Analog "abc"-teoreme za $\mathbb{Z}$?

- aritmetičke funkcije

$\omega(n) = \omega\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = k$ – ukupan broj različitih prostih faktora prirodnog br. n

$\Omega(n) = \Omega\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k$ – totalni broj prostih faktora u faktorizaciji.

Npr. $\omega(12) = 2$, $\Omega(12) = 3$
$\omega(72) = 2$, $\Omega(72) = 5$

Analogija

prsten $\mathbb{C}[t]$	prsten $\mathbb{Z}$
ireducibilni polinomi $t-\alpha$	prosti brojevi p
faktorizacija na ireducibilne faktore: $n(t) = (t-\alpha_1)^{e_1}(t-\alpha_2)^{e_2}\cdots(t-\alpha_k)^{e_k}$	faktorizacija na proste $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$
$\deg n(t) = e_1+e_2+\dots+e_k$	$\Omega(n) = e_1+\dots+e_k$
broj različitih korena $= k$	$\omega(n) = k$

Dakle direktni analog abc-teoreme za polinome u $\mathbb{Z}$ bi bio:

(☆) Ako su a, b, c koprosti celi brojevi ; $\boxed{a+b=c}$, onda je

$$\max\{\Omega(a), \Omega(b), \Omega(c)\} < \omega(abc)$$

Međutim, ovo nije tačno! Npr.

$1+7=8$

$\max\{\Omega(1), \Omega(7), \Omega(8)\} = 3 < \omega(1\cdot 7\cdot 8) = 2$

- Da li $(\star)$ može nekako da se "popravi"?

U Teoriji brojeva, prosti brojevi p se iz puno razloga broje težinom $\log p$, a ne samo 1 (videti knjigu – glave 2 i 5)

Zato je prirodnije da za analog stepena polinoma uzmemo za $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, umesto $e_1+e_2+\dots+e_k$ veličinu

$$e_1 \cdot \log p_1 + e_2 \log p_2 + \dots + e_k \log p_k = \log n$$

Sa druge strane, totalni broj različitih prostih faktora od ~~ab~~ $a\cdot b\cdot c$ zamenjujemo sa

$$\sum_{p \mid abc} \log p$$

Da li je analogno tvrđenje, pod istim pretpostavkama $(a, b, c > 0)$ onda:

$$(\star'): \quad \max\{\lg a, \lg b, \lg c\} \leq \sum_{p \mid abc} \log p$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\max\{a, b, c\} \leq \prod_{\substack{p \text{ prost} \\ p \mid abc}} p$$

Ni ($\star'$) nije tačno!

$1+8=9$

$\max\{1,8,9\} \leq \prod_{p \mid (1\cdot 8\cdot 9)} p = 2\cdot 3 = 6$

ili

$5+27=32$

$\max\{5,27,32\} \leq \prod_{p \mid 5\cdot 27\cdot 32} p = 5\cdot 3\cdot 2 = 30$

- Da li možda možemo da dodamo neku (veliku) konstantu $K>0$ ispred desne strane, pa da dobijemo moguću hipotezu?

($\star''$): $\max\{a,b,c\} \leq K \cdot \prod_{\substack{p \text{ prost} \\ p \mid abc}} p$

Primer p – velik prost broj, dakle neparan

$a = 1$, $c = 2^{p(p-1)}$, $b = c-a = 2^{p(p-1)} - 1$

Mala Fermaova t.: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $\quad 2^{p-1} = p\cdot s + 1$, $s \in \mathbb{N}$

$b = (2^{p-1})^p - 1 = (p\cdot s+1)^p - 1 = (p\cdot s)^p + \dots + \binom{p}{p-2}(ps)^2 + \underbrace{\binom{p}{p-1}\cdot ps}_{p^2\cdot s} + 1 - 1$

$\equiv 0 \pmod{p^2}$ $\qquad \boxed{p^2 \mid b}$

($\star''$): $2^{p(p-1)} = b+1 \leq K \cdot \prod_{\substack{q \mid 1\cdot 2^{p(p-1)}\cdot b \\ q \text{ - prost}}} q \leq K \cdot 2 \cdot \frac{b}{p}$

tj. $1+\frac{1}{6} \leq K \cdot \frac{2}{p}$

Koliko god K bilo veliko, pošto p možemo da biramo proizvoljno veliko, $p > 2K$, d.s. < 1 ↯.

· Dakle, čak ni $(\star'')$ sa korekcijom konstante nije tačno!

· Tačna hipoteza je tek sledeća:

H [abc-hipoteza za $\mathbb{Z}$; Oesterlé - Masser 1985.]

Za svako dato $\varepsilon > 0$, postoji neka realna konstanta $\kappa_\varepsilon > 0$ takva da:

za sve koproste prirodne brojeve a, b i c za koje je

$a + b = c$

važi

$$\boxed{c \leq \kappa_\varepsilon \Bigg(\prod_{\substack{p \text{ prost} \\ p \mid abc}} p \Bigg)^{1+\varepsilon}}$$

Primer: Pretpostavimo da $x, y, z \in \mathbb{N}$ zadovoljavaju Fermaovu j-nu:

$x^n + y^n = z^n$, npr. $n \geq 5$

Stavimo: $a = x^n$, $b = y^n$, $c = z^n$ $\qquad \prod_{p \mid abc} p = \prod_{p \mid xyz} p$

'abc'-hipoteza za $\varepsilon = \frac{1}{5}$ kaže: $(\kappa = \kappa_{1/5})$

$$z^n \leq \kappa \cdot \Bigg(\prod_{p \mid xyz} p \Bigg)^{1+\frac{1}{5}} \leq \kappa\, (xyz)^{\frac{6}{5}} \leq \kappa\, (z^3)^{\frac{6}{5}} \leq \kappa \cdot z^{\frac{18}{5} \cdot \frac{n}{5}} = \kappa (z^n)^{\frac{18}{25}}$$

$(z^n)^{\frac{7}{25}} \leq \kappa$ tj. $\boxed{z^n \leq \kappa^{\frac{25}{7}}}$ → dakle sva rešenja su ograničena nekom apsolutnom konstantom!

$x^n, y^n \leq$