 0} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right]} = \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx + \int_1^0 \frac{\log\frac{1}{t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}(1+\frac{1}{t})}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx + \int_0^1 \frac{-\log t}{t^{3/2}(\frac{1+t}{t})}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx - \int_0^1 \frac{\log t}{\sqrt{t}(1+t)}dt = \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx - \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 0$$

ова 2 интеграла су иста

б) $$\int_0^{+\infty} \frac{\log x \cdot \sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \left[\begin{array}{ll} u=\log x \cdot \sqrt{x} & dv=\frac{1}{(1+x)^2}dx \\ du=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx & dv=d\left(-\frac{1}{1+x}\right) \\ & v=-\frac{1}{1+x} \end{array}\right] =$$

сингуларна тачка $+\infty$ је прави сингуларитет, није 0, јер $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\log x\sqrt{x}}{(1+x)^2}$ је коначан! 0 је привидни сингуларитет

$$= \underbrace{-\frac{\sqrt{x}\log x}{1+x}\Big|_0^{+\infty}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx}_{I_1}$$

$$-\frac{\sqrt{x}\log x}{1+x}\Big|_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0+}} -\frac{\sqrt{x}\log x}{1+x}\Big|_\varepsilon^R}_{*} = \lim_{R\to+\infty} -\frac{\sqrt{R}\log R}{1+R} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon}{1+\varepsilon} =$$

Израчунајмо $\lim\limits_{R\to+\infty} -\frac{\sqrt{R}\log R}{1+R} = \lim\limits_{R\to+\infty} -\frac{\log R}{\frac{1+R}{\sqrt{R}}} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim\limits_{R\to+\infty} -\frac{\frac{1}{R}}{\frac{\sqrt{R}-(1+R)\cdot\frac{1}{2\sqrt{R}}}{R}}$

$\overset{\text{ЛП}}{=} \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{-\frac{1}{R}}{-\frac{1}{2R^{3/2}}+\frac{1}{2R^{1/2}}} = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{2\sqrt{R}}{R-1} = 0$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0+} \frac{\log\varepsilon\cdot\sqrt{\varepsilon}}{\underbrace{1+\varepsilon}_{\downarrow\, 1}} = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\varepsilon}}_{\downarrow\, 1} = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}} = 0$

Тада је $\lim\limits_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to0+}} -\frac{\sqrt{x}\log x}{1+x}\Big|_{\varepsilon}^{R} = 0$

Дакле, $\int_0^{+\infty} \frac{\log x\cdot\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx}_{0 \text{ из дела а)}} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} =$

$= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & +\infty \\ t & 0 & +\infty \end{array} \\ dx=2t\,dt \end{array}\right] =$

$= \int_0^{+\infty}\frac{2t\,dt}{t\,(1+t^2)} = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\lim\limits_{M\to+\infty}\int_0^{M}\frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\lim\limits_{M\to+\infty} \operatorname{arctg} t\Big|_0^M =$

$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$

БЕТА функција

$$\boxed{B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx\ ,\ m,n\in\mathbb{N}}$$

Уопштење:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\left[\begin{array}{ll} u=(1-x)^{n-1} & dv=x^{m-1}dx \\ du=(n-1)(1-x)^{n-2}(-dx) & dv=d\frac{1}{m}x^m \end{array}\right]$$
$$v=\frac{x^m}{m}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{m}\cdot x^m\cdot(1-x)^{n-1}\Big|_0^1}_{=0}+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$$

Дакле, $B(m,n)=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)=\frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}B(m+2,n-2)=\ldots=$

$$=\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{m\cdot(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n-3)(m+n-2)}B(m+n-1,1)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx=\frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{(m+n-1)}\cdot x^{m+n-1}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}\Rightarrow\boxed{B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}$$

4. Задатак

Показати да $I_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ не зависи од α

Решење:

$x=+\infty$ је сингуларитет, али и $x=0$ нам се може учинити да је сингуларитет, јер $x=0$ не припада домену подинтегралне ф-је. Међутим проверимо.

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=0\ ,\ \text{за}\ \alpha>0$$

$x=0$ је привидни сингуларитет

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^{|\alpha|}}{(1+x^2)(1+x^{|\alpha|})}=0\ ,\ \text{за}\ \alpha<0$$

Проверимо да ли је интеграл конвергентан.

Уочимо $1+x^\alpha>1$ за $x\geq 0$

$$0<\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\leq\frac{1}{1+x^2}$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ је конвергентан, јер

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{M\to+\infty}\int\limits_0^M\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{M\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^M=$$

$$=\lim_{M\to+\infty}(\operatorname{arctg}M-\overset{0}{\operatorname{arctg}0})=\frac{\pi}{2}$$

Како је $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx<+\infty$, тада према поредбеном критеријуму и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$ конвергира.

Дакле, за $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ постоји I_α:

$$I_\alpha=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\left[\begin{array}{ll} t=\frac{1}{x} & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & +\infty \\ \hline t & +\infty & 0\end{array} \\ x=\frac{1}{t} & \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt & \end{array}\right]=\int\limits_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

$$2I_\alpha=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_\alpha=\frac{\pi}{4}\quad\boxtimes$$

5. Задатак

Израчунај $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}\,dx$

Решење:

Проверимо $x=0$ (јер ф-ја није дефинисана у тој тачки).

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x^2(1+x^2)}=0$$

$\Rightarrow$ $x=0$ је привидни сингуларитет

Значи да ми можемо додефинисати ф-ју $\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}$ тако да буде непрекидна на $[0,1]$.

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Закључујемо да интеграл конвергира.

$$I=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}dx=\lim_{a\to0^+}\left(\int_a^1\frac{x}{x^2(1+x^2)}dx-\int_a^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}dx\right)$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left(\int_a^1\frac{1}{x(1+x^2)}dx-\int_a^1\frac{\operatorname{arctg}x(1+x^2-x^2)}{x^2(1+x^2)}dx\right)=$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left(\int_a^1\frac{1}{x(1+x^2)}dx-\int_a^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx+\int_a^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{ll}\text{~~Смо~~ Парцијална за } * & \\ u=\operatorname{arctg}x & dv=\frac{1}{x^2}dx\\ du=\frac{1}{1+x^2}dx & dv=d\left(-\frac{1}{x}\right)\\ & v=-\frac{1}{x}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left(\cancel{\int_a^1\frac{1}{x(1+x^2)}dx}-\operatorname{arctg}x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^1-\cancel{\int_a^1\frac{1}{x(1+x^2)}dx}+\int_a^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx\right)$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\Big|_a^1+\int_a^1\operatorname{arctg}x\,d\operatorname{arctg}x\right)=$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}a+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x\Big|_a^1\right)=\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\lim_{a\to0^+}\operatorname{arctg}^2a$$

$$=\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}-1$$

6. Задатак

Израчунај $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+a^2x^2)}$

Решење:

Уочимо да је за $x=0$ ф-ја дефинисана, али за $x=1$ није.

Испитајмо $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+a^2x^2)}}_{f(x)}$, видимо да је $\displaystyle\lim_{x\to 1-} f(x)=\infty$

Дакле, $x=1$ је сингуларитет, па пре рачунања, морамо испитати да ли интеграл конвергира:

Уочимо: $\displaystyle f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}\cdot(1+a^2)}, \; x\to 1-$, $\quad$ * $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x} \sim \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2}, \; x\to 1-$

Испитајмо конвергенцију $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot(1+a^2)}dx = \frac{1}{\sqrt{2}(1+a^2)}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx}_{I}$

тј. испитујемо конвергенцију интеграла I.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \left[\begin{array}{l} 1-x=t \\ x=1-t \\ dx=-dt \end{array} \;\; \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{-dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}} < +\infty$$

Како интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ конвергира, тада конвергира по поредбеном критеријуму и почетни интеграл. Сада можемо прећи на рачунање.

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+a^2x^2)} = \left[\begin{array}{l} x=\sin t \in [0,1) \\ t=\arcsin x \in [0,\frac{\pi}{2}) \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array} \end{array}\right] = \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{\cos} t\,dt}{\cancel{\cos} t(1+a^2\sin^2 t)} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+a^2\sin^2 t)} = \left[\begin{array}{l} u=\operatorname{tg} t \\ t=\operatorname{arctg} u \\ dt=\frac{1}{1+u^2}du \end{array} \;\; \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/2 \\ \hline u & 0 & +\infty \end{array} \;\; \sin t=\frac{u^2}{1+u^2}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+a^2\frac{u^2}{1+u^2}} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(a^2+1)u^2} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{du}{1+(a^2+1)u^2} = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{a^2+1}\operatorname{arctg}(u\sqrt{a^2+1})\Big|_0^M =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}$$

7. Задатак

Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

Решење

Видимо да подинтегрална ф-ја није дефинисана ни у $x=0$, ни у $x=+\infty$.

$x=+\infty$ је прави сингуларитет

Проверимо за $x=0$. $\lim_{x\to 0+} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x=0$ је привидни сингуларитет.

Тада поделимо интеграл на два интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx}_{I_2}$$

I_1:

Како је ф-ја $\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$ дефинисана у $x=1$, а $x=0$ је привидни сингуларитет, тада можемо додефинисати подинтегралну ф-ју тако да буде непрекидна на $[0,1]$ при чему закључујемо да интеграл I_1 конвергира.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \in C[0,1]$$

I_2:

Проверимо конвергенцију I_2: (овде је сингуларитет $x=+\infty$)

$$0 < \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} \leq \frac{x(x-1)}{(1+x^2)^2}, \quad x \geq 1$$

Тада $\frac{x(x-1)}{(1+x^2)^2} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}, \quad x\to+\infty$

Како $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx < +\infty$ (тј. конвергира) $\overset{\text{ПК}}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{x(x-1)}{(1+x^2)^2}dx < +\infty$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx < +\infty$$

Пошто смо утврдили да је интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ конвергентан, можемо прећи на рачунски део:

$$I=\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \left[\begin{array}{ll} t=\frac{1}{x} & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & +\infty \\ t & +\infty & 0 \end{array} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt & \end{array}\right] = \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = -I$$

Дакле, $I = -I \Rightarrow I = 0$ ☒

8 Задатак

Израчунати $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x}$, $\alpha>0$

Решење:

Ф-ја је дефинисана за $x=1$ и за $x\geq 1$, сингуларитет је $x=+\infty$

Како је $\displaystyle\frac{1}{x^{\alpha+1}+2x} = \frac{1}{x^{\alpha+1}\left(1+\frac{2}{x^{\alpha}}\right)} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$, $\alpha>0$, $x\to+\infty$

Пошто је $\alpha>0$, тада $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx < +\infty \overset{ПК}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x} < +\infty$

Наш почетни интеграл конвергира и можемо га израчунати:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x} = \left[\begin{array}{ll} t = x^{\alpha}, \alpha>0 & \begin{array}{c|c|c} x & 1 & +\infty \\ t & 1 & +\infty \end{array} \\ x = t^{1/\alpha} & \\ dx = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt & \end{array}\right] = \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dt}{t\cdot t^{\frac{1}{\alpha}} + 2 t^{\frac{1}{\alpha}}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{\alpha}\lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} \frac{dt}{(t+2)\,t} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{M\to+\infty}\left(\int_1^M \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt\right) = \frac{1}{2\alpha}\lim_{M\to+\infty}\left(\int_1^M \frac{1}{t}dt - \int_1^M \frac{1}{t+2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\lim_{M\to+\infty}\left(\ln t\Big|_1^M - \ln(t+2)\Big|_1^M\right) = \frac{1}{2\alpha}\lim_{M\to+\infty}(\ln M - \ln M+2 + \ln 3) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(\lim_{M\to+\infty} \ln \frac{M}{\underbrace{M+2}_{\to 1}} + \ln 3\right) = \frac{\ln 3}{2\alpha}$$ ☒