Несвојствени интеграли

1. Испитати конвергенцију несвојствених интеграла:

а) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$, $\alpha>0$, $a<b$ б) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$, $\alpha>0$, $a<b$

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ г) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$

Решење

а) Подинтегрална функција $f(x)=\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, $x\in[a,b)$ је непрекидна на сваком сегменту $[a,c]\subset[a,b)$ за $c\in(a,b)$ па је f на сваком ~~таквом~~ сегменту и интеграбилна (Риман интеграбилна), али и неограничена у свакој околини тачке $x=b$.

За $\alpha\neq 1$ је

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-\alpha}\,dx =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$=\begin{cases} +\infty, & \alpha>1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1 \end{cases}$$

За $\alpha = 1$ је

$$\int_a^b \frac{1}{b-x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{b-x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(-\ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} \right)$$

$$= +\infty$$

Дакле, дати несвојствени интеграл конвергира ако $0 < \alpha < 1$, у супротном дивергира (за $\alpha > 0$).

б) Слично као у делу под а) можемо показати да овај несвојствени интеграл конвергира за $0 < \alpha < 1$, а дивергира за $\alpha \geq 1$.

Посебно, у случају $a = 0$, $b = 1$ и $\alpha > 0$ имамо да интеграл

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ конвергира за $0 < \alpha < 1$ и дивергира за $\alpha \geq 1$.

в) Подинтегрална функција $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ је непрекидна, а тиме и Риман интеграбилна на сваком сегменту $[0, c] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ за $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и неограничена у свакој околини тачке $x = \frac{\pi}{2}$, која је стога и сингуларитет за дати несвојствени интеграл.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{1}{\cos x}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left[\ln\left(tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = +\infty$$

што значи да овај несвојствени интеграл дивергира.

г) Подинтегрална функција није дефинисана у тачкама $x = 1$ и $x = -1$, и у свакој околини и једне и друге тачке је неограничена, па дати ~~несвојствени~~ интеграл јесте несвојствен и има два сингуларитета, у тим тачкама.

Како су тачке $x = -1$ и $x = 1$ унутрашње тачке интервала интеграције $[-2, 2]$, то дати несвојствени интеграл конвергира $\boxed{\text{само}}$ ако конвергирају несвојствени интеграли

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx \quad и \quad \int_{1}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx,$$

у супротном дивергира.

(при чему интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx$ конвергира

$\boxed{\text{само}}$ ако конвергирају интеграли

$$\int_{-1}^{0} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx \quad и \quad \int_{0}^{1} \frac{4x^3}{x^4-1}$$

док у супротном ~~уз напомену~~ дивергира

НАПОМЕНА! Уместо нуле могли смо узети било који број c из интервала $(-1, 1)$.)

Како је $\int_{-2}^{-1} \frac{4x^3}{x^4-1}dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln|x^4-1|\right)\Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} = +\infty$

што $\int_{-2}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}dx$ дивергира.

(2) Испитати конвергенцију следећих интеграла:

а) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}dx$

в) $\int_0^1 \ln x\, dx$ г) $\int_0^1 \frac{1}{\ln x}dx$

д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}dx, \ \alpha>0, \ a\neq 0$

ђ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

Решење

а) Функција $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in[0,1)$ је непрекидна и ненегативна на $[0,1)$.

Како је $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}, \quad x \to 1-0$

а интеграл $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx$ конвергира, закључујемо

да конвергира и $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

б) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$, $x\in[0,1)$ је непрекидна и ненегативна на $[0,1)$ и

$$\frac{1}{1-x^2}\sim\frac{1}{2(1-x)}, \quad x\to 1-0$$

па из дивергенције интеграла $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ следи да и дати интеграл дивергира.

в) $f(x)=\ln x$, $x\in(0,1]$ је непрекидна на $[0,1]$ па и Риман интеграбилна на сваком сегменту $[c,1]$ за $c\in(0,1)$ и неограничена у свакој околини тачке $x=0$.

Како је $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{|\ln x|}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=0$ и интеграл $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ конвергира то конвергира и $\int_0^1|\ln x|\,dx$, па и интеграл $\int_0^1 \ln x\,dx$ конвергира, и то апсолутно.

г) Како је ~~$\frac{1}{\ln x}$~~ за

$$\ln x=\ln(1+(x-1))=(x-1)+o((x-1)), \quad (x-1)\to 0-0$$

односно $x\to 1-0$

то је $\ln x\sim(x-1)$, $x\to 1-0$

$\iff -\ln x\sim(1-x)$, $x\to 1-0$

$f(x)=\ln x$ је негативна на $(0,1)$, при чему

$\int_0^1 \frac{1}{\ln x}dx$ конвергира ако и само ако $\int_0^1 \frac{1}{-\ln x}dx$ конвергира

($g(x) = \frac{1}{-\ln x}$ је позитивна на $(0,1)$).

Даље, $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{\ln x} = 0$, па је тачка $x=0$

за дати интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\ln x}dx$ само привидан

сингуларитет, па у циљу испитивања конвергенције

датог интеграла испитујемо само сингуларитет

у тачки $x = \underline{1}$.

$$-\ln x \sim (1-x), \quad x \to 1-0$$

па ~~из~~ дивергенције $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ следи дивергенција

интеграла

$\int_0^1 \frac{1}{-\ln x}dx$ а тиме и дивергенција интеграла

$\int_0^1 \frac{1}{\ln x}dx$.

g) $\operatorname{arctg} ax \sim ax$, $x \to 0$

па је

$$\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha} \sim \frac{a}{x^{\alpha-1}}, \quad x \to 0+0$$

Функција $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}$ је ненегативна

па ~~д~~ интеграли

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{x^{\alpha-1}}$$ или оба конвергирају

или оба дивергирају, дакле, дати интеграл

~~дати~~ конвергира за $\alpha - 1 < 1$ то јест за $\alpha < 2$

($\alpha > 0$ из услова задатка).

ђ) Подинтегрална функција $f(x) = \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

је ненегативна, па у зависности

од p и q, интеграл има до два сингуларитета,

у тачкама $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Када $x \to 0+0$ имамо

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{\sin^p x} \sim \frac{1}{x^p}$$

док за $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ имамо

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{\cos^q x} = \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^q} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q}$$

Дати несвојствени интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

конвергира само ако конвергирају

интеграли $I_1 = \int_0^c \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ и $I_2 = \int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

за $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ произвољно.

Из претходног следи да I_1 конвергира

ако и само ако $p < 1$, а I_2 ако и само ако $q < 1$.

Даље, полазни интеграл конвергира ако и само

ако $p < 1$ и $q < 1$.

(5) Испитати конвергенцију интеграла:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ б) $\int_0^{+\infty} e^{-px} dx$, $p \in \mathbb{R}$

в) $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ г) $\int_1^{+\infty} \ln x \, dx$

Решење

а) за $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

док за $\alpha = 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln(x) =$

$= +\infty$.

Дакле, дати интеграл конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

б) $p \neq 0$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-px}\,dx =$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pb}\right) + \frac{1}{p} = \begin{cases} \frac{1}{p}, & p > 0 \\ +\infty, & p < 0 \end{cases}$$

За $p = 0$ интеграл дивергира.

Дакле, дати интеграл конвергира ако и само ако је $p > 0$.

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b \to +\infty} (-\cos b) + \cos 0$.

Како $\lim\limits_{b \to +\infty} (-\cos b)$ не постоји, дати интеграл дивергира.

г) Како је $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ за довољно велико x (почев од неког x_0) а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ дивергира, ~~тад~~ онда и интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ дивергира.

(4) Испитати конвергенцију следећих интеграла:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+5}\,dx$ б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}\,dx$, $a\neq 0$

в) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ г) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$, $a>0$

Решење:

а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+5}$, $x\in[1,+\infty)$ је ненегативна

и важи:

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+5}\sim\frac{1}{x^2},\quad x\to+\infty$$

па из конвергенције интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ следи

конвергенција датог интеграла.

б) Подинтегрална функција је

за $a>0$ ненегативна, а за $a<0$ непозитивна.

Уколико је непозитивна, функција $g(x)=\dfrac{-\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}$

је ненегативна,

а интеграли $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}\,dx$ и $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{-\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}\,dx$

или оба конвергирају или оба

дивергирају (еквиконвергентни су)

Стога је довољно испитати конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}\,dx \quad \text{за } a>0 \quad \left(-\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha} = \frac{\operatorname{arctg}(-ax)}{x^\alpha} \right.$$

па ~~за~~ за $a<0$ имамо да је $-a>0$)

Као што смо већ рекли, подинтегрална функција је тада ненегативна и важи:

$$\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha}, \quad x \to +\infty$$

па ~~како~~ су интеграли $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^\alpha}\,dx$ (*) и

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ еквиконвергентни.

Дакле, дати интеграл (*) конвергира ако и само ако је $\alpha>1$.

в) Како је $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$

за произвољно $\varepsilon>0$, а интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ конвергира акко $\frac{3}{2}-\varepsilon>1$ то јест

за $\varepsilon<\frac{1}{2}$,

то за произвољно $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$ из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon_0}}$ следи да и

интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$ конвергира.

г) $\left| e^{-ax} \sin bx \right| \le e^{-ax}$, $x \in [0, +\infty)$

па из конвергенције интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx$, $a>0$

доказане у претходном задатку следи да и интеграл

$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx$ конвергира апсолутно (шта год да је b).

⑤ Испитати конвергенцију следећег интеграла:

$$\int_1^{+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha} dx$$

<u>Решење</u>

Како је $1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$, $t \to 0$

то је $x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \sim x\,\frac{1}{(2x^2)^{\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha} x^{2\alpha-1}}$, $x \to +\infty$

Подинтегрална функција је ненегативна,

па су интеграли $\int_1^{+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha} dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\, dx$

еквиконвергентни. Дакле, дати интеграл конвергира ако и само ако је $2\alpha - 1 > 1$, односно $\alpha > 1$.

⑥ Испитати конвергенцију интеграла у зависности од параметара a и b:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a \sin^2 x}{(x-2)^b}\,dx .$$

Решење

Интервал интеграције је неограничен, а уз то, у зависности од параметара a и b, интеграл може имати сингуларитете и у тачкама $x=0$ и $x=2$. Стога дати интеграл конвергира само ако конвергира сваки од следећих интеграла (подинтегралну функцију означено са $f = f(x)$):

$$I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad I_2 = \int_1^2 f(x)\,dx, \quad I_3 = \int_2^3 f(x)\,dx \quad \text{и} \quad I_4 = \int_3^{+\infty} f(x)\,dx$$

Како је

$$\frac{x^a \sin^2 x}{(x-2)^b} \sim \frac{x^{a+2}}{(-2)^b} = \frac{1}{(-2)^b x^{-a-2}}, \quad x \to 0+0$$

то интеграл I_1 конвергира ако и само ако је $-a-2 < 1$, то јест $a > -3$.

Даље,

$$\frac{x^a \sin^2 x}{(x-2)^b} \sim \frac{2^a \sin^2 2}{(x-2)^b} \quad \text{за} \quad x \to 2$$

па интеграли I_2 и I_3 конвергирају само за $b<1$.

За произвољно $\varepsilon>0$ важи:

$$(*) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^a \sin^2 x}{(x-2)^b}}{\frac{x^{a+\varepsilon}}{x^b}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^a \sin^2 x}{(x-2)^b}}{\frac{1}{x^{b-a-\varepsilon}}} = 0$$

При томе, интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{b-a-\varepsilon}}\,dx$, где је

ε неки фиксиран позитиван број (произвољан)

конвергира ако и само ако је $b-a-\varepsilon>1$,

то јест $b-a>1+\varepsilon$.

У том случају из $(*)$ следи да и

интеграл I_4 конвергира за $b-a>1+\varepsilon$.

Међутим, $\varepsilon>0$ можемо одабрати произвољно мало,

па можемо да закључимо да I_4 конвергира

када год $b-a>1$.

Наиме, уколико је $b-a>1$, можемо

одабрати $\varepsilon>0$ довољно мало тако да важи

$$b-a>1+\varepsilon \quad \Big(0<\varepsilon<\underbrace{b-a-1}_{>0 \text{ јер } b-a>1}\Big)$$

па из претходног следи да I_4 конвергира.

Са друге стране, из (*) следи да за $b-a \le 1$ I_4 дивергира. Дакле, I_4 конвергира ако и само ако $b-a>1$.

Дакле, интеграл конвергира ако и само ако $a>-3$, $b<1$, $b-a>1$.

(7) Испитати конвергенцију следећег несвојственог интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,dx$$

<u>Решење</u> Подинтегрална функција $f(x)=\dfrac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p}$, $x\in[1,+\infty)$ је непозитивна на $[1,+\infty)$.

$$\frac{-\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p} = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^p} = -\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} =$$

$$= \frac{1}{2x^{p+2}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \quad x\to+\infty$$

На основу тога имамо да је

$$-\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p} \sim \frac{1}{2x^{p+2}}, \quad x\to+\infty$$

Стога су интеграли $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,dx$ и $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^{p+2}}\,dx$

еквиконвергентни, па су и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^p}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{p+2}}\,dx$$ еквиконвергентни

(јер су $$\int_1^{+\infty} \frac{-\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^p}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^p}\,dx$$ еквиконвергентни).

Дакле, $$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^p}\,dx$$ конвергира ако и само ако је $p+2>1$, што јест $p>-1$.

8. Испитати конвергенцију и апсолутну конвергенцију следећих интеграла:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{k^2+x^2}\,dx, \quad a \neq 0$$

Решење

Како је $$\left|\frac{\cos ax}{k^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{за} \quad x \in \mathbb{R}$$

и $$\left|\frac{\sin ax}{k^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{за} \quad x \in \mathbb{R}$$ што

оба интеграла апсолутно конвергирају.

9. Испитати да ли интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

a) конвергира

б) апсолутно конвергира.

Решење

Из $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ следи да дати несвојствени интеграл у тачки $x=0$ има само привидан сингуларитет, па се испитивање конвергенције тог интеграла своди на испитивање конвергенције несвојственог интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

За $f(x) = -\cos x$, $x \in [1,+\infty)$ и $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1,+\infty)$ имамо да су f и g непрекидно диференцијабилне на $[1,+\infty)$

$f'(x) = \sin x$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\cos x}{x} = 0$

па применом Теореме о парцијалној интеграцији на дати несвојствени интеграл имамо да су интеграли

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx \quad \text{и}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$ еквиконвергентни, па

с обзиром да $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ конвергира апсолутно,

(јер је $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ а $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ конвергира)

то и $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ конвергира (и важи:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Bigg|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,.)$$

б) Како важи $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

то је за свако $b > 1$:

$$(*) \quad \int_1^{b} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{2}\int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^{b} \frac{\cos 2x}{x}\,dx\,.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ конвергира (доказујемо као у делу под а)) док $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ дивергира и

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$ па на основу (*)

Закључујемо да је и $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$

што значи да

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ дивергира, дакле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ не

конвергира апсолутно.

На основу а) и б) закључујемо да

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ конвергира условно.