Предавања, прекинута увођењем ванредног стања, настављамо овим путем. Овај документ ће се надограђивати...

1 Експоненцијална функција

1.1 Дефиниција помоћу аксиома реалних бројева

Нека је $a > 1$ реалан број. На претходним часовима смо дефинисали појам степена са рационалним изложиоцем $a^r, r \in \mathbb{Q}$ и доказали нека својства:

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}, \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2},$$

где су $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Докажимо сада и следеће:

(а) $r_1 < r_2 \Longrightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$,

(б) ако $r_0 \in \mathbb{Q}$, тада $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to r_0} a^r = a^{r_0}$.

Докажимо својство (б). Провериђемо прво да оно важи у специјалном случају $r_0 = 0$, тј. показаћемо да је $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to 0} a^r = 1$. На основу (а) важи

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^r < a^{\frac{1}{n}}, \ |r| < \frac{1}{n}. \tag{1.1}$$

Познато је да је $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, а самим тим је и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Дакле, за дато $\varepsilon > 0$ може се наћи $n \in \mathbb{N}$ тако да је $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}$ и $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Ако означимо $\delta = \frac{1}{n}$, према (1.1) видимо да је

$$1 - \varepsilon < a^r < 1 + \varepsilon, \ |r| < \delta.$$

Нека је сада $r_0 \in \mathbb{Q}$ произвољно. За дато $\varepsilon > 0$ изаберимо δ тако да

$$|s| < \delta \Longrightarrow |a^s - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{r_0}}.$$

Тада за $|r - r_0| < \delta$ важи

$$a^{r_0}\left(1 - \frac{\varepsilon}{a^{r_0}}\right) < a^r = a^{r_0}a^{r-r_0} < a^{r_0}\left(1 + \frac{\varepsilon}{a^{r_0}}\right),$$

односно,

$$a^{r_0} - \varepsilon < a^r < a^{r_0} + \varepsilon,$$

чиме је доказано (б).

Сада треба дефинисати a^x за произвољан реалан број x.

Нека је $x \in \mathbb{R}$ и $a > 1$. Посматрајмо скупове $A = \{a^r | \ \mathbb{Q} \ni r < x\}$ и $B = \{a^r | \ \mathbb{Q} \ni r > x\}$. На основу својства (а) видимо да је скуп A ограничен одозго (произвољним елементом скупа B), а скуп B ограничен одоздо. Зато постоје коначни $s = \sup A$ и $i = \inf B$ и очигледно је $s \leq i$. Покажимо да је заправо $s = i$.
Заиста, за $r_1 < x < r_2$ је $a^{r_1} \leq s \leq i \leq a^{r_2}$, одакле следи

$$0 \leq i - s \leq a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) \leq s(a^{r_2 - r_1} - 1).$$

На основу својства (б), за произвољно $\varepsilon > 0$ може се наћи $\delta > 0$ тако да

$$0 < r_2 - r_1 < \delta \Longrightarrow a^{r_2 - r_1} - 1 < \frac{\varepsilon}{s}.$$

На тај начин, за такве $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ важи $0 \leq i - s < \varepsilon$. Како је $\varepsilon > 0$ произвољно, следи $s = i$.

Дефиниција 1.1. За $x \in \mathbb{R}$ и $a > 1$ дефинише се

$$a^x = s = i.$$

Функција $x \mapsto a^x$ зове се експоненцијална функција са основом a.

Овако уведена функција представља проширење функције $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$. Провериђемо сада да она задржава основна својства те функције, а и добија нека нова.

Теорема 1.2. *Нека је $a > 1$. Тада важи*

(1) $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{\mathbb{Q} \ni r \to x} a^r = a^x$;

(2) $x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;

(3) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2},\ (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$;

(4) $\lim\limits_{\mathbb{R} \ni x \to x_0} a^x = a^{x_0},\ x_0 \in \mathbb{R}$;

(5) $x \mapsto a^x$ *је функција из* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$.

Доказ. (1) На основу дефиниције, за дато $\varepsilon > 0$ могу се наћи $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, такви да је $r_1 < x < r_2$ и

$$s - \varepsilon < a^{r_1} \leq s = a^x = i \leq a^{r_2} < i + \varepsilon.$$

Како $r_1 < r < r_2$ повлачи $a^{r_1} < a^r < a^{r_2}$ за свако $r \in \mathbb{Q}$, важи

$$a^x - \varepsilon < a^r < a^x + \varepsilon$$

за све $r \in (r_1, r_2)$.

(2) Изаберимо $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ такве да је $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Из дефиниције и својстава функције a^r са рационалним r следи

$$a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}.$$

(3) Доказаћемо само прву релацију, друга се доказује слично. Нека су (r_n) и (q_n) произвољна два низа рационалних бројева који конвергирају ка x_1 и x_2, редом. Према (1) је $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = a^{x_2}$, одакле следи

$$a^{x_1}a^{x_2} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+q_n} = a^{x_1+x_2},$$

јер $\mathbb{Q} \ni r_n + q_n \to x_1 + x_2,\ n \to \infty$.

(4) Доказује се слично као и својство (б) које је доказано на почетку овог одељка.

(5) По дефиницији је $a^x > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Нека је y произвољан позитиван реалан број. Докажимо да постоји $x \in \mathbb{R}$, такав да је $a^x = y$.

Постоји $n \in \mathbb{N}$, такав да је $a^{-n} < y < a^n$. Дакле, скупови $A = \{x \in \mathbb{R} |\ a^x < y\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} |\ a^x > y\}$ су непразни. За све $x_1 \in A,\ x_2 \in B$, на основу (2), следи $x_1 < x_2$. Према томе, скупови A и B задовољавају услове аксиоме непрекидности реалних бројева, па тако постоји број $x \in \mathbb{R}$, такав да важи $x_1 \leq x \leq x_2$ за све $x_1 \in A,\ x_2 \in B$. Доказаћемо да је $a^x = y$.

Претпоставимо да је $a^x < y$. На основу (4) је $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x+\frac{1}{n}} = a^x$, па је за довољно велико n, $a^{x+\frac{1}{n}} < y$, тј. $x + \frac{1}{n} \in A$. То је контрадикција са избором броја x. Слично се искључује могућност да је $a^x > y$. Дакле, $a^x = y$.

$\square$

Ако је $0 < a < 1$, на сличан начин се долази до функције $x \mapsto a^x$ која има иста својства као и у случају $a > 1$, осим што се особина (2) из управо доказане теореме замењује са

(2') $x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

Функција $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ за $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ јесте бијекција (Теорема 1.2, својства (2) и (5)). Према томе, одређена је њена инверзна функција $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Дефиниција 1.3. Инверзна функција $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ функције $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, зове се логаритамска функција са основом a. Пишемо

$$x = \log_a y \iff y = a^x.$$

Дакле, по дефиницији је $\log_a a^x = x$ за све $x \in \mathbb{R}$ као и $a^{\log_a y} = y$ за све $y > 0$. Из Дефиниције 1.3 и Теореме 1.2 добијамо основна својства логаритамске функције.

Теорема 1.4. *Нека је* $a > 0$, $a \neq 1$, $y_0, y_1, y_2 > 0$. *Тада важи*
(1) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$*;*
(2) $\log_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$*;*
(3) за $a > 1$ *важи:* $y_1 < y_2 \iff \log_a y_1 < \log_a y_2$*;*
за $0 < a < 1$ *важи:* $y_1 < y_2 \iff \log_a y_1 > \log_a y_2$*;*
(4) функција $x \mapsto \log_a x$ *је пресликавање из* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$*;*
(5) $\lim\limits_{y \to y_0} \log_a y = \log_a y_0$.

Доказ. (5) На основу (2) важи $\log_a y - \log_a y_0 = \log_a (y/y_0)$. Према томе, видимо да су неједнакости $-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon$ еквивалентне са неједнакостима $\log_a a^{-\varepsilon} < \log_a (y/y_0) < \log_a a^{\varepsilon}$, односно са

$$y_0 a^{-\varepsilon} < y < y_0 a^{\varepsilon},\ a > 1$$

$$(y_0 a^{\varepsilon} < y < y_0 a^{-\varepsilon},\ 0 < a < 1).$$

У оба случаја добија се $\lim\limits_{y \to y_0} \log_a y = \log_a y_0$.

□

Уколико је $a = e$, уводи се посебна ознака $\ln = \log_e$.

Дефиниција 1.5. За $\alpha \in \mathbb{R}$, функција $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ дефинисана помоћу $f(x) = x^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$ назива се степеном функцијом са експонентом α (она не зависи од избора вредности $a > 0$, $a \neq 1$).

Основна својства степене функције лако следе из особина експоненцијалне и логаритамске функције.

Теорема 1.6. *Нека је* $x > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$. *Тада важи*
(1) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$*;*
(2) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$*;*
(3) за $\alpha > 0$ *функција* $x \mapsto x^\alpha$ *је строго растућа;*
за $\alpha < 0$ *функција* $x \mapsto x^\alpha$ *је строго опадајућа;*
(4) за $\alpha \neq 0$ *функција* $x \mapsto x^\alpha$ *пресликава* $(0, +\infty)$ *на* $(0, +\infty)$.

1.2 Дефиниција помоћу редова

Најпре се присетимо:

Теорема 1.7. *Ако редови* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *апсолутно конвергирају, онда и ред* $\sum_{m,n=0}^{\infty} z_m w_n$ *апсолутно конвергира и сума му је* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right)$*, независно од редоследа сабирања.*

Доказ. Означимо

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = Z_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} Z_n = Z,$$

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = W_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} W_n = W,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \tilde{Z}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| = \tilde{W}.$$

Уочимо произвољан ред

$$\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p} w_{j_p} = z_{i_1} w_{j_1} + z_{i_2} w_{j_2} + \cdots + z_{i_p} w_{j_p} + \cdots \tag{1.2}$$

чији су чланови елементи матрице

$$\begin{bmatrix} z_1w_1 & z_2w_1 & z_3w_1 & \cdots & z_iw_1 & \cdots \\ z_1w_2 & z_2w_2 & z_3w_2 & \cdots & z_iw_2 & \cdots \\ z_1w_3 & z_2w_3 & z_3w_3 & \cdots & z_iw_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ z_1w_j & z_2w_j & z_3w_j & \cdots & z_iw_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Овај ред апсолутно конвергира. Наиме, нека је

$$|z_{i_1} w_{j_1}| + |z_{i_2} w_{j_2}| + \cdots + |z_{i_p} w_{j_p}| = S_p$$

p-та парцијална сума реда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|z_{i_p}w_{j_p}|$. Означимо

$$n_0 = \max\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p\}.$$

Тада је

$$S_p \leq (|z_1| + |z_2| + \cdots |z_{n_0}|)(|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_{n_0}|) \leq \tilde{Z}\tilde{W}.$$

Дакле, парцијалне суме реда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|z_{i_p}w_{j_p}|$ су ограничене, па он конвергира. На основу тога следи да ред (1.2) апсолутно конвергира. Према томе, редослед сабирања елемената матрице (1.3) не утиче на збир добијеног реда. Да бисмо одредили тај збир, напишимо га у облику

$$z_1w_1 + (z_1w_2 + z_2w_2 + z_2w_1) + (z_1w_3 + z_2w_3 + z_3w_3 + z_3w_2 + z_3w_1) +$$

$$+ \cdots + (z_1w_n + z_2w_n + \cdots + z_nw_n + z_nw_{n-1} + \cdots + z_nw_1) + \cdots .$$

Парцијалне суме овог реда (рачунајући сваки израз у загради као један члан) можемо писати у облику

$$Z_1W_1,\ Z_2W_2,\ Z_3W_3,\ \ldots,\ Z_nW_n,\ \ldots .$$

Како је $\lim\limits_{n\to\infty} Z_nW_n = ZW$, то је и $\sum\limits_{p=1}^{\infty} z_{i_p}w_{j_p} = ZW$.

$\square$

Последица 1.8. *За степене редове* $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ *и* $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nz^n$*, унутар њихове заједничке области конвергенције важи*

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}.$$

Дефиниција 1.9. За свако $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.4}$$

Ред (1.4) апсолутно конвергира за свако $z \in \mathbb{C}$ и равномерно конвергира на сваком ограниченом подскупу у $\mathbb{C}$. Дакле, exp је непрекидна функција. На основу Теореме 1.7 видимо да за све $z, w \in \mathbb{C}$ важи

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w). \tag{1.5}$$

Означавамо

$$e^z = \exp(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Специјално, $e = \exp(1)$. Приметимо да је $e^0 = \exp(0) = 1$ на основу (1.4).

Теорема 1.10. *(1) За свако $z \in \mathbb{C}$ важи $e^z \neq 0$.*

(2) $\exp'(z) = \exp(z)$.

(3) Рестрикција функције exp *на* $\mathbb{R}$ *је монотоно растућа позитивна функција и важи*

$$e^x \to \infty,\ x \to \infty,$$

$$e^x \to 0,\ x \to -\infty.$$

(4) Постоји позитиван број π такав да је $e^{\pi i/2} = i$ и $e^z = 1$ ако и само ако $z/(2\pi i)$ је цео број.

(5) exp *је периодична функција са периодом $2\pi i$.*

(6) Пресликавање $t \mapsto e^{it}$ пресликава реалну осу на јединичну кружницу.

(7) Ако је $w \in \mathbb{C}$ и $w \neq 0$, тада постоји $z \in \mathbb{C}$ тако да је $w = e^z$.

Доказ. (1) На основу (1.5) је $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$.

(2) $\exp'(z) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\exp(z+h)-\exp(z)}{h} = \exp(z)\lim\limits_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(z)$, на основу (1.5) и (1.4).

(3) Следи из $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ и $\exp(x)\cdot\exp(-x) = 1$.

(4) За било које $t \in \mathbb{R}$, из (1.4) видимо да је $\overline{e^{it}} = e^{-it}$. Према томе је

$$|e^{it}|^2 = e^{it}\cdot\overline{e^{it}} = e^{it}\cdot e^{-it} = e^0 = 1,$$

или
$$|e^{it}| = 1 \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.6}$$
Другим речима, ако $t \in \mathbb{R}$, онда e^{it} припада јединичној кружници. Дефинишемо
$$\cos t = Re(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = Im(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.7}$$
Ојлерова формула
$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \tag{1.8}$$
је еквивалентна са (1.7). Видимо да важи
$$\cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$
Ред (1.4) даје
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots .$$
За $t = 2$ је $\cos 2 = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \cdots < -\frac{1}{3}$. Како је $\cos 0 = 1$ и $\cos$ је непрекидна реална функција на реалној оси, закључујемо да постоји најмањи позитиван број t_0 за који је $\cos t_0 = 0$. Дефинишемо
$$\pi = 2t_0. \tag{1.9}$$
На основу (1.6) и (1.8) следи $\sin t_0 = \pm 1$. Како је
$$\sin' t = \cos t > 0$$
на $(0, t_0)$ и како је $\sin 0 = 0$, видимо да је $\sin t_0 > 0$, па је $\sin t_0 = 1$. Према томе,
$$e^{\pi i/2} = i.$$
Сада следи $e^{\pi i} = i^2 = -1$, тј.
$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$
$e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$, па је тако $e^{2\pi i n} = 1$ за свако $n \in \mathbb{Z}$. Такође, (5) одмах следи:
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z. \tag{1.10}$$
Ако је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тада је $e^z = e^x e^{iy}$. Дакле, $|e^z| = e^x$. Ако је $e^z = 1$, тада мора бити $e^x = 1$, па је онда $x = 0$. Да бисмо доказали да $y/2\pi$ мора да буде цео број, довољно је да покажемо да $e^{iy} \neq 1$ ако $0 < y < 2\pi$, према (1.10).

Нека је $0 < y < 2\pi$ и

$$e^{iy/4} = u + iv, \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Како је $0 < y/4 < \pi/2$, видимо да је $u > 0$ и $v > 0$. Такође, из (1.11),

$$e^{iy} = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2). \tag{1.12}$$

Број на десној страни у (1.12) је реалан једино ако је $u^2 = v^2$. Како је $u^2+v^2 = 1$, ово ће се десити једино ако је $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$. Тада из (1.12) добијамо

$$e^{iy} = -1 \neq 1.$$

Овим је доказ (4) завршен.

(6) Већ смо видели да слике пресликавања $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it}$ припадају јединичној кружници. Нека је сада w такво да $|w| = 1$. Показаћемо да је $w = e^{it}$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Напишимо $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Претпоставимо прво да је $u \geq 0$ и $v \geq 0$. Како је $u \leq 1$, из дефиниције од π (1.9) видимо да постоји t, $0 \leq t \leq \pi/2$, такво да $\cos t = u$. Тада је $\sin^2 t = 1 - u^2 = v^2$. Како је $\sin t \geq 0$ ако $0 \leq t \leq \pi/2$, добијамо $\sin t = v$. Према томе, $w = e^{it}$.

Ако $u < 0$ и $v \geq 0$, применимо претходни случај за $-iw$ уместо w (сви услови су задовољени). Дакле, $-iw = e^{it}$ за неко $t \in \mathbb{R}$ и, према томе, $w = e^{i(t+\pi/2)}$.

Коначно, ако је $v < 0$, претходна два случаја показују да је $-w = e^{it}$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Дакле, $w = e^{i(t+\pi)}$. Овим је доказ (6) завршен.

(7) Ако $w \neq 0$, нека је $\alpha = w/|w|$. Тада је $w = |w|\alpha$. Према (3) постоји реалан број x такав да $|w| = e^x$. Како је $|\alpha| = 1$, на основу (6) видимо да је $\alpha = e^{iy}$ за неко $y \in \mathbb{R}$. Дакле, $w = e^{x+iy}$.

Доказ теореме је завршен.

□

1.3 Дефиниција помоћу интеграла

Посматрајмо функцију $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Она је непрекидна, дакле, интеграбилна на сваком сегменту садржаном у $(0, +\infty)$.

Дефиниција 1.11. Логаритамска функција $L : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ дефинише се као

$$L(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t},\ x \in (0, +\infty).$$

(1) Нека $x, y \in (0, +\infty)$. Из Дефиниције 1.11 следи да је $L'(x) = \dfrac{1}{x}$. Даље је

$$\frac{d}{dx}L(yx) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_1^{yx} \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{yx}\cdot y = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}L(x),$$

па је $L(yx) - L(x) = C = const$. Стављајући $x = 1$, добијамо да је $L(y) = C$, па следи да је

$$L(yx) = L(x) + L(y).$$

(2) Интеграли $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dt}{t}$ и $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ су дивергентни, па следи да је $\lim\limits_{x\to 0+} L(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$.

(3) Функција L је непрекидна, па из Коши-Болцанове теореме следи да је она НА $\mathbb{R}$.

(4) Дакле, постоји инверзна функција $L^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

Дефиниција 1.12. $e^y := L^{-1}(y)$ (при томе, $e := L^{-1}(1)$).

Из својства (1) одмах следи да је $e^{y_1+y_2} = e^{y_1}e^{y_2}$ за све $y_1.y_2 \in \mathbb{R}$.

(5) Сада се стандардно уводи и степена функција x^α и доказује да важи $L(x^\alpha) = \alpha L(x)$ за $x > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Заиста,

$$(L(x^\alpha))' = \left(\int\limits_1^{x^\alpha} \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x^\alpha}\cdot \alpha x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{x} = \alpha(L(x))',$$

па следи $L(x^\alpha) - \alpha L(x) = C$. За $x = 1$ се добија $C = 0$, па је $L(x^\alpha) = \alpha L(x)$.

1.4 Кошијева функционална једначина

Кошијева функционална једначина је једначина

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1.13}$$

Тражимо решења једначине (1.13) међу функцијама $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Став 1.13. *Нека функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовољава (1.13). Тада за сваки рационалан број $q \in \mathbb{Q}$ и свако $x \in \mathbb{R}$ важи*

$$f(qx) = qf(x). \tag{1.14}$$

Доказ. (1) За $n \in \mathbb{N}$ важи $f(nx) = nf(x)$. Ово доказујемо индукцијом. За $n = 1$ јасно важи. Индукцијски корак изгледа овако:

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

(2) Ако уврстимо $x = y = 0$ у (1.13), добијамо $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, одакле је $f(0) = 0$, па (1.14) важи за $q = 0$.

(3) Ако у (1.13) ставимо $y = -x$, имамо $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, одакле је $f(-x) = -f(x)$. Нека је n негативан цео број. Тада $-n \in \mathbb{N}$, па је

$$f(nx) = f(-(-n)x) = -f((-n)x) = -(-n)f(x) = nf(x),$$

одакле видимо да (1.14) важи и за $q \in \mathbb{Z}$.

(4) Нека је $q = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$f(qx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{1}{n}nf\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{m}{n}f(x) = qf(x).$$

□

Став 1.14. *Нека функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовољава (1.13). Тада су следећи услови међусобно еквивалентни:*
(1) Функција f је непрекидна;
(2) $f(x) = Cx$ за неко $C \in \mathbb{R}$;
(3) Функција f је непрекидна у нули;
(4) Функција f је непрекидна у некој тачки x_0.

Доказ. Непосредно се проверава да из (2) следи (1), (3), (4).
Очигледно из (1) следи (3), (4).
Покажимо да из (3) следи (1), (4). Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада је

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f((x-x_0)+x_0) = \lim_{x\to x_0} (f(x-x_0)+f(x_0)) = f(0)+f(x_0) = f(x_0).$$

Из (4) следи (3) јер

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f((x+x_0)-x_0) = \lim_{x\to 0}(f(x+x_0)-f(x_0)) = f(x_0)-f(x_0) = 0.$$

Покажимо још да из (1) следи (2). Нека је $x \in \mathbb{R}$. Тада постоји низ рационалних бројева $q_n \to x$ па, на основу Става 1.13, важи

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n f(1) = f(1)x = Cx,$$

где је $C = f(1)$. $\square$

За дато $a > 0,\ a \neq 1$, одредимо све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ за које важи:
(1) $f(1) = a$;
(2) $f(x+y) = f(x)f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Нека непрекидна функција $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ задовољава услове (1) и (2). Тада је $g(x) = \ln f(x)$ непрекидна функција за коју важи

$$g(x+y) = g(x) + g(y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

На основу Става 1.14, мора бити $g(x) = Cx,\ x \in \mathbb{R}$, за $C = \ln a$. Према томе, $f(x) = e^{g(x)} = a^x,\ x \in \mathbb{R}$.

2 Тригонометријске функције

2.1 Дефиниција помоћу редова

У (1.7) су помоћу експоненцијалне функције (дакле, помоћу редова) дефинисане функције синус и косинус за случај реалног аргумента. Овде ћемо ту дефиницију пренети и на случај комплексног аргумента.

Дефиниција 2.1. За $z \in \mathbb{C}$ дефинише се

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

<u>Својства</u>

(1) Функције cos и sin су периодичне са периодом $T = 2\pi$.

Ово добијамо из

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z,$$

где користимо да је период експоненцијалне функције $2\pi i$ (Теорема 1.10 (5)).

(2) Функције cos и sin су неограничене на $\mathbb{C}$.

За $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ је $|\cos z| = \dfrac{|e^{-y} + e^{y}|}{2} \to \infty$ кад $y \to \pm\infty$.

(3) $(\cos z)' = i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z,$

$(\sin z)' = i\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos z.$

(4) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

$\sin^2 z + \cos^2 z = \dfrac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \dfrac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1.$

Специјално, за $x \in \mathbb{R}$ је $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, одакле видимо да су sin и cos ограничене функције на $\mathbb{R}$.

(5) Важе адиционе формуле.

На основу (1.5), за $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.

Сада је

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} e^{iz_2} = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) =$$

$$= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \qquad (2.1)$$

Ако искористимо да је $\cos z$ парна, а $\sin z$ непарна функција, добијамо још једну једнакост

$$e^{-i(z_1+z_2)} = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{2.2}$$

Према (2.1) и (2.2) видимо да је

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

<u>Корен комплексног броја</u>

$$z^n = \omega = |\omega| e^{i\alpha} \Longleftrightarrow z = z_k = \sqrt[n]{|\omega|} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Одговарајуће тачке у равни су темена правилног n-тоугла уписаног у круг полупречника $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Дефиниција 2.2. За $z \in \mathbb{C}$ дефинише се

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

<u>Својства</u>

(1) Функције ch и sh су периодичне са периодом $T = 2\pi i$.

(2) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

(3) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.
Специјално, $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$ је параметризација хиперболе $x^2 - y^2 = 1$.

(4) $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$,
$\operatorname{sh}(z_1+z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$,
$\operatorname{ch}(2z) = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, \ \dots$

(5) $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$,
$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$.
Специјално,

$$\sin(iy) = i \operatorname{sh} y, \ \cos(iy) = \operatorname{ch} y,$$

тј.

$$\operatorname{sh} y = -i \sin(iy), \ \operatorname{ch} y = \cos(iy).$$

(6) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$,
$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$.

2.2 Дефиниција помоћу функционалних једначина

Теорема 2.3. *Постоји јединствени пар функција (S, C), дефинисаних на $\mathbb{R}$, таквих да важи:*
(1) За $x, y \in \mathbb{R}$ је

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y),$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y).$$

(2) За $x \in \mathbb{R}$ је

$$S^2(x) + C^2(x) = 1.$$

(3)

$$S(0) = 0, \quad C(0) = 1, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

(4) За $0 < x < \frac{\pi}{2}$ испуњено је

$$0 < S(x) < x.$$

Доказ. Јединственост.
Јединственост ће следити ако докажемо:
(а) S и C су непрекидне на $\mathbb{R}$;
(б) S и C су јединствено одређене на неком густом скупу у $\mathbb{R}$.

(а) Стављајући $y = -x$ у (1) и користећи (3), добија се

$$0 = S(0) = S(x)C(-x) + C(x)S(-x),$$

$$1 = C(0) = C(x)C(-x) - S(x)S(-x).$$

Множењем прве једнакости са $S(x)$, а друге са $C(x)$ и сабирањем добијених релација, следи $C(-x)(S^2(x)+C^2(x)) = C(x)$, па се, ако се искористи услов (2), добија $C(-x) = C(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$. Дакле, функција C је парна. Слично се добија да је S непарна функција.

Непрекидност функције S у нули с десне стране следи из (4). Због непарности, то важи и са леве стране.

Из (1) и непарности функције S добија се:

$$S(y) = S\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{y-x}{2}\right) + C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{y-x}{2}\right),$$

$$S(x) = S\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right) - C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Одузимањем и коришћењем парности функције C, следи

$$S(y) - S(x) = 2S\left(\frac{y-x}{2}\right)C\left(\frac{y+x}{2}\right). \tag{2.3}$$

Ако је (x_n) произвољан низ који тежи x, стављајући $y = x_n$ у (2.3), следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) = S(x)$ због ограничености функције C и $S(0) = 0$. На тај начин је доказана непрекидност функције S у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$. Слично се доказује за функцију C.

(б) Стављајући $y = x + 2\pi$ у (2.3), добија се $S(x+2\pi) - S(x) = 2C(x+\pi)S(\pi)$. Применом (1) и (3) видимо да је $S(\pi) = S\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, па је и $S(x+2\pi) - S(x) = 0$. Дакле, S је 2π-периодична функција. Слично се доказује и за функцију C. Због тога, даља извођења је довољно урадити на интервалу $[0, 2\pi]$.

Из (3) и (4) следи да је $S(x) \geq 0$ за $x \in [0, \pi/2]$, при чему је $S(x) = 0$ само за $x = 0$. Из (1) и непарности функције S следи да је

$$S(\pi - x) = S(\pi)C(-x) - C(\pi)S(x),$$

па због $S(\pi) = 0$ и $C(\pi) = -1$ (што се лако може извести) добијамо да је $S(\pi - x) = S(x)$. То значи да је $S(x) \geq 0$ и за $x \in [\pi/2, \pi]$ и при томе је $S(x) = 0$ само за $x = 0$ или $x = \pi$.
Сличним разматрањима се добија да је $S(x) < 0$ за $x \in (\pi, 2\pi)$. Одговарајућа тврђења се изводе и за функцију C.

Из (1) се изводи да је

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2}, \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2}. \tag{2.4}$$

Замењујући $x = y + z$, претходне једнакости постају

$$S^2\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{1 - C(y)C(z) + S(y)S(z)}{2},$$

$$C^2\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{1 + C(y)C(z) - S(y)S(z)}{2}.$$

Дакле, ако су одређене вредности функција S и C у тачкама y и z, онда се знају вредности у тачки $\dfrac{y+z}{2}$ (јер су према претходним извођењима познати и њихови знаци). Одатле следи да су једнозначно одређене вредности ових функција у свим тачкама облика $\dfrac{p\pi}{2^n}$, за $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \leq 2^{n+1}$. Ове тачке су густе у интервалу $[0, 2\pi)$.

<u>Егзистенција (скица).</u>
Полазећи од познатих вредности $S(\pi/2)$ и $C(\pi/2)$, користећи релације

$$S\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - C(x)}{2}}, \quad C\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + C(x)}{2}},$$

одређују се вредности ових функција у тачкама $\dfrac{\pi}{2^n}$. Затим, ако је $p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$, $a_i \in \{0, 1\}$, онда је $\dfrac{p\pi}{2^n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \pi}{2^i}$, па се помоћу (1) одређују вредности у тим тачкама. Даље се продужава „по непрекидности”. $\square$

2.3 Инверзне тригонометријске функције

Нека је $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ дата изразом $f(x) = \sin x$. Та функција је бијекција, па има инверзну функцију $g : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Вредност функције g у некој тачки $y \in [-1,1]$ означавамо са $\arcsin y$, тј. важи

$$y = \sin x \Longleftrightarrow x = \arcsin y. \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ y \in [-1,1].$$

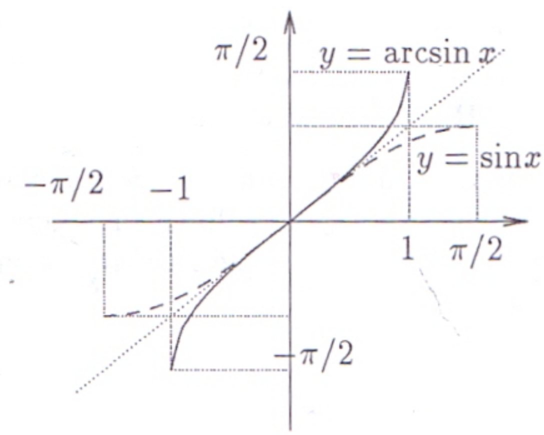
На други начин то можемо написати и овако:

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \tag{2.5}$$

$$\sin(\arcsin y) = y, \quad -1 \leq y \leq 1. \tag{2.6}$$

Нагласимо да су услови наведени у једнакостима (2.5) и (2.6) битни. Наиме, ако не би важило $-1 \leq y \leq 1$, лева страна једнакости (2.6) не би уопште имала смисла (док десна би). Ако не би било $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, обе стране једнакости (2.5) би имале смисла, али једнакост не би била испуњена. На пример, за $x = \pi$ је $\sin \pi = 0$ и $\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi$.

Да бисмо конструисали график новодобијене функције arcsin, посматрајмо функцију $y = \arcsin x$ за $x \in [-1,1]$. Закључујемо да је она строго растућа, а узимајући у обзир познати график синусне функције, добијамо њен график на слици:



Такође се лако изводе закључци (јасни са графика) о нули и знаку функције $y = \arcsin x$, као и о њеној непарности.

Пример 2.4.

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \\ \\ (2k+1)\pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$. Специјално, $\arcsin(\sin x)$ је $2\pi-$периодична функција.

Сличан поступак се може спровести за функцију $y = \cos x$. Њу треба посматрати као функцију са доменом $[0, \pi]$ и кодоменом $[-1, 1]$. Одговарајућа инверзна функција arccos ће пресликавати $[-1, 1]$ на $[0, \pi]$, тј. важиће

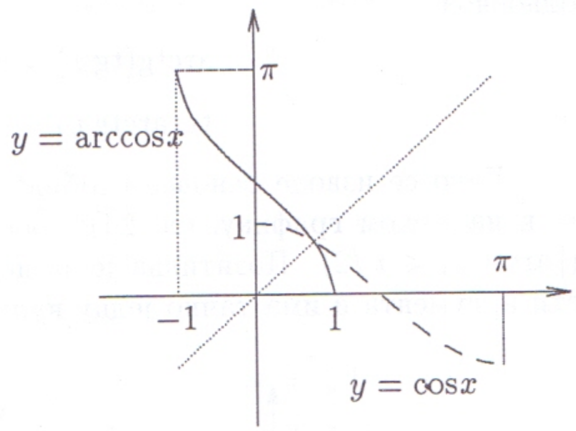
$$y = \cos x \Longleftrightarrow x = \arccos y, \quad x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1],$$

односно

$$\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$\cos(\arccos y) = y, \quad -1 \le y \le 1.$$

График ове функције дат је на слици:



Пример 2.5.

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \\ \\ 2k\pi - x, & x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$. На пример, $\arccos(\cos 6) = 2\pi - 6$, $\arccos(\cos 7) = 7 - 2\pi$.

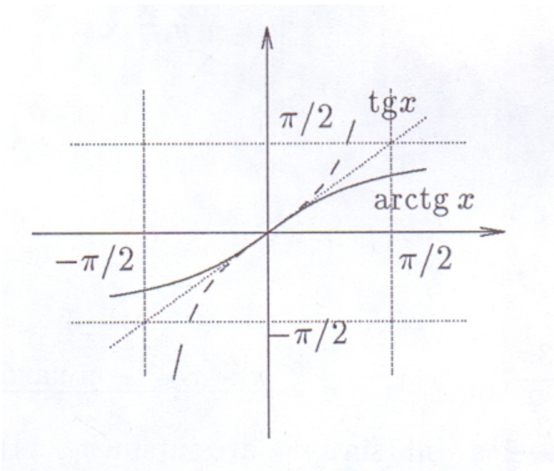
Посматрајмо сада функцију $f(x) = \operatorname{tg} x$. За њу је погодно изабрати домен $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а кодомен $\mathbb{R}$. Користећи позната својства тангенса, закључујемо да тако добијамо бијективну функцију $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, чију инверзну функцију означимо са arctg. Дакле, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и важи

$$y = \operatorname{tg} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{arctg} y, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbb{R},$$

односно

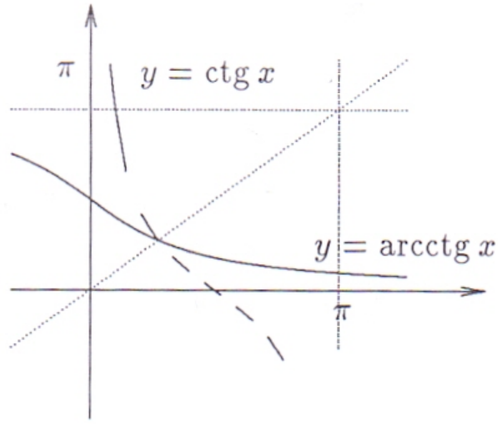
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

График ове функције дат је на слици:



Лако се изводе основне особине функције $y = \operatorname{arctg} x$ (оне се илуструју и на њеном графику): она је непарна, строго растућа и ограничена ($|\operatorname{arctg} x| < \pi/2$). Позитивна је за позитивне, а негативна за негативне вредности аргумента и има тачно једну нулу - тачку $x = 0$.

На сличан начин се уводи функција $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, као инверзна функцији $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$. График те функције дат је на слици:



У следећој табели су дати изрази за функције облика

$$f(g^{-1}),\ \ f,g \in \{\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}\}$$

(подразумева се да се користе стандардне рестрикције ових функција).

	arcsin	arccos	arctg	arcctg
sin	$x, x \in [-1,1]$	$\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbf{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbf{R}$
cos	$\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$	$x, x \in [-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbf{R}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbf{R}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1,1] \setminus \{0\}$	$x, x \in \mathbf{R}$	$\frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1,1] \setminus \{0\}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$	$\frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$x, x \in \mathbf{R}$

2.4 Инверзне хиперболичке функције

Функција $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је бијекција, па има своју инверзну функцију $\operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која се назива ареа синус хиперболички и означава са arsh. Њој одговара елементарни израз који је лако одредити. Наиме, решавајући једначину

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

добијамо $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Како је $e^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, долази у обзир само знак $+$, па је

$$x = \operatorname{arsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Функција $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, јасно, није бијекција. Могу се разматрати следеће две њене бијективне рестрикције:

$$\mathrm{ch}_1 : [0, +\infty) \to [1, +\infty), \qquad \mathrm{ch}_2 : (-\infty, 0] \to [1, +\infty).$$

Њихове инверзне функције зваћемо (први и други) ареа косинус хиперболички (ако се не нагласи о којем се ради, подразумеваћемо да је у питању први од њих) и означавати са arch_1, односно arch_2. Дакле, важи

$$x = \mathrm{arch}_1 y \Longleftrightarrow y = \mathrm{ch} x, \qquad x \in [0, +\infty), \quad y \in [1, +\infty),$$

односно,

$$x = \mathrm{arch}_2 y \Longleftrightarrow y = \mathrm{ch} x, \qquad x \in (-\infty, 0], \quad y \in [1, +\infty).$$

Елементарне изразе добијамо решавањем једначине

$$y = \mathrm{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

па је

$$\mathrm{arch}_1 y = y + \sqrt{y^2-1}, \quad \mathrm{arch}_2 y = y - \sqrt{y^2-1}, \quad y \geq 1.$$

Изводи наведених функција се лако одређују, или помоћу њихових елементарних израза, или помоћу општег правила диференцирања инверзне функције. Тако се добија да је

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$(\mathrm{arch}_{1,2} x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1.$$

Ово се често користи приликом налажења неодређених интеграла.

Термини „хиперболички” и „ареа” (површина) код посматраних функција имају разлог у следећем.

Посматрајмо хиперболу $x^2 - y^2 = 1$ у равни xOy и на њој тачке $M(x, y)$ и

$M'(x,-y)$ $(x>1)$. Површина криволинијског троугла MOM' износи

$$t = 2\left(\frac{1}{2}xy - \int_1^x \sqrt{t^2-1}dt\right) = x\sqrt{x^2-1} - 2\int\limits_0^{\operatorname{arch} x} \operatorname{sh}^2 u\, du =$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \int\limits_0^{\operatorname{arch} x} (\operatorname{ch} 2u - 1)du = x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2u \,\Big|_0^{\operatorname{arch} x} + \operatorname{arch} x =$$

$$= \operatorname{arch} x.$$

Одатле следи да дата хипербола има параметарско представљање

$$x = \pm\operatorname{ch} t, \quad y = \pm\operatorname{sh} t, \quad t \geq 0.$$

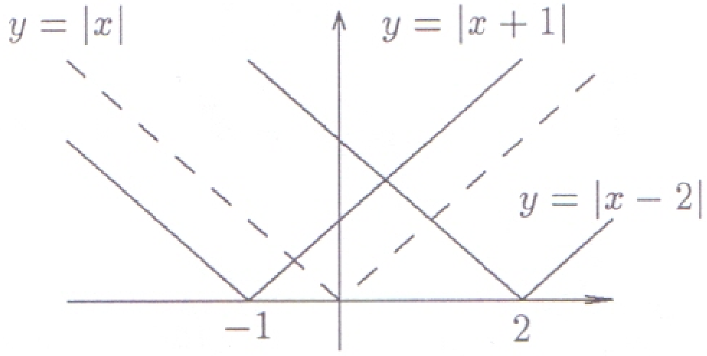
3 Графици елементарних функција

У неким једноставнијим случајевима, график елементарне функције се може конструисати користећи познате графике основних елементарних функција, узимајући у обзир која се дејства над њима врше.

(1) $y = f(x+c)$.

Претпоставимо да је познат график функције $y = f(x)$ и да је c дати реалан број. Непосредно се проверава да тачка (x_0, y_0) припада графику функције $y = f(x)$ ако и само ако тачка $(x_0 - c, y_0)$ припада графику функције $y = f(x+c)$. На тај начин, тражени график се добија из познатог транслацијом дуж осе x за број $-c$ (дакле, улево ако је c позитивно и удесно ако је c негативно).

Пример 3.1. Графици функција $y = |x+1|$ и $y = |x-2|$, добијени из графика функције $y = |x|$ транслацијом за -1, односно 2, приказани су на слици:

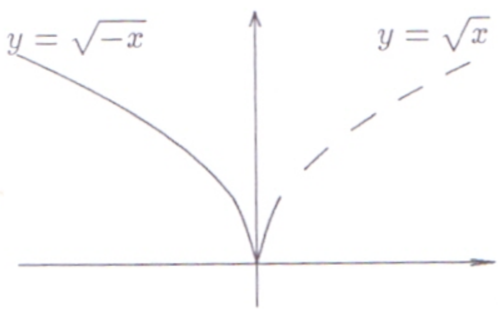


(2) $y = f(ax)$.

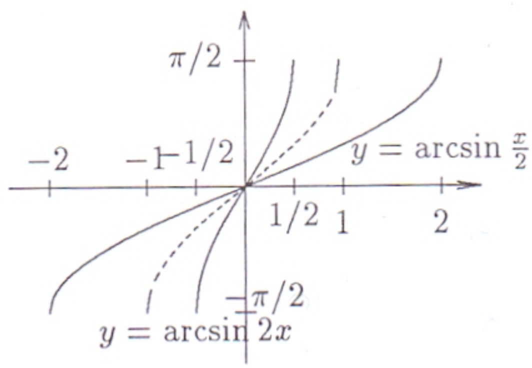
Нека је $a \neq 0$ реалан број. Ако тачка (x_0, y_0) припада графику функције $y = f(x)$, онда тачка $\left(\dfrac{x_0}{a}, y_0\right)$ припада графику функције $y = f(ax)$ и обратно. Дакле, график функције $y = f(ax)$ се добија из графика функције $y = f(x)$ заменом сваке тачке (x_0, y_0) тачком $\left(\dfrac{x_0}{a}, y_0\right)$. Та замена означава:

- контракцију (сажимање) дуж x-осе a пута, ако је $a > 1$;
- дилатацију (растезање) дуж x-осе $\dfrac{1}{a}$ пута, ако је $0 < a < 1$;
- симетрију у односу на y-осу, ако је $a = -1$;
- симетрију у односу на y-осу, комбиновану са контракцијом $|a|$ пута, ако је $a < -1$;
- симетрију у односу на y-осу, комбиновану са дилатацијом $\dfrac{1}{|a|}$ пута, ако је $-1 < a < 0$.

Пример 3.2. График функције $y = \sqrt{-x}$ добија се симетријом у односу на y-осу графика функције $y = \sqrt{x}$.



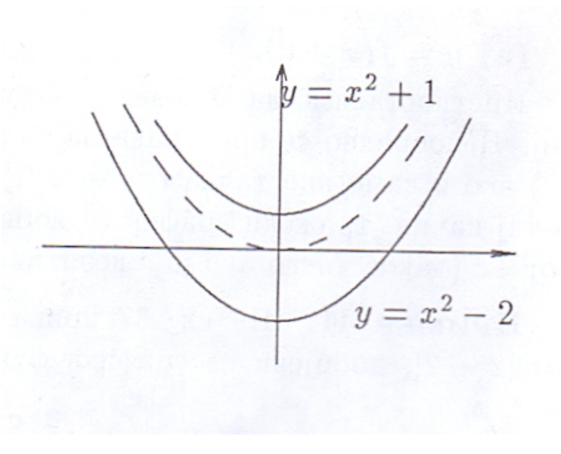
Пример 3.3. Графици функција $y = \arcsin 2x$ и $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$, добијени из графика функције $y = \arcsin x$ контракцијом, односно дилатацијом, приказани су на слици:



(3) $y = f(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

График ове функције добија се из графика функције $y = f(x)$ транслацијом за број C дуж y-осе.

Пример 3.4. Графици функција $f(x) = x^2 + 1$ и $f(x) = x^2 - 2$, добијени транслацијом дуж y-осе за 1, односно -2, параболе $y = x^2$ дати су на слици:



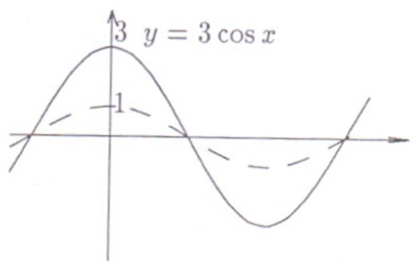
(4) $y = Af(x),\ A \neq 0$.

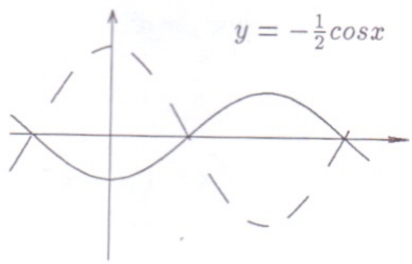
График ове функције добија се из графика функције $y = f(x)$ заменом сваке од тачака (x_0, y_0) тачком (x_0, Ay_0). Та замена, аналогно случају (2), означава:

- дилатацију дуж y-осе A пута, ако је $A > 1$;

- контракцију дуж y-осе $\dfrac{1}{A}$ пута, ако је $0 < A < 1$;
- симетрију у односу на x-осу, ако је $A = -1$;
- симетрију у односу на x-осу, комбиновану са дилатацијом $|A|$ пута, ако је $A < -1$;
- симетрију у односу на x-осу, комбиновану са контракцијом $\dfrac{1}{|A|}$ пута, ако је $-1 < A < 0$.

Пример 3.5. Из графика функције $y = \cos x$ добијени су графици функција $y = 3\cos x$ и $y = -\dfrac{1}{2}\cos x$.

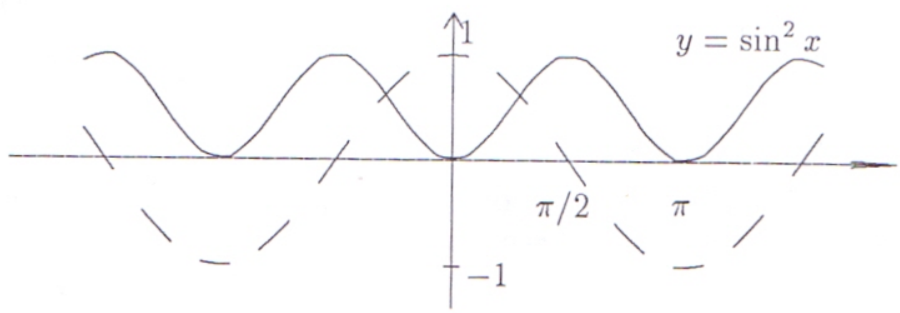




(5) Комбинацијом поступака описаних од (1) до (4) могу се добити графици функција облика $y = Af(ax + b) + B$ $(a, b, A, B \in \mathbb{R};\ a, A \neq 0)$.

Пример 3.6. Скицирати график функције $f(x) = \sin^2 x$.

Важи $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. Зато тражени график добијамо из графика функције $y = \cos x$ контракцијом 2 пута дуж x-осе, симетријом у односу на x-осу, контракцијом 2 пута дуж y-осе и транслацијом дуж y-осе за $\dfrac{1}{2}$.



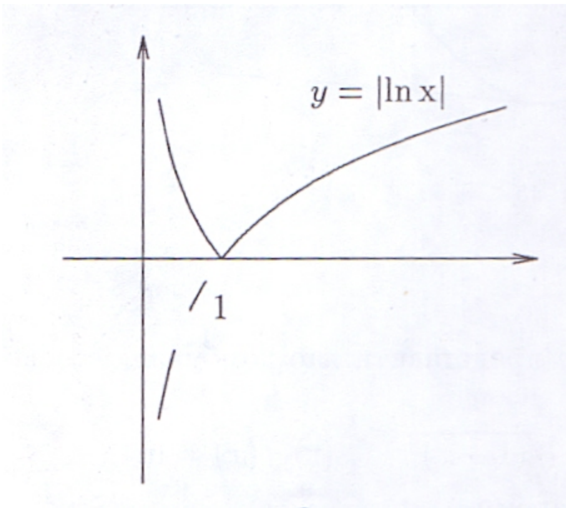
(6) $y = |f(x)|$.

Како је

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ \\ -f(x), & f(x) < 0, \end{cases}$$

график функције $y = |f(x)|$ добија се на тај начин што се део графика функције $y = f(x)$ који је испод x-осе (има негативне ординате) преслика симетрично у односу на ту осу.

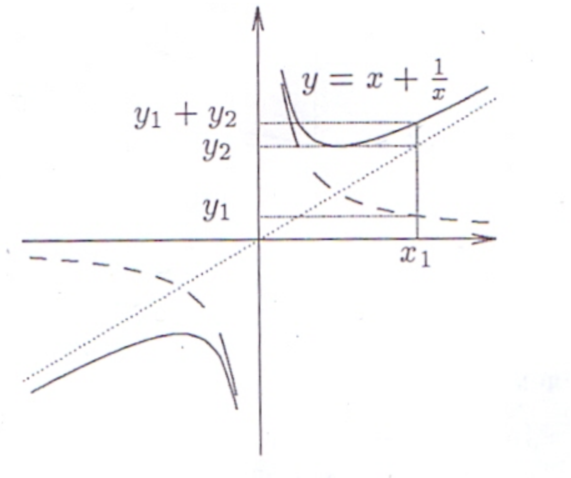
Пример 3.7. График функције $y = |\ln x|$ дат је на слици:



(7) $y = f_1(x) + f_2(x)$.

Претпоставимо да су познати графици функција $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Да бисмо конструисали график функције $y = f_1(x) + f_2(x)$, треба најпре одредити њен домен - он је очигледно једнак пресеку домена функција f_1 и f_2. Затим, за сваку тачку x_0 из тог домена треба одредити тачку $(x_0, y_1 + y_2)$, где је $y_1 = f_1(x_0)$, $y_2 = f_2(x_0)$. Скуп тако добијених тачака биће тражени график. Описани поступак називамо суперпозицијом графика $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

Пример 3.8. График функције $y = x + \dfrac{1}{x}$ добијамо суперпозицијом графика функција $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$. Приметимо да је за позитивно x нови график изнад графика $y = \dfrac{1}{x}$, а за негативно x испод њега.



(8) $y = f_1(x)f_2(x)$.

Поступак конструкције графика ове функције није једноставан у општем случају. Размотрићемо само један једноставан пример.

Пример 3.9. Скицирати део графика функције $y = e^{-x}\sin x$ за $x \geq 0$.

Како је $e^{-x} > 0$ и $|\sin x| \leq 1$, имамо да је $|e^{-x}\sin x| \leq e^{-x}$ за свако x. На тај начин, график наше функције се налази између графика функција $y = e^{-x}$ и $y = -e^{-x}$. Дата функција није периодична, али њен график донекле подсећа на синусоиду (на пример, има нуле у истим тачкама као и функција $y = \sin x$), само што јој се „амплитуда” смањује кад аргумент расте.