(10) Испитати конвергенцију интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad , \quad \alpha>0$$

Решење:

За функције $f(x)=\sin x$, $x\in[1,+\infty)$ и $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $x\in[1,+\infty)$ задовољени су сви услови Дирихлеовог теста за испитивање конвергенције несвојственог интеграла:

1° Функција $\underset{\beta\in(1,+\infty)}{F(\beta)} = \int_1^\beta \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_1^\beta =$

$= \cos 1 - \cos\beta$, је ограничена јер

$|F(\beta)| = |\cos 1 - \cos\beta| \le |\cos 1| + |\cos\beta| \le 1+1=2$

за $\beta\in(1,+\infty)$

2° $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $x\in[1,+\infty)$ је монотона

и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ за произвољно $\alpha>0$.

Дакле, дати интеграл конвергира за свако $\alpha>0$.

(11.) Израчунати:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx .$$

Решење:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin^4x+\cos^4x}\,dx = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^4x+\cos^4x}\,dx$$

$$\sin^4x+\cos^4x = (\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x =$$
$$= 1-\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2x\cos^2x = 1-\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 =$$
$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = (\sin^2 2x+\cos^2 2x)-\frac{1}{2}\sin^2 2x =$$
$$= \cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Стога је

$$I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^4x+\cos^4x}\,dx = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(2x)+\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\,dx =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(2x)}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(2x)}\,dx =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(2x)}\,d(\operatorname{tg}(2x))$$

Функција $\varphi:\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\to[0,+\infty)$ дата са

$\varphi(x)=\operatorname{tg}(2x)$ је непрекидно диференцијабилна,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\varphi(x)=+\infty$, док је функција $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

дата са $f(t)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}t^2}$ непрекидна на $[0,+\infty)$.

Стога су интеграли

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}t^2}\,dt \quad \text{и}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\,tg^2(2x)}\,d\left(tg(2x)\right)$$

еквиконвергентни (или оба конвергирају или оба дивергирају).

У овом конкретном случају оба конвергирају, јер $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}t^2}\,dt$ конвергира.

При томе важи:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\,tg^2(2x)}\,d\left(tg(2x)\right)$$

Како је $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}t^2}\,dt = \left(\sqrt{2}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}$,

то је

$$I = 4 \cdot \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\,\pi$$

(12) Израчунати интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx.$$

<u>Решење:</u>

Дати интеграл је несвојствен јер је подинтегрална функција неограничена на сваком од интервала $(0,\varepsilon)$ за $\varepsilon>0$.

Функције $f(x)=\ln(\sin x)$ и $g(x)=\ln x$ су истог знака (негативне) довољно близу тачке $x=0$ (на интервалу $(0,\varepsilon)$ за произвољно $0<\varepsilon<1$).

Са друге стране,

$$\ln(\sin x)=\ln\left(x+o(x)\right)=\ln\left(x\left(1+o(1)\right)\right)=\ln x+\ln(1+o(1)),\quad x\to 0+$$

па је $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}=1$

Стога су интеграли $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$ и $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln x\,dx$ еквиконвергентни

$|\ln x|<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ за x довољно близу нули

(јер $\displaystyle\lim_{x\to 0+}|\ln x|\sqrt{x}=0$)

па из конвергенције интеграла $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ следи конвергенција интеграла

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\ln x|\,dx$, што значи да $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln x\,dx$

апсолутно конвергира, а тиме и конвергира,

па конвергира и $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx.$

Приметимо да $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$

Стога је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin t}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln(\sin t) - \ln 2\right)dt$$

На основу тога је $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

$$\left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx\right)$$

13. Израчунати интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx, \quad a \neq 0.$$

Решење:

Дати интеграл је несвојствен. Са једне стране, интервал интеграције је бесконачан, а са друге, подинтеграна функција је неограничена на свакам од интервала $(0,\varepsilon)$ за $\varepsilon>0$.

Интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ конвергира ~~ако~~ и само ако конвергирају интеграли $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ и $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$.

Како је $\displaystyle\frac{\ln x}{x^2+a^2}\sim\frac{1}{a^2}\ln x,\ x\to 0+$, а интеграл $\displaystyle\int_0^1\ln x\,dx$ конвергира (као што смо показали у претходном задатку), то и интеграл $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ конвергира.

Даље,

$0\leq\dfrac{\ln x}{x^2+a^2}\leq\dfrac{\ln x}{x^2}$ за $x\geq 1$, па би на основу поредбеног критеријума ~~==~~ конвергенција интеграла ~~??~~ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ следила из конвергенције интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$, уколико интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ заиста конвергира.

Нека је $\alpha\in(0,1)$ произвољно.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0\Rightarrow(\exists M>0)(\forall x\in\mathbb{R})\left(x>M\Rightarrow\frac{\ln x}{x^\alpha}<1\right)$$

$$\frac{\ln x}{x^2}\geq 0 \text{ за } x\geq 1 \text{ и } \frac{\ln x}{x^2}=\frac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{x^{2-\alpha}}<\frac{1}{x^{2-\alpha}},$$

$x\geq 1$

$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \quad 2-\alpha > 1$

Стога:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx \text{ конвергира} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \text{ конвергира} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx \text{ конвергира}.$$

Дакле, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$ конвергира.

Остаје још да га израчунамо.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_0^{a} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$$

У интегралу $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$ можемо увести

смену променљиве са $x = \dfrac{a^2}{t}$ (зашто? услови?)

па је
$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_a^{0} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{t}\right)}{\left(\frac{a^2}{t}\right)^2 + a^2} \left(-\frac{a^2}{t^2}\right) dt =$$

$$= \int_0^{a} \frac{2\ln a - \ln t}{t^2+a^2}\,dt.$$

Стога је
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_0^{a} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_0^a \frac{2\ln a - \ln t}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= \int_0^a \frac{2\ln a}{t^2+a^2}\,dt = \frac{\pi \ln a}{2a}$$

(14) Израчунати интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \quad a>0.$$

Решење: Интеграл конвергира (проверити)

Увођењем смене $x = at$ (услови су испуњени, проверити!)

имамо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln t}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Интеграли $\int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{(1+t^2)^2}\,dt$ и $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$ конвергирају,

па имамо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{(1+t^2)^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{\pi \ln a}{4} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt}_{I}$$

Сменом $t = \operatorname{tg} u$ (услови су испуњени, проверити!)

добијамо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \ln(\operatorname{tg} u)\,du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} \ln(\operatorname{tg} u)\,du$$

Интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$ конвергира (проверити)

и важи $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx =$

оба интеграла конвергирају (задатак 12.)

$= 0$ (из 12. задатка).

Како интеграли $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} \ln(\operatorname{tg} u)\,du$ и

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} u)\,du$ конвергирају, то конвергира

и интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} u) \cos 2u\,du$ и важи

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} \ln(\operatorname{tg} u)\,du = \frac{1}{2} \overbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} u)\,du}^{=0} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} u) \cos 2u\,du$$

На крају, парцијалном интеграцијом (~~када~~ услови за парцијалну интеграцију су испуњени, проверити) добијамо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} u)\cos 2u\, du = 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2u}{2}\frac{1}{\operatorname{tg} u}\frac{1}{\cos^2 u}\,du =$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Дакле, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{\pi}{4}$, па

је $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{a^3}\left(\frac{\pi\ln a}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4a^3}(\ln a - 1).$

(15.) Израчунати интеграл

$$\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx .$$

<u>Решење</u>: Дати интеграл је несвојствен, али конвергира (проверити!)

Увођењем смене

$t = \pi - x$ (услови за увођење смене су испуњени, проверити!)

добијамо:

$$I = \int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\,dx = \int_0^{\pi}\ln(1-\cos t)\,dt$$

Стога је $\displaystyle I + I = \int_0^{\pi}\left[\ln(1+\cos x) + \ln(1-\cos x)\right]dx =$

$$= \int_0^{\pi}\ln(1-\cos^2 x)\,dx = 2\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)\,dx$$ конвергира и

сменом $t = x - \frac{\pi}{2}$ (проверити да ~~је~~ ~~[illegible]~~ су испуњени услови за увођење ове смене)

добијамо:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,dt = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx}_{\text{(из 12. задатка)}}$$

Дакле,

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx.$$

Стога је

$$2I = 2\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx =$$

$$= -2\pi \ln 2$$