Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

–задаци за вежбе–

Линеарна алгебра

1 Системи линеарних једначина

1.1. Решити системе:

а) $\begin{aligned} 2x+3y&=1,\\ 5x+7y&=3. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x+4y&=10,\\ 3x+6y&=15. \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} 4x-2y&=5,\\ -6x+3y&=1. \end{aligned}$

1.2. Решити системе:

а) $\begin{aligned} 2x+y-3z&=5,\\ 3x-2y+2z&=5,\\ 5x-3y-z&=16. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x+3y-2z&=5,\\ x-2y+3z&=2,\\ 4x-y+4z&=1. \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3,\\ 2x+3y+8z&=4,\\ 3x+2y+17z&=1. \end{aligned}$

1.3. Решити системе:

а) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2,\\ 3x-2y-z&=5,\\ 2x-5y+3z&=-4,\\ x+4y+6z&=0. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x+5y+4z-13w&=3,\\ 3x-y+2z+5w&=2,\\ 2x+2y+3z-4w&=1, \end{aligned}$

1.4. Решити системе:

а) $\begin{aligned} x+2y-3z+2w&=2,\\ 2x+5y-8z+6w&=5,\\ x-y+3z-4w&=-1,\\ 4x+9y-10z+10w&=9. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x-y-2z+2w&=-1,\\ 2x+2y-2z-w&=2,\\ 3x-5y+4z+3w&=-5,\\ x+5y-6z-2w&=5. \end{aligned}$

1.5. Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да систем

$$\begin{aligned} x+y+\alpha z&=2,\\ 3x+4y+2z&=\alpha,\\ 2x+3y-z&=1, \end{aligned}$$

а) има јединствено решење; б) нема решења; в) има бесконачно решења.

1.6. У зависности од реалног параметра α, решити систем

$$\begin{aligned} x-3z&=-3,\\ 2x+\alpha y-z&=-2,\\ x+2y+\alpha z&=1. \end{aligned}$$

2 Вектори

2.1. Одредити $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да важи $\alpha\vec{a} = \beta\vec{b}$, где су $\vec{a} = (2, \beta)$ и $\vec{b} = (1, -2)$.

2.2. Дати су вектори $\vec{a} = (2, -1, 0, -3)$, $\vec{b} = (1, -1, -1, 3)$ и $\vec{c} = (1, 3, -2, 2)$. Одредити вектор $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c}$, скаларне производе $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ и $\vec{b}\cdot\vec{c}$, норме $\|\vec{a}\|$ и $\|\vec{b}\|$, као и $d(\vec{a}, \vec{b})$.

2.3. Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $d(\vec{a}, \vec{b}) = 6$, где су $\vec{a} = (2, \alpha, 1, -4)$ и $\vec{b} = (3, -1, 6, -3)$.

2.4. Одредити $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, где су $\vec{a} = (2, 6, -2, 6)$ и $\vec{b} = (-2, 4, 2, 4)$.

2.5. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ су вектори $\vec{a} = (2, 3\alpha, -4, 1, 5)$ и $\vec{b} = (6, -1, 3, 7, 2\alpha)$ ортогонални?

2.6. Испитати да ли је вектор $\vec{d} = (1, -2, 5)$ линеарна комбинација вектора $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (2, -4, -1)$ и $\vec{c} = (1, -5, 7)$. Проверити исто за вектор $\vec{e} = (1, -1, -3)$.

2.7. Испитати да ли су вектори:
а) $\vec{a} = (1, 4, -2, 3)$, $\vec{b} = (1, 6, -1, 4)$ и $\vec{c} = (3, 8, -8, 7)$;
б) $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 0, 0)$,
линеарно зависни.

2.8. Одредити вектор $\vec{b}$ нормалан на вектор $\vec{a} = (5, 3)$.

2.9. Одредити вектор $\vec{c}$ нормалан на векторе $\vec{a} = (1, 3, 4)$ и $\vec{b} = (2, 6, -5)$.

2.10. Одредити вектор $\vec{c}$ нормалан на векторе $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ и $\vec{b} = (1, -1, 2, 4)$.

3 Матрице

3.1. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. Одредити $A + B$, $2A - 3B$ и A^T.

3.2. Одредити $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ тако да $3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$.

3.3. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.
Израчунати AB, BA, $A(BC)$ и $(AB)C$.

3.4. Одредити скуп свих матрица које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3.5. Решити матричну једначину $XA = B$, где су $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -30 & -12 \end{bmatrix}$.

3.6. Одредити $k \in \mathbb{R}$ такво да матрица $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ поништава полином $f(x) = x^2 - 25$.

3.7. Израчунати $(A + B)^2$, где су $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

3.8. Ако су $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, израчунати $A^2 - C^2 + AB - AC + CA + CB$.

3.9. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Одредити када је A инвертибилна и наћи јој инверз.

3.10. Доказати:
а) Ако су A и B инвертибилне, онда је и AB инвертибилна и важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
б) Ако је A инвертибилна, онда је и A^T инвертибилна и важи $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3.11. Елементарним трансформацијама врста одредити инверз матрице:
а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{bmatrix}$; в) $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

3.12. Решити систем користећи проширену матрицу:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 3x + 8y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

4 Векторски простори

4.1. Доказати да је $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ векторски потпростор од $\mathbb{R}^3$.

4.2. Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$. Доказати да је $W \leq V$, ако је:
а) $W = \{A \in V \mid A^T = A\}$.
б) $W = \{A \in V \mid AT = TA\}$, где је $T \in V$ дата матрица.
Пример: $V = M_2(\mathbb{R})$, $T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

4.3. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$. Испитати да ли је скуп
а) $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a = 0\}$; б) $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a + b = 1\}$,
затворен за сабирање и множење скаларом.

4.4. Нека је $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ и $W = \{f \in V \mid f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. Доказати да је $W \leq V$.

4.5. Испитати да ли је $W \leq \mathbb{R}^3$, ако је:
а) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 2b\}$; б) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq b \leq c\}$;
в) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \cdot b = 0\}$; г) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c\}$;
д) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b^2\}$.

4.6. Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$. Доказати да су $U = \{p \in V \mid p(0) + p(1) = 0\}$ и $W = \{p \in V \mid p(1) = p'(1) = 0\}$ векторски потпростори од V и одредити $U \cap W$.

4.7. Изразити полином $p = t^2 + 4t - 3$ као линеарну комбинацију полинома $p_1 = t^2 - 2t + 5$, $p_2 = 2t^2 - 3t$ и $p_3 = t + 3$.

4.8. Испитати да ли су следећи вектори линеарно независни:
а) $u = (1, -2, 1)$, $v = (2, 1, -1)$ и $w = (7, -4, 1)$;
б) $u = (1, 3, -1, 4)$, $v = (3, 8, -5, 7)$ и $w = (2, 9, 4, 23)$.

4.9. Испитати да ли су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ линеарно независне.

4.10. Нека је $V = \mathbb{R}^3[t]$. Испитати линеарну независност полинома $u = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$, $v = t^3 + 2t^2 + 4t - 1$ и $w = 2t^3 - t^2 - 3t + 5$.

4.11. Нека је $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Доказати да су функције $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$ и $h(t) = t$ линеарно независне.

4.12. Нека су u, v и w линеарно независни вектори. Доказати да су тада и $u + v$, $u - v$ и $u - 2v + w$ линеарно независни.

4.13. Да ли вектори $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ и $u_3 = (2, -1, 1)$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$?

4.14. Нека је $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1 = (1, -2, 1, 3, -1)$, $u_2 = (-2, 4, -2, -6, 2)$, $u_3 = (1, -3, 1, 2, 1)$ и $u_4 = (3, -7, 3, 8, -1)$. Одредити бар једну базу за W као и његову димензију.

4.15. Нека је $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1 = (1, 1, 1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 2, -1, -2, 1)$, $u_3 = (3, 5, -1, -2, 5)$ и $u_4 = (1, 2, -1, -1, 4)$. Наћи подскуп скупа вектора $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ који формира базу за W.

4.16. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$. Наћи базу и димензију потпростора W који је генерисан векторима

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \ \text{ и } \ D = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.17. Наћи базу и димензију потпростора W векторског простора $\mathbb{R}^3[t]$ генерисаног полиномима

$$u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1, \quad v = t^3 + 3t^2 - t + 4, \quad w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7.$$

4.18. Нека је W векторски потпростор свих симетричних матрица у $M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је $dimW = 3$.

4.19. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ дати са $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\}$ и $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d, b = 2c\}$. Наћи бар по једну базу за U и W, као и за $U \cap W$.

4.20. Нека су $U, W \leq V$. Доказати да је тада $U \cap W \leq V$ и $U + W \leq V$.

4.21. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^3$ дати са $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c\}$ и $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 0\}$. Показати да је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

4.22. Дати су потпростори U_1, U_2 и U_3 векторског простора $\mathbb{R}^3$ са $U_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c = 0\}$, $U_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = c\}$ и $U_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 0,\ b = 0\}$. Доказати да је:
а) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$;
б) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$;
в) $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$.
Када је сума директна?

4.23. Нека је $U \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $e_1 = (1,3,-3,-1,-4)$, $e_2 = (1,4,-1,-2,-2)$ и $e_3 = (2,9,0,-5,-2)$, а $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан са $f_1 = (1,6,2,-2,3)$, $f_2 = (2,8,-1,-6,-5)$ и $f_3 = (1,3,-1,-5,-6)$. Наћи:
а) $\dim(U+W)$; б) $\dim(U \cap W)$.

4.24. Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ генерисан векторима $e_1 = (1,1,0,-1)$, $e_2 = (1,2,3,0)$ и $e_3 = (2,3,3,-1)$, а $W \leq \mathbb{R}^4$ генерисан са $f_1 = (1,2,2,-2)$, $f_2 = (2,3,2,-3)$ и $f_3 = (1,3,4,-3)$. Наћи бар једну базу за U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

4.25. Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$.
а) Показати да је $V = U \oplus W$, где је U потпростор симетричних матрица ($A^T = A$) и W потпростор антисиметричних матрица ($A^T = -A$).
б) Показати да $V \neq U \oplus W$, где је U потпростор горње троугаоних матрица и W потпростор доњетроугаоних матрица.

4.26. Нека су U и W различити седмодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $\dim(U+W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од вредности.

4.27. Наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix}$.

5 Линеарна пресликавања

5.1. Нека је $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ пројекција на Oxy раван, тј. $F(x,y,z) = (x,y,0)$. Доказати да је F линеарно пресликавање.

5.2. Нека је $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ транслација за вектор $(1,2)$, тј. $F(x,y) = (x+1, y+2)$. Доказати да F није линеарно пресликавање.

5.3. Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$ и нека је M фиксирана ненула матрица. Дата су пресликавања $T_i : V \to V$ са $T_1(A) = MA$, $T_2(A) = MA - AM$, $T_3(A) = M + A$. Која пресликавања су линеарна?

5.4. Нека је $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање такво да $T(1,2) = (3,-1,5)$ и $T(0,1) = (2,1,-1)$. Наћи формулу за T, тј. $T(a,b)$.

5.5. Нека је $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дато са $G(x,y,z) = (x+y, y+z)$.
а) Доказати да је G линеарно;
б) Наћи базу и димензију за $\mathrm{Im}G$;
в) Наћи базу и димензију за $\mathrm{Ker}G$.

5.6. Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ дефинише пресликавање $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ са $F(v) = A \cdot v$. Наћи базу и димензију за $\mathrm{Im}F$ и $\mathrm{Ker}F$.

5.7. Нека су $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ и $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ пресликавања дата са $F(x,y,z) = (y, x+z)$, $G(x,y,z) = (2z, x-y)$ и $H(x,y) = (y, 2x)$. Наћи формуле за $F+G$, $3F-2G$, $H \circ F$, $H \circ F$, $F \circ H$ и $G \circ H$.

5.8. Доказати да за све линеарне операторе L на векторском простору V важи

$$\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L.$$

5.9. Нека је $A : V \to V$ линеарни оператор такав да је $V = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Im}A$. Доказати да је $V = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Im}A^2$.

5.10. Дата су пресликавања $F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дата са $F(x, y, z) = x+y+z$, $G(x, y, z) = y+z$ и $H(x, y, z) = x - z$. Показати да су ова пресликавања линеарно независна.

5.11. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дато са $L(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z)$. Испитати да ли је L инвертибилан и ако јесте наћи формулу за L^{-1}.

5.12. Наћи матрицу линеарног оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ у односу на канонску базу E простора $\mathbb{R}^3$ и у односу на базу $S = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (1, 3, 5)\}$ ако је
а) $T(x, y, z) = (x, y, 0)$;
б) $T(x, y, z) = (2x - 7y - 4z, 3x + y + 4z, 6x - 8y + z)$;
в) $T(x, y, z) = (z, y + z, x + y + z)$.

5.13. Нека је D оператор диференцирања, $D(f) = f'(t)$. Наћи матрицу оператора D у бази
а) $E = \{e^{5t}, te^{5t}, t^2e^{5t}\}$;
б) $F = \{1, t, \sin 3t, \cos 3t\}$.

5.14. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ и $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ дата матрица. Наћи матрицу следећих линеарних оператора $T : V \to V$ у односу на канонску базу простора V:
а) $T(A) = MA$; б) $T(A) = AM$; в) $T(A) = MA - AM$.

5.15. Дате су две базе $E = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ и $F = \{f_1 = (1, 2), f_2 = (2, 3)\}$ у $\mathbb{R}^2$.
а) Наћи матрицу P преласка са базе E на F и матрицу Q преласка са базе F на E. Проверити да ли је $P = Q^{-1}$.
б) За линеарни оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, x + y)$. Одредити матрице $[T]_e$ и $[T]_f$.

5.16. Нека је $S = \{v_1, v_2\}$ база за V и $T : V \to V$ линеарни оператор за који је $T(v_1) = 3v_1 - 2v_2$ и $T(v_2) = v_1 + 4v_2$. Нека је $S' = \{w_1, w_2\}$ друга база за V где је $w_1 = v_1 + v_2$ и $w_2 = 2v_1 + 3v_2$. Наћи матрицу оператора T у бази S'.

5.17. Нека је $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ линеарно пресликавање дефинисано са $F(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Наћи матрицу пресликавања F у односу на базе $S = \{w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 0)\}$ и $S' = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (1, 4)\}$ простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.

5.18. Нека је L линеарни оператор простора $\mathbb{R}^3$ задат са $L(x, y, z) = (x + y, x + 2y + 2z, x + 2y + 5z)$.
а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу $\mathbb{R}^3$.
б) Доказати да је оператор L инвертибилан.
в) Одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу $\mathbb{R}^3$.

5.19. Нека је $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
$L(a, b, c, d) = (a + 3b + 5c + 9d, a + b + c - d, a + 2b + 3c + 4d)$.
а) Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонске базе.
б) Одредити ранг, дефект и бар по једну базу језгра и слике пресликавања L.

6 Детерминанте

6.1. Израчунати следеће детерминанте:

а) $|-5|$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

6.2. Ако је A ортогонална тј. $A^TA = E$, доказати да је $\det A = \pm 1$.

6.3. Израчунати следеће детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

6.4. Израчунати $\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$.

6.5. Не рачунајући је до краја, доказати да је $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

6.6. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Доказати да је $\det(\mathrm{kA}) = k^n \det A$, $k \in \mathbb{R}$.

6.7. Израчунати:

а) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b & b & b & \dots & b \\ b & a & b & b & \dots & b \\ b & b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$.

6.8. Користећи адјунговану матрицу, одредити A^{-1} ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6.9. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ произвољна матрица реда 2.
а) Одредити adj A;
б) Показати да је adj(adj A) $= A$.

6.10. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инвертибилна матрица. Доказати да је $\det(\mathrm{adj}\ \mathrm{A}) = (\det A)^{n-1}$.

6.11. Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалних параметара $a, b, c \in \mathbb{R}$, таквих да је $ab \neq 0$, решити систем

$$\begin{aligned} ax - 2by &= c, \\ 3ax - 5by &= 2c. \end{aligned}$$

6.12. Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити системе

а) $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= 1, \\ x + y + az &= 1, \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} -2x + ay + 3z &= a+1, \\ -2x + 2y + (a-2)z &= 1, \\ x - 3y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

6.13. Наћи запремину паралелепипеда у $\mathbb{R}^3$ разапетог векторима $\vec{a} = (1,2,4)$, $\vec{b} = (2,1,-3)$ и $\vec{c} = (5,7,9)$.

7 Карактеристични и минимални полином. Дијагонализација матрица

7.1. Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} A + \det A$.

7.2. Нека је $A \in M_3(\mathbb{R})$. Доказати да је $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \mathrm{tr} A - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det A$.

7.3. Доказати да A и A^T имају исти карактеристични полином.

7.4. Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином.

7.5. Наћи карактеристични полином матрице:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7.6. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Наћи:
а) сопствене вредности и сопствене векторе матрице A;
б) инвертибилну матрицу P тако да је $D = P^{-1}AP$ дијагонална.
в) A^5.

7.7. Нека је $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Испитати да ли је A слична дијагоналној матрици D.

7.8. Нека је $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$. Наћи A^n, $n \in \mathbb{N}$.

7.9. Нека је $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.
а) Наћи минимални полином $\mu_A(x)$ матрице A.
б) Наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
в) Испитати да ли је A дијагоналног типа.
г) Наћи A^n, $n \in \mathbb{N}$.

7.10. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
а) Наћи минимални полином $\mu_A(x)$ матрице A.
б) Наћи сопствене вредности и сопствене векторе.
в) Испитати да ли је A дијагоналног типа.

7.11. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -12 & -4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

8 Скаларни производ

8.1. Доказати да је са $< \vec{x}, \vec{y} >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ дефинисан скаларни производ у $\mathbb{R}^2$.

8.2. Нека је $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ са скаларним производом $< A, B >= \mathrm{Tr}(B^T A)$.
Ако је $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Наћи $< A, B >$, $\|A\|$ и $\|B\|$.

8.3. Доказати да је:
а) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$;
б) $< u, v >= \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.

8.4. Наћи растојање и угао између вектора u и v, где
а) $u = (1, 3, 5, 7)$, $v = (4, -2, 8, 1)$ са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^4$;
б) $u = (1, -3, 2)$, $v = (2, 1, 5)$ са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^3$.

8.5. Ако је $S \leq V$, доказати да је и $S^\perp$ векторски потпростор простора V.

8.6. Нека је $S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, -3), u_3 = (5, -4, -1)\}$.
а) Доказати да је S ортогоналан скуп и база простора $\mathbb{R}^3$ у односу на стандардни скаларни производ.
б) Написати $v = (1, 5, -7)$ као линеарну комбинацију вектора u_1, u_2 и u_3.

8.7. Грам-Шмитовим поступком одредити ОНБ потпростора W простора $\mathbb{R}^4$ генерисаног векторима $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1, 0)$ и $f_3 = (-1, 2, 0, 1)$. Затим одредити базу потпростора $W^\perp$.

8.8. Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Користећи Грам-Шмитов поступак наћи ОНБ за V.

8.9. Одредити угао који вектор $v = (1, 0, -1)$ заклапа са скупом W решења једначине $-2x + y + z = 0$ у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$. Затим одредити растојање вектора v од потпростора W.

8.10. Дат је векторски простор W решења система једначина $4x + 2y - 4z + 2t = 0,\ 5x + y - 3z + 3t = 0$.
а) Наћи базу и димензију W.
б) Наћи базу и димензију $W^\perp$.
в) Растојање вектора $v = (2, 6, -2, 6)$ од W.
г) Угао између вектора $v = (2, 6, -2, 6)$ и W.

8.11. Нека је V векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $e_1 = (1, 2, 1, 2)$ и $e_2 = (4, 3, 1, 2)$.
а) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $w = (1, 2, -1, -2)$ на V и $V^\perp$.
б) Којем од потпростора V и $V^\perp$ је ближи w?

8.12. Дат је векторски потпростор $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$.
а) Наћи базу и димензију W.
б) Одредити угао који матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ заклапа са простором W у односу на скаларни производ $A \circ B = \mathrm{Tr}(AB^T)$.

8.13. Ако је на простору $V = \mathbb{R}^3[x]$ скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p'''(0)q'''(0),$$

и $W = \{p \in V \mid p(1) + p(-1) = 0\}$, одредити угао који полином $p(x) = -x^2 - x + 2$ заклапа са W.

8.14. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $A \circ B = \mathrm{Tr}\left(A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} B\right)$ и нека је дат потпростор $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}A = 0\}$.
а) Одредити ортогоналну пројекцију јединичне матрице I на W и $W^\perp$.
б) Ком простору је вектор I ближи?

8.15. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $A \circ B = \mathrm{Tr}(B^T A)$. Ако је $W = \{A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, наћи ортогоналну базу за $W^\perp$.

Аналитичка геометрија

9 Геометрија у $\mathbb{R}^2$

9.1. Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(1, 2)$ и има вектор нормале $\vec{n}_p = (1, -2)$.

9.2. Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(2, 3)$ и има вектор правца $\vec{p} = (2, 1)$.

9.3. Одредити једначину праве p која садржи тачке $A(1, 2)$ и $B(5, 4)$. Записати p у канонском, параметарском и имплицитном облику.

9.4. Одредити углове које права $p : 3x - 2y + 4 = 0$ заклапа са координатним осама.

9.5. Одредити једначину нормале n праве $p : 2x + 3y - 4 = 0$ која садржи пресек правих $q : x + y + 2 = 0$ и $r : x - y = 0$.

9.6. Одредити растојање тачке $A(3, 6)$ од праве $p : x + 2y - 1 = 0$.

9.7. Одредити симетралу углова између правих $p : y = x - 2$ и $q : y = 3$.

9.8. Одредити једначину праве p чији је коефицијент правца -2 и налази се на растојању 2 од координатног почетка.

10 Геометрија у $\mathbb{R}^3$

10.1. Одредити једначину нормале n из тачке $A(2,3,-1)$ на раван $\alpha: 2x+y-4z+5=0$.

10.2. Одредити једначину равни која садржи тачку $A(-1,0,3)$ и нормална је на $q: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

10.3. Дате су раван $\alpha: x+y-z+1=0$ и права $p: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Одредити:
а) пресек праве p и равни α. б) угао између праве p и равни α.

10.4. Одредити тачку C која је симетрична тачки $A(3,-2,-4)$ у односу на раван $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$, као и пројекцију B тачке A на раван α.

10.5. Одредити тачку C која је симетрична тачки $A(-1,-2,1)$ у односу на праву $p: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{1}$, као и пројекцију B тачке A на праву p.

10.6. Дате су раван $\alpha: x+y-z+1=0$ и права $p: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Одредити пројекцију праве p на раван α.

10.7. Дате су равни $\alpha: 8x+2y-3z-7=0$ и $\beta: -6x+4y+z-7=0$ и права

$$p: \begin{array}{l} x=t, \\ y=2t-14, \qquad t\in\mathbb{R}, \\ z=-2t+10, \end{array}$$

а) Испитати узајамни положај равни α и β. Одредити растојање између њих, ако су паралелне, или угао иымеђу њих, ако се секу;
б) Одредити једначину праве q која је симетрична правој p у односу на раван β.

10.8. Израчунати површину троугла са теменима $A(1,2,3)$, $B(4,7,-2)$ и $C(-3,7,8)$.

10.9. Одредити једначину равни α која:
а) је паралелна равни Oxz и садржи тачку $A(2,3,5)$;
б) садржи z-осу и тачку $B(-3,1,2)$;
в) је паралелна x-оси и садржи тачке $C(4,0,-2)$ и $D(5,1,7)$.

10.10. Одредити једначину равни β која садржи праву $p: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha: 2x-4y+z+5=0$.

10.11. Дате су права $p: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ и раван $\alpha: 3x-y+6=0$. Одредити једнацнину праве q која припада равни α и сече праву p под правим углом.

10.12. У каквом положају стоје праве p и q?

а) $p: \begin{array}{l} x=-1+2t, \\ y=3-t, \quad t\in\mathbb{R}, \\ z=-5+3t, \end{array} \quad q: \begin{array}{l} x=2+s, \\ y=-3+4s, \quad s\in\mathbb{R} \\ z=3-2s, \end{array}$

б) $p: \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-12}{-1}$, $q: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3}$.

в) $p: \begin{array}{l} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{array}$, $q: \frac{x+3}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{5}$.

10.13. Одредити параметар $\lambda\in\mathbb{R}$ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-1}{-2}$ и $q: \frac{x-\lambda}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{0}$ секу и за такво λ наћи пресечну тачку као и раван α која садржи p и q.

10.14. Одредити једначину заједничке нормале као и растојање мимоилазних правих
$p: \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-12}{-1}$ и $q: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

10.15. Дате су тачка $L(2,0,2)$ и праве $p: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ и $q: \frac{x-3}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{0}$. Одредити праву l која садржи тачку L и сече праве p и q.

10.16. Кроз тачку $Q(-3,1,2)$ одредити праву q која је паралелна равни $\alpha: 4x-y+2z-5=0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.