16. Израчунати:

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx .$$

Решење:

Увођењем смене $x = \operatorname{tg} t$ (оправдати увођење ове смене!) добијамо:

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{\sin t\cos t}\right)dt .$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sin t\cos t}\right) = \ln 1 - \ln(\sin t\cos t)$$

Као и увек, на линеарност несвојственог интеграла можемо се позвати само ако знамо да интеграли који настају „раздвајањем" конвергирају.

То јест, ако су $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, где је b сингуларитет ($b = +\infty$ или су f и g неограничене у свакој околини тачке b за $b \in \mathbb{R}$) онда уколико интеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g(x)\,dx$$ конвергирају, знамо да за произвољне реалне константе C_1 и C_2 конвергира и интеграл

$$\int_a^b \left(C_1 f(x) + C_2 g(x)\right)dx$$ и важи:

$$\int_a^b \left(C_1 f(x) + C_2 g(x)\right)dx = C_1 \int_a^b f(x)\,dx + C_2 \int_a^b g(x)\,dx .$$

Важи $\ln\left(\frac{1}{\sin t\cos t}\right) = \cancel{\ln 1}^{0} - \ln(\sin t\cos t) = -\ln(\sin t\cos t)$

и $\ln(\sin t\cos t) = \ln(\sin t) + \ln(\cos t)$

Како интеграли $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,dt$ конвергирају,

то конвергира и интеграл

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)dt$ и важи $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) =$$

$$= -\pi \ln 2$$

Дакле $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{\sin t\cos t}\right)dt = -\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)\,dt}_{-\pi\ln 2} = \pi\ln 2$

па је $I = \pi \ln 2$.

17. Испитати конвергенцију несвојственог интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

<u>Решење</u>:

Увођењем смене $x = \sqrt{t}$ (оправдати увођење смене!)

добијамо:

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Стога, на основу задатка 10, интеграл конвергира.

(18.) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty} e^{\sin x} \frac{\sin(2x)}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0.$$

Решење:

Ако ставимо $f(x) = e^{\sin x} \sin(2x)$, $x \in [1, +\infty)$ и

$g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty)$, имамо

да је $g = g(x)$ монотона функција и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; а за

функцију $F(b) = \int_1^b e^{\sin x} \sin(2x) dx = \left[2e^{\sin x}(\sin x - 1)\right]\Big|_1^b$,

$b \in (1, +\infty)$

важи $|F(b)| \leq 8e$ за $b \in (1, +\infty)$.

Стога интеграл конвергира на основу Дирихлеовог теста.

(19.) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty} \ln^\alpha x \, \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha > 0.$$

Решење:

Нека је $f(x) = \sin x$, $\cancel{}$ $x \in [1, +\infty)$ и $g(x) = \frac{\ln^\alpha x}{x}$, $x \in [1, +\infty)$.

$$(\forall b \in (1, +\infty)) \quad \left|\int_1^b f(x) dx\right| = \left|\int_1^b \sin x \, dx\right| = \left|(-\cos x)\Big|_1^b\right| \leq 2$$

$$g'(x) = \frac{\ln^{\alpha-1} x}{x^2}(\alpha - \ln x), \quad x \in [1,+\infty)$$

па је $g'(x) < 0$ за довољно велико x.

Стога је $g = g(x)$ опадајућа функција и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

па на основу Дирихлеовог теста дати интеграл конвергира.

20. Доказати да из конвергенције интеграла

$$\int_a^{+\infty} x f(x)\,dx, \quad a > 0$$ следи конвергенција интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

<u>Решење</u>:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} x f(x) \frac{1}{x}\,dx.$$

Нека је $\tilde{f}(x) = x f(x)$, $x \in [a,+\infty)$ и $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a,+\infty)$.

$g = g(x)$ је монотона и ограничена, а интеграл

$$\int_a^{+\infty} \tilde{f}(x)\,dx = \int_a^{+\infty} x f(x)\,dx$$ конвергира по услову задатка,

па $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \underbrace{x f(x)}_{\tilde{f}(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}\,dx$$ конвергира на основу

Абеловог теста.

(21.) Доказати да несвојствени интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира ако и само ако за сваки растући низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n>a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \cancel{+}\infty$ важи да ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx \quad \text{где је } a_0 \overset{\text{деф}}{=} a,$$

конвергира.

Решење

Претпоставимо да интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира и нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n>a$, растући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \cancel{+}\infty$.

Тада је

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^{a_n} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx, \quad \text{где је } a_0 = a.$$

Са друге стране, ако ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$ конвергира за сваки растући низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да $a_n>a$ за $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (претпостављамо да је $a_0=a$), онда $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(x)dx$ постоји и важи једнакост

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx.$$

(22.) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a \sin^2 x}, \quad a>0.$$

Решење

На основу претходног задатка, дати интеграл конвергира ако и само ако конвергира ред ~~интеграл~~

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^a \sin^2 x}\,dx.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^a \sin^2 x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(x+n\pi)^a \sin^2 x}\,dx$$

Важи

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^a \sin^2 x}\,dx \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(x+n\pi)^a \sin^2 x}\,dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^a \sin^2 x}\,dx.$$

За $b>0$ (произвољно) важи:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+b \sin^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+b \sin^2 x}\,dx$$

Увођењем смене $y = \mathrm{tg}\, x$ добијамо (оправдати увођење ове смене!)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+b^a \sin^2 x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(b^a+1)y^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{b^a+1}}$$

Стога је
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+((n+1)\pi)^a \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^a \sin^2 x} dx =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{((n+1)\pi)^a+1}}$$

и
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^a \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^a+1}}$$

Ако ставимо

$$p_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^a \sin^2 x} dx, \quad g_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^a \sin^2 x} dx$$

и
$$c_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(x+n\pi)^a \sin^2 x} dx$$

имамо
$$p_n \le c_n \le g_n,$$

при чему редови $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ конвергирају ако и само ако је $a > 2$.

$$\left(\quad p_n = \frac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^a + 1}} \sim \frac{\pi}{\pi^{\frac{a}{2}} n^{\frac{a}{2}}}, \quad n \to +\infty \right.$$

$$\left. q_n = \frac{\pi}{\sqrt{((n+1)\pi)^a + 1}} \sim \frac{\pi}{\pi^{\frac{a}{2}} n^{\frac{a}{2}}}, \quad n \to +\infty \quad \right)$$

Стога и ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{}{1 + (x+n\pi)^a \sin^2 x} \, dx$

конвергира ако и само ако $a > 2$, па и интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^a \sin^2 x} \, dx$ конвергира ако и само ако $a > 2$.