Предавања, прекинута увођењем ванредног стања, настављамо овим путем. Овај документ ће се надограђивати...

1 Степени редови. Аналитичке функције

Дефиниција 1.1. Функционални ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{1.1}$$

где $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$, назива се степени ред. Парцијалне суме степеног реда су полиноми степена n.

Дефиниција 1.2. Број $R > 0$ зове се полупречник (или радијус) конвергенције степеног реда (1.1) ако за свако x, $|x - x_0| < R$, ред (1.1) апсолутно конвергира, а за свако x, $|x - x_0| > R$, ред дивергира.

Ако ред конвергира само за $x = x_0$, сматрамо да је $R = 0$, а ако конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$, онда је $R = \infty$.

Теорема 1.3. *Ако степени ред (1.1) конвергира за $x = x_1$, $x_1 \neq x_0$, онда он апсолутно конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$ за које важи $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.*

Доказ. Како ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$ конвергира, постоји $M \geq 0$ тако да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$|a_n (x_1 - x_0)^n| \leq M.$$

Нека је x такво да $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Тада важи

$$|a_n (x - x_0)^n| = \left| a_n (x_1 - x_0)^n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \right| \leq M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n = M q^n,$$

где је $q = |\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}| < 1$, па ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ конвергира. Из конвергенције реда $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ следи конвергенција реда (1.1). □

Теорема 1.4. *(Коши-Адамар)*
Полупречник конвергенције степеног реда (1.1) је

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

при чему подразумевамо да је $R = 0$ ако је $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ и да је $R = \infty$ ако је $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Доказ. 1) Нека је $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$. За $x\neq x_0$ важи $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=\infty$, па постоји подниз (n_k) такав да $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}(x-x_0)^{n_k}|}\to\infty$ кад $k\to\infty$. Према томе, ред (1.1) дивергира јер његов општи члан не тежи нули.

2) Нека је $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$. Тада је $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=0$ за свако $x\in\mathbb{R}$ па ред конвергира за свако $x\in\mathbb{R}$.

3) Нека је $0<R<\infty$. За $\varepsilon>0$ постоји $n_0\in\mathbb{N}$ тако да је $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{R}+\varepsilon$ за све $n\geq n_0$. Према томе је

$$|a_n(x-x_0)^n|\leq\left(\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|x-x_0|\right)^n,\ n\geq n_0,\ x\in\mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Ако је $|x-x_0|<R$, можемо изабрати ε тако да је $\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|x-x_0|=q<1$. Из (1.2) и поредбеног критеријума следи да ред (1.1) конвергира.
Ако је $|x-x_0|>R$, изаберимо $\varepsilon>0$ тако да $\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|x-x_0|=q>1$. Нека је (a_{n_k}) подниз низа (a_n) такав да је $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{1}{R}-\varepsilon$, за свако $k\in\mathbb{N}$. Тада је $|a_{n_k}(x-x_0)^{n_k}|>(\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|x-x_0|)^{n_k}=q^{n_k}>1$, одакле следи да општи члан реда не тежи нули.

□

Последица 1.5. *За полупречник конвергенције степеног реда R важи*

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}},\ \textit{односно}\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

ако ти лимеси постоје.

Пример 1.6. 1) Редови $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ имају полупречнике конвергенције $R=\infty$ и $R=0$, редом.

2) Редови $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n}$ имају радијус конвергенције $R=1$, што значи да конвергирају апсолутно на $(-1,1)$. После испитивања конвергенције у крајевима интервала, видимо да су скупови на којима ови редови конвергирају $(-1,1)$, $[-1,1)$, $[-1,1]$ и $(-1,1]$, редом.

Пре него што почнемо да говоримо о особинама суме степеног реда, подсетимо се неких тврђења са претходних часова која ћемо користити у наставку.

Став 1.7. *Функционални низ* (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}$, *конвергира униформно на скупу* $E \subset X$ *ако и само ако важи*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in E)(\forall m)(\forall n)(m, n \geq n_0 \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon).$$

Став 1.8. *Нека је* $A \subset \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$ *и* $t_0 \in T'$. *Фамилија* $\{f_t : \ A \to \mathbb{R}| \ t \in T\}$ *равномерно конвергира на* A, *кад* $t \to t_0$, *ако и само ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји околина* $U(t_0)$ *тачке* t_0 *у* T, *таква да за сваке две вредности* $t_1, t_2 \in U(t_0)$ *и за свако* $x \in A$ *важи* $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$.

Став 1.9. *(Размена лимеса)*
Нека је $\{f_t : A \to \mathbb{R}\}$, $A \subset \mathbb{R}$, *фамилија функција која зависи од параметра* t, $t \in T \subset \mathbb{R}$, *нека* $t_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cap T'$ *и нека* $a \in \overline{\mathbb{R}} \cap A'$. *Ако*
(1) $f_t \rightrightarrows f$, $T \ni t \to t_0$, *на* A,
(2) за свако $t \in T$ *постоји* $\lim\limits_{x \to a} f_t(x)$,
тада постоје $\lim\limits_{x \to a}(\lim\limits_{t \to t_0} f_t(x))$ *и* $\lim\limits_{t \to t_0}(\lim\limits_{x \to a} f_t(x))$ *и важи једнакост*

$$\lim_{x \to a}(\lim_{t \to t_0} f_t(x)) = \lim_{t \to t_0}(\lim_{x \to a} f_t(x)).$$

Став 1.10. *Нека је* $\{f_t : E \to \mathbb{R}\}$, $E \subset \mathbb{R}$, *фамилија непрекидних функција која зависи од параметра* $t \in T \subset \mathbb{R}$ *и нека је* $t_o \in T'$. *Ако* $f_t \rightrightarrows f$ *на* E, *кад* $t \to t_0$, *тада је функција* f *непрекидна на* E.
Специјално, ако је $f_n : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, *низ непрекидних функција који равномерно конвергира на скупу* E *функцији* $f : E \to \mathbb{R}$, *тада је функција* f *непрекидна на скупу* E.

Став 1.11. *(Дини)*
Нека је $f_n : K \to \mathbb{R}$ *монотон низ непрекидних функција на компактном скупу* $K \subset \mathbb{R}$. *Ако низ* $\{f_n\}$ *конвергира на* K *непрекидној функцији* f, *тада* $f_n \rightrightarrows f$, *кад* $n \to \infty$, *на* K.

Став 1.12. *Нека су* $f_t : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интеграбилне функције за свако* $t \in T \subset \mathbb{R}$ *и нека* $t_0 \in T' \cap \overline{\mathbb{R}}$. *Ако* $f_t \rightrightarrows f$, $t \to t_0$ *на* $[a, b]$, *тада је* f *интеграбилна функција на* $[a, b]$ *и важи*

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b f_t(x)dx = \int_a^b (\lim_{t \to t_0} f_t(x))dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Став 1.13. *Ако ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *интеграбилних функција на* $[a, b]$, *равномерно* *конвергира на $[a,b]$, онда је његова сума интеграбилна функција на $[a,b]$ и важи*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

У том случају кажемо да се ред може интегралити члан по члан.

Став 1.14. *Нека су $f_t : [a,b] \to \mathbb{R}$ диференцијабилне функције за $t \in T \subset \mathbb{R}$ и нека је $t_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cap T'$. Ако*
(1) фамилија $\{f_t |\ t \in T\}$ конвергира за неко $x_0 \in [a,b]$, кад $t \to t_0$,
(2) фамилија изводних функција $\{f'_t |\ t \in T\}$ конвергира равномерно на $[a,b]$ кад $t \to t_0$,
онда
(а) фамилија $\{f_t |\ t \in T\}$ такође равномерно конвергира на $[a,b]$ некој функцији $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,
(б) важи $f'(x) = \lim\limits_{t \to t_0} f'_t(x),\ x \in [a,b]$.

Став 1.15. *Нека је (f_n), $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, низ диференцијабилних функција на $[a,b]$. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно конвергира на $[a,b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 \in [a,b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a,b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x),\ x \in [a,b].$$

У том случају кажемо да се ред може диференцирати члан по члан.

1.1 Особине суме степеног реда

Претпостављамо да за степени ред (1.1) важи $R > 0$.

Став 1.16. *Степени ред (1.1) конвергира равномерно на сваком интервалу $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.*

Доказ. За $r = \max\{|a - x_0|, |b - x_0|\}$ важи $[a,b] \subset [x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$. За свако $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ је $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n$, па како ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ конвергира, ред (1.1) равномерно конвергира на сегменту $[x_0 - r, x_0 + r]$ (Вајерштрасов критеријум).

□

Последица 1.17. *Сума степеног реда (1.1) је непрекидна функција на интервалу $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

Теорема 1.18. *(Абелова теорема)*
Ако ред (1.1) конвергира за $x = x_0 + R$, онда он равномерно конвергира на сегменту $[x_0, x_0 + R]$ и његова сума је непрекидна (с лева) у тачки $x = x_0 + R$, тј. важи

$$\lim_{x \to x_o + R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

.

Доказ. Општи члан реда је

$$a_n (x - x_0)^n = a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^n.$$

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ конвергира по претпоставци и низ $\left(\left(\frac{x-x_0}{R} \right)^n \right)$ је за $x \in [x_0, x_0 + R]$ нерастући и ограничен па, према Абеловом критеријуму, ред (1.1) равномерно конвергира на $[x_0, x_0 + R]$.

□

Теорема 1.19. *Степени ред (1.1) ($R > 0$) се унутар свог инервала конвергенције може диференцирати и интегралити члан по члан. Тако добијени редови имају исти полупречник конвергенције као и полазни ред.*

Доказ. Нека је $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. На сегменту са крајевима x и x_0 ред конвергира равномерно (Став 1.16) па, како су чланови реда непрекидне функције, ред се може интегралити члан по члан (Став 1.13). Важи

$$\int_{x_0}^{x} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

и добијени ред има исти полупречник конвергенције као и ред (1.1).
Ред $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ има исти радијус конвергенције као и ред (1.1). Према томе, он конвергира равномерно на сваком сегменту $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, па, на основу Става 1.15, важи $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

□

Последица 1.20. *Унутар свог интервала конвергенције степени ред (1.1) дефинише бесконачно диференцијабилну функцију $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ за коју важи $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ за $n \geq 0$.*

1.2 Аналитичке функције

Дефиниција 1.21. а) Нека је f реална функција, дефинисана и бесконачно диференцијабилна у некој околини тачке $x_0 \in \mathbb{R}$. Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

зове се Тејлоров ред функције f у околини тачке x_0.
Према Последици 1.20, ако је функција f сума степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, тада је f бесконачно диференцијабилна унутар интервала конвергенције реда и тај ред је Тејлоров ред функције f.

б) Ако је функција f једнака збиру свог Тејлоровог реда у некој околини тачке x_0, кажемо да је f аналитичка у околини тачке x_0.

Наравно, постоје бесконачно диференцијабилне функције које нису аналитичке. Такав један пример јесте функција

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

која јесте бесконачно диференцијабилна у околини тачке $x=0$ и за коју важи $f^{(n)}(0) = 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Према томе, сума Тејлоровог реда функције f у околини тачке $x=0$ је једнака нули и, дакле, није једнака функцији f.

У следећем ставу наводимо довољан услов да функција буде аналитичка.

Став 1.22. *Нека је функција f бесконачно диференцијабилна на интервалу $I = (x_0 - r, x_0 + r), r > 0$ и нека постоји $M \geq 0$ тако да важи $|f^{(n)}(x)| \leq M$ за свако $x \in I$ и свако $n \geq n_0$. Тада је f аналитичка функција у околини тачке x_0.*

Доказ. Функција f ће бити аналитичка ако је $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, где је $R_n(x)$ остатак у Тејлоровој формули $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$. Дакле, довољно је да докажемо да за свако $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ важи $R_n(x) \to 0, n \to \infty$. Ако искористимо Лагранжов облик остатка, добијамо да је за свако $x \in I$ и неко $\theta \in (0,1)$ испуњено

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty.$$

$\square$

Пример 1.23. 1) Посматрајмо функцију $f(x) = e^x$. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f^{(n)}(x) = e^x$ и $f^{(n)}(0) = 1$. Тејлоров ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ функције f у околини нуле конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$ и сума му је једнака e^x, с обзиром на то да за свако $r > 0$ важи $|f^{(n)}(x)| = e^x \le e^r$, за $x \in [-r, r]$.

2) Како је $\left|\sin^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1$ и $\left|\cos^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1$ за $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, добијамо $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ и $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ за $x \in \mathbb{R}$.

3) Нека је $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тејлоров ред финкције f у околини нуле је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ и зове се биномни ред. За $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ред се своди на коначан збир. Ако $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, ред конвергира на интервалу $(-1, 1)$. За $|x| < 1$ хоћемо да покажемо да важи $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Кошијев облик остатка у одговарајућој Маклореновој формули $R_n(x) = \binom{\alpha}{n}(\alpha - n)x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$, $\theta \in (0,1)$ запишимо у облику $R_n(x) = \left(\binom{\alpha-1}{n} x^n\right)\left(\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\right)\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$. Приметимо да је $\binom{\alpha-1}{n} x^n$ општи члан биномног реда функције $(1+x)^{\alpha-1}$ који конвергира ($|x| < 1$), па тежи нули кад $n \to \infty$. За дате x и α, приметимо да је $|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|$ ограничено са $\max(|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}, |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1})$ и та граница не зависи од n. Видимо да важи и $1 + \theta x > 1 - \theta$ због $x > -1$ и $0 < \theta < 1$, па је $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Према свему томе, $R_n(x) \to 0$ кад $n \to \infty$.
Остаје још да се види за које вредности α биномни ред конвергира за $x = 1$, односно $x = -1$. Можда бисте могли да покушате то сами.

4) Ако интегралимо ред $(1+x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$, члан по члан (што смемо унутар радијуса конвергенције), добијамо $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Пошто добијени ред конвергира у $x = 1$ и $\ln(1+x)$ је непрекидна функција у тој тачки, из Абелове теореме (Теорема 1.18) добијамо да поменути развој функције $\ln(1+x)$ важи за свако $x \in (-1, 1]$. Специјално, добијамо $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2 Простор C[a,b]. Апроксимација непрекидних функција полиномима

Скуп $C[a,b]$ свих непрекидних функција $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ има структуру векторског простора са операцијама сабирања и множења скаларом: за $f, g \in C[a,b]$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ дефинишемо функције $f + g$, $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{R}$ са

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Може се увести норма као

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

Норма је коректно дефинисана јер за непрекидну функцију f и $|f|$ је непрекидна па достиже максимум на сегменту $[a, b]$. Помоћу норме уводимо метрику

$$d(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|. \tag{2.1}$$

Овај простор смо раније помињали као пример метричког простора. Сада ћемо описати конвергенцију у овом метричком простору. Нека је (f_n) низ у $C[a, b]$. Тај низ конвергира функцији $f \in C[a, b]$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да за све $n > n_0$ важи

$$d(f_n, f) = \max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Дакле, низ (f_n) конвергира ка f у $C[a, b]$ ако и само ако тај низ равномерно конвергира ка f на $[a, b]$ кад $n \to \infty$. Због тога се често метрика (2.1) простора $C[a, b]$ назива равномерна (униформна) метрика.
На овом месту можемо да докажемо комплетност метричког простора $C[a, b]$. Најавили смо то на почетку првог семестра.

Став 2.1. *Простор $C[a, b]$ је комплетан.*

Доказ. Нека је (f_n) Кошијев низ функција у $C[a, b]$. То значи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да за све $m, n > n_0$ важи

$$d(f_m, f_n) = \max_{a \le x \le b} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Према томе видимо да је $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ за све $x \in [a, b]$. На основу Става 1.7 који смо доказали на неком од претходних часова, можемо да закључимо да низ (f_n) равномерно конвергира некој функцији $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Како су све функције f_n непрекидне, гранична функција f је, такође, непрекидна (Став 1.10). $\square$

Следећи Вајерштрасов став нам говори да се свака непрекидна функција може униформно апроксимирати полиномима.

Став 2.2. *(Вајерштрас)*
Нека је дата непрекидна функција f на сегменту $[a, b]$ и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно.

Тада постоји полином p са реалним коефицијентима такав да за свако $x \in [a,b]$ важи $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

Доказ. Доказ ћемо извести у неколико корака.
1) Можемо претпоставити да је $[a,b] = [-1,1]$. Како је функција f равномерно непрекидна на $[-1,1]$, сваком $\varepsilon > 0$ одговара број $\delta > 0$ такав да је

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2 \quad \text{кад год је} \quad |x - x'| < \delta. \tag{2.2}$$

Изаберимо поделу $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[-1,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$. Нека је $l : [-1,1] \to \mathbb{R}$ функција за коју је

$$l(x_j) = f(x_j) \quad \text{за} \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

а на сегментима $[x_{j-1}, x_j]$ је линеарна, тј. за $x \in [x_{j-1}, x_j]$ важи

$$l(x) = f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}(x - x_{j-1}).$$

Тада за $j = 1, \ldots, n$ и $x \in [x_{j-1}, x_j]$ важи

$$|f(x) - l(x)| = \left| \frac{(f(x) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}) - (f(x_j) - f(x_{j-1}))(x - x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \right|$$

$$= \left| \frac{(f(x) - f(x_j))(x - x_{j-1}) + (f(x) - f(x_{j-1}))(x_j - x)}{x_j - x_{j-1}} \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(x - x_{j-1}) + (x_j - x)}{x_j - x_{j-1}} = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.4}$$

на основу (2.2) јер $|x - x_j| < \delta$ и $|x - x_{j-1}| < \delta$.

2) Функција l може да се изрази у облику

$$l(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j |x - x_j|, \tag{2.5}$$

где су коефицијенти a_j одређени са

$$\sum_{j=0}^{n} a_j |x_k - x_j| = f(x_k).\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Заиста, сума у (2.5) се на сегментима $[x_{k-1}, x_k]$ и $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$

своди на

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j(x - x_j) - a_k(x - x_k) - \sum_{j=k+1}^{n} a_j(x - x_j),$$

односно

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j(x - x_j) + a_k(x - x_k) - \sum_{j=k+1}^{n} a_j(x - x_j),$$

тј. представља на тим сегментима две различите линеарне функције које за $x = x_k$ узимају исту вредност $f(x_k)$ на основу (2.6).

3) Сада видимо да је довољно доказати да се свака од функција $|x - x_j|$ на $[-1, 1]$ може равномерно апроксимирати полиномима, а то ћемо доказати тако што ћемо показати да се функција $|x|$ може равномерно апроксимирати полиномима на скупу $[-2, 2]$ који садржи све сегменте облика $[-1 - x_j, 1 - x_j]$. Ово следи непосредно из

$$|x| = 2\left|\frac{x}{2}\right| = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^n,$$

јер овај ред конвергира униформно на сегменту $[-2, 2]$ на основу Вајерштрасовог критеријума. Наиме, за $x \in [-2, 2]$ је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{1/2}{n} \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{1/2}{n}\right| < +\infty.$$

Означимо са p_j $(j = 0, 1, \dots n)$ полином који равномерно апроксимира функцију $a_j|x - x_j|$, тј. за који важи

$$|a_j|x - x_j| - p_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)},$$

и са p полином $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j(x)$. Тада је

$$|l(x) - p(x)| = \left|\sum_{j=0}^{n} (a_j|x - x_j| - p_j(x))\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j|x - x_j| - p_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

што, заједно са (2.4), даје

$$|f(x) - p(x)| \leq |f(x) - l(x)| + |l(x) - p(x)| < \varepsilon,$$

за све $x \in [-1, 1]$. Тиме је Вајерштрасов став доказан. $\square$

3 Интеграл као функција параметра

3.1 Риманови интеграли који зависе од параметра

Дефиниција 3.1. Нека је $E = I \times J$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $J = (c, d) \subset \mathbb{R}$, и $f : E \to \mathbb{R}$ функција таква да постоји $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ као Риманов интеграл за свако $y \in J$. Тада се функција

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx, \ y \in J,$$

назива Риманов интеграл који зависи од параметра y.

Очигледно је да особине функције F зависе од особина функције f.

Теорема 3.2. *Ако је функција f непрекидна на скупу E, тада је функција F непрекидна на интервалу J.*

Доказ. Нека је $y_0 \in J$. Нека је $\Delta > 0$ такво да $J(y_0) = [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset J$. Скуп $I \times J(y_0)$ је компактан, па је функција f равномерно непрекидна на њему. Према томе, за дато $\varepsilon > 0$, постоји $\delta \in (0, \Delta)$, тако да је $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$, за свако $x \in I$ и свако $y \in J(y_0)$ за које важи $|y - y_0| < \delta$. Приметимо да смо овим добили да $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ на I, кад $y \to y_0$. На основу Става 1.12 видимо да важи

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, y_0)dx = F(y_0),$$

што значи да је функција F непрекидна у тачки y_0. $\square$

У наставку, задржавамо све ознаке као до сада.

Теорема 3.3. *Нека функција $f : E \to \mathbb{R}$ задовољава следеће услове:*
(1) $f(x, y)$ је непрекидна по $x \in I$ за свако $y \in J$;
(2) f има парцијални извод $\frac{\partial f}{\partial y}$ који је непрекидна функција на E.

Тада је функција $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *непрекидно диференцијабилна на* J *и важи*

$$F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Доказ. Према (1), $F(y)$ је дефинисано за свако $y \in J$. Нека $y_0 \in J$ и нека је $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такав да $y_0 + h \in J$. Тада, применом Лагранжове теореме, добијамо

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = \int\limits_a^b [f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)]dx =$$

$$= h \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h)dx, \ 0 < \theta < 1.$$

Као у доказу претходне теореме, добија се да $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h) \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$ на I кад $h \to 0$. На основу Става 1.12, добијамо да је

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(y_0 + h) - F(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \lim_{h \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx.$$

Непрекидност функције F' следи из једнакости $F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, претпоставке (2) и Теореме 3.2. □

Сада ћемо разматрати диференцијабилност параметарског интеграла код кога и границе зависе од параметра.

Теорема 3.4. *Нека су* f *и* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрекидне реалне функције на скупу* $E = I \times J$, $I = [a,b]$, $J = (c,d)$ *и нека су* $a(y)$ *и* $b(y)$ *диференцијабилне функције дефинисане на* J, *са вредностима у* I. *Тада је функција*

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

диференцијабилна на J и важи

$$F'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y),\ y \in J.$$

Доказ. Нека $y_0 \in J$, $\Delta > 0$ и $[y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset J$. Ако је $|h| < \Delta$, тада је

$$\frac{F(y_0+h) - F(y_0)}{h} - \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx - f(b(y_0),y_0)b'(y_0) + f(a(y_0),y_0)a'(y_0) =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx - \frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx - \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx -$$

$$-f(b(y_0),y_0)b'(y_0) + f(a(y_0),y_0)a'(y_0) = \tag{3.1}$$

$$= \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \left[\frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right] dx - \frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0)}^{a(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx +$$

$$+f(a(y_0),y_0)a'(y_0) + \frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx - f(b(y_0),y_0)b'(y_0).$$

Овде смо користили једнакост

$$\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx = \int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x,y_0+h)dx + \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0+h)dx +$$

$$+ \int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx.$$

Према Теореми 3.3,

$$\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \left[\frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right] dx = o(1),\ h \to 0. \tag{3.2}$$

Ако искористимо Теорему о средњој вредности интеграла и диференцијабилност функције b, видимо да је

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx - f(b(y_0), y_0)b'(y_0) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b(y_0+h)-b(y_0)}{h} f(\xi, y_0+h) - f(b(y_0), y_0)b'(y_0) = \\ &= [b'(y_0)+\beta(h)]f(\xi, y_0+h) - f(b(y_0), y_0)b'(y_0), \end{aligned} \tag{3.3}$$

за неко $\xi = b(y_0) + \theta(b(y_0+h) - b(y_0)),\ 0 < \theta < 1$, при чему $\beta(h) \to 0,\ h \to 0$. Како $f(b(y_0) + \theta(b(y_0+h) - b(y_0)), y_0+h) - f(b(y_0), y_0) \to 0$ кад $h \to 0$, на основу (3.3) закључујемо да је

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx - f(b(y_0), y_0)b'(y_0) = o(1),\ h \to 0. \tag{3.4}$$

Слично добијамо да је

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0)}^{a(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx - f(a(y_0), y_0)a'(y_0) = o(1),\ h \to 0. \tag{3.5}$$

Теорема следи из (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5).

□

Пример 3.5. Нека је

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,\ n \in \mathbb{N},$$

где је f непрекидна функција на интервалу интеграције.

За $n = 1$, $F_1'(x) = f(x)$.
Према претходној теореми, за $n > 1$ је

$$F_n'(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-2} f(t)dt = F_{n-1}(x).$$

Лако се закључује да је $F_n^{(n)}(x) = f(x)$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.6. *Ако је функција* $f : I \times J \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $J = [c, d]$, *непрекидна на* $I \times J$, *тада је функција* $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ *интеграбилна на* J *и важи*

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx. \tag{3.6}$$

Доказ. Функција F је непрекидна на J (Теорема 3.2) па је интеграбилна на њему. Нека су

$$\Phi(u) = \int_c^u \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy, \quad \Psi(u) = \int_a^b \left(\int_c^u f(x, y)dy \right) dx$$

за $u \in J$. Диференцирањем по горњој граници интеграла, добијамо

$$\Phi'(u) = \int_a^b f(x, u)dx,$$

и применом Теореме 3.3,

$$\Psi'(u) = \int_a^b f(x, u)dx.$$

Како функције Φ и Ψ имају једнаке изводе на J, добијамо $\Phi(u) = \Psi(u) + C$, $u \in J$. Из $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$, следи $C = 0$, па је $\Phi(u) = \Psi(u)$, $u \in J$. Специјално, за $u = d$ добијамо (3.6).

□

Услови у Теоремама 3.2 и 3.6 су само довољни, не и неопходни. То се види из следећег примера:

Пример 3.7. Нека је $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција $f(x, y) = sgn(x - y)$. Непосредно се добија $F(y) = \int_0^1 f(x, y)dx = \begin{cases} 1, & -\infty < y < 0 \\ 1 - 2y, & 0 \le y \le 1 \\ -1, & 1 < y < \infty \end{cases}$.

Дакле, интеграл прекидне функције f је непрекидна функција F.

3.2 Несвојствени параметарски интеграли

Ако је $f : [a,\infty) \times (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ и за свако $y \in J = (c,d)$ постоји несвојствени интеграл

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx, \tag{3.7}$$

тада се он назива несвојствени интеграл који зависи од параметра y.

Дефиниција 3.8. Несвојствени интеграл (3.20), који зависи од параметра $y \in J$, равномерно конвергира на скупу $E \subset J$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a_0 \geq a)(\forall y \in E)(\forall b \geq a_0) \Longrightarrow \left| \int_b^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Ако означимо $F(b,y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,\ b \geq a$, тада је (3.8) еквивалентно са

$$F(b,y) \rightrightarrows F(y)$$

на E кад $b \to \infty$.

Пример 3.9. (1) Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+y^2}$ равномерно конвергира по $y \in \mathbb{R}$. Наиме, $\int\limits_b^\infty \frac{dx}{x^2+y^2} \leq \int\limits_b^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{b} < \varepsilon$, ако је $b > \frac{1}{\varepsilon}$.

(2) Интеграл $I(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}dx$ конвергира за свако $y > 0$. Равномерно конвергира на произвољном скупу $\{y \in \mathbb{R} |\ y \geq y_0 > 0\}$ јер је, у том случају,

$$\int_b^\infty e^{-xy}dx = \frac{1}{y}e^{-by} \leq \frac{1}{y_0}e^{-by_0} \to 0, \tag{3.9}$$

кад $b \to \infty$. Пошто је $\sup\limits_{y>0} \frac{1}{y}e^{-by} = \infty$ за свако $b > 0$, на основу (3.9) видимо да интеграл $I(y)$ не конвергира равномерно на $(0,\infty)$.

Теорема 3.10. *(Кошијев критеријум)*
Интеграл (3.20) равномерно конвергира на скупу $E \subset J$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $a_0 \geq a$, такво да за све $b_1, b_2 \in [a_0,\infty)$ и за свако $y \in E$ важи $\left| \displaystyle\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$

Доказ. Доказ следи из општег Кошијевог принципа равномерне конвергенције (Став 1.8). □

Последица 3.11. *Ако је подинтегрална функција f интеграла (3.20) непрекидна на $[a,\infty)\times[c,d]$ и тај интеграл конвергира за $y\in(c,d)$, али дивергира за $y=c$ (односно $y=d$), онда он не конвергира равномерно на (c,d).*

Теорема 3.12. *(Вајерштрасов критеријум)*
Ако је $\Phi:[a_0,\infty)\to\mathbb{R},\ a_0\geq a$, функција таква да за свако $y\in E\subset\mathbb{R}$ и свако $x\geq a_0$ важи $|f(x,y)|\leq\Phi(x)$ и интеграл $\int\limits_{a_0}^{\infty}\Phi(x)dx$ конвергира, тада интеграл $\int\limits_{a}^{\infty}f(x,y)dx$ конвергира равномерно на скупу E.

Доказ. Из конвергенције интеграла $\int\limits_{a_0}^{\infty}\Phi(x)dx$ следи да за свако $\varepsilon>0$ постоји $a_1\geq a_0$ тако да за све $b_1,b_2\in(a_1,\infty)$ важи $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\Phi(x)dx\right|<\varepsilon$. Тада је, за све $y\in E$,

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}f(x,y)dx\right|\leq\int\limits_{b_1}^{b_2}|f(x,y)|dx\leq\int\limits_{b_1}^{b_2}\Phi(x)dx=\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\Phi(x)dx\right|<\varepsilon.$$

На основу Теореме 3.10 следи да интеграл $\int\limits_{a}^{\infty}f(x,y)dx$ равномерно конвергира на скупу E. □

Пример 3.13. (1) Интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin xy}{1+x^2}dx$ равномерно конвергира по $y\in\mathbb{R}$ јер за свако $y\in\mathbb{R}$ важи $\left|\frac{\sin xy}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{1+x^2}$ и $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ конвергира.

(2) Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}+1}$ конвергира равномерно по α на интервалу $[\alpha_0,\infty)$, где је $\alpha_0>1$. Заиста, ако је $x\geq1$ и $\alpha\geq\alpha_0$, тада је $(x^{\alpha}+1)^{-1}\leq(x^{\alpha_0}+1)^{-1}$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha_0}+1}$ конвергира. Конвергенција није униформна на $(1,\infty)$ према Последици 3.11.

Теорема 3.14. *(Абелов критеријум)*
Ако важи:

(1) интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *конвергира равномерно по* y *на* $J = (c,d)$*;*
(2) за свако $y \in J$ *функција* $g : [a,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ *је монотона по* x*;*
(3) постоји константа M*, таква да је* $|g(x,y)| \le M$ *за свако* $x \in [a,\infty)$ *и свако* $y \in J$*,*
тада интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *равномерно конвергира на* J*.*

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$. За $a \le a_1 < a_2$ и $y \in J$, на основу друге теореме о средњој вредности интеграла имамо

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(a_1,y)\int\limits_{a_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(a_2,y)\int\limits_{\xi}^{a_2} f(x,y)dx, \tag{3.10}$$

за неко $\xi \in (a_1, a_2)$.
На основу (1), постоји $a_0 \ge a$ тако да за свако $y \in J$ важи

$$\left|\int\limits_{a_1}^{\xi} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad \left|\int\limits_{\xi}^{a_2} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{3.11}$$

ако је $a_0 \le a_1 < \xi < a_2$.
Из (3.10) и (3.11) следи да ако је $a_2 > a_1 \ge a_0$, тада је за свако $y \in J$

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Ово значи да интеграл $\Phi(y)$ конвергира равномерно по $y \in J$ на основу Кошијевог критеријума (Теорема 3.10).

□

Пример 3.15. Параметарски интеграл $F(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy}dx$ равномерно конвергира на интервалу $[0,\infty)$.
Означимо $f(x,y) = \frac{\sin x}{x}$ и $g(x,y) = e^{-xy}$. Интеграл $\int\limits_0^\infty f(x,y)dx$ конвергира и подинтегрална функција не зависи од y, па интеграл конвергира равномерно по y на $[0,\infty)$. Важи $g(x,y) \le 1$ за свако $x \ge 0$ и свако $y \in [0,\infty)$. За фиксирано $y \in [0,\infty)$, функција $g(x,y)$ је нерастућа по x на $[0,\infty)$. Дакле, важе сви услови Абеловог критеријума, па интеграл $F(y)$ равномерно конвергира по $y \in [0,\infty)$.

Теорема 3.16. *(Дирихлеов критеријум)*
Нека за функције f и g, које пресликавају $[a,\infty)\times(c,d)$ у $\mathbb{R}$, важи:
(1) функција g је монотона по x за свако $y\in(c,d)$;
(2) $g(x,y)\rightrightarrows 0$, кад $x\to\infty$, на (c,d);
(3) постоји $M>0$ тако да је $\left|\int\limits_a^x f(t,y)dt\right|\le M$, за свако $x\ge a$ и свако $y\in(c,d)$.
Тада интеграл $F(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ конвергира равномерно по y на (c,d).

Доказ. Нека је $\varepsilon>0,\ a\le a_1<a_2$ и $y\in(c,d)$. Као у доказу Абеловог критеријума, користећи другу теорему о средњој вредности интеграла, добијамо

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|g(a_1,y)\int\limits_{a_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(a_2,y)\int\limits_{\xi}^{a_2} f(x,y)dx\right|$$

$$\le 2M(|g(a_1,y)|+|g(a_2,y)|). \tag{3.12}$$

Овде смо користили оцену
$$\left|\int\limits_{a_1}^{\xi} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{a_1}^{a} f(x,y)dx + \int\limits_{a}^{\xi} f(x,y)dx\right|$$

$$\le \left|\int\limits_{a}^{a_1} f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_{a}^{\xi} f(x,y)dx\right| \le 2M,$$

и, слично, $\left|\int\limits_{\xi}^{a_2} f(x,y)dx\right|\le 2M$.
Према (2), постоји $a_0\ge a$ тако да за свако $y\in(c,d)$ и за свако $x\ge a_0$ важи

$$|g(x,y)|<\frac{\varepsilon}{4M}. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следи да је $\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx\right|<\varepsilon$, за свако $a_1,a_2\ge a_0$ и свако $y\in(c,d)$. На основу Кошијевог критеријума (Теорема 3.10) интеграл $F(y)$ равномерно конвергира по y на (c,d).

□

Теорема 3.17. *(Дини)*
Нека је $E = I \times J,\ I = [a, \infty),\ J = [c, d]$ *и нека је* $f : E \to \mathbb{R}$ *непрекидна ненегативна функција таква да за свако* $y \in J$ *интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ *конвергира. Ако је функција* $F(y)$ *непрекидна на* J*, тада интеграл* $F(y)$ *равномерно конвергира на* J*.*

Доказ. Нека је $F_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x, y)dx,\ y \in J,\ n \in \mathbb{N}$. Функције $F_n : [c, d] \to \mathbb{R}$ су непрекидне на J, према Теореми 3.2. Низ $(F_n(y))$ је неопадајући за свако $y \in J$ јер је функција f ненегативна на E. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y) = F(y),\ y \in J$, на основу Става 1.11, $F_n(y) \rightrightarrows F(y)$, на J, кад $n \to \infty$. Дакле, за свако $\varepsilon > 0$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да је

$$0 \leq F(y) - F_n(y) = \int\limits_{a+n}^\infty f(x, y)dx < \varepsilon,$$

за свако $n \geq n_0$ и свако $y \in J$. Узимајући да је $a_0 = a + n_0$, закључујемо да је $\int\limits_{a_1}^\infty f(x, y)dx < \varepsilon$, за свако $a_1 \geq a_0$ и свако $y \in J$.

□

3.3 Функционална својства несвојствених параметарских интеграла

Пример који следи показује да довољни услови за улазак лимеса под Риманов интеграл (Став 1.12) не обезбеђују да се може променити поредак лимеса и несвојственог интеграла.

Пример 3.18. Функција

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x^3} e^{-y/2x^2}, & x > 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

.

има својство $f(x,y) \rightrightarrows 0$, на $[0,\infty)$, кад $y\to\infty$. Међутим,

$$\lim_{y\to\infty}\int\limits_0^\infty f(x,y)dx = 1 \neq 0 = \int\limits_0^\infty \left(\lim_{y\to\infty} f(x,y)\right) dx.$$

(1) Гранична вредност и непрекидност

Теорема 3.19. *Нека је $I=[a,\infty)$, $J=(c,d)$, $-\infty\le c<d\le\infty$, $y_0\in\overline{J}$ и $f: I\times J\to\mathbb{R}$. Ако важи*
(1) $f(x,y)\rightrightarrows \Phi(x)$, $y\to y_0$, на сваком интервалу $[a,b]$, $b>a$,
(2) интеграл $F(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ конвергира равномерно на J,
тада
(а) интеграл $\int\limits_a^\infty \Phi(x)dx$ конвергира,
(б) $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \Phi(x)dx.$

Доказ. Нека је $F(b,y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$, $b\ge a$. Из претпоставке (1) и Става 1.12 следи да је $\lim\limits_{y\to y_0}F(b,y)=\int\limits_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b \Phi(x)dx$. Са друге стране, $F(b,y)\rightrightarrows F(y)$, по $y\in J$, кад $b\to\infty$. Применом Става 1.9 о размени лимеса, закључујемо да постоји $\int\limits_a^\infty \Phi(x)dx$ и да важи

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{b\to\infty}F(b,y)\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\lim_{y\to y_0}F(b,y)\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^\infty \Phi(x)dx.$$

□

Став 3.20. *Нека су чланови реда $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(x)$ ненегативне и непрекидне функције на $[a,\infty)$ и нека је његова сума $f(x)$ непрекидна и интеграбилна функција на*

$[a,\infty)$. *Тада се тај ред може интегралити члан по члан на* $[a,\infty)$, *тј. важи*

$$\int\limits_a^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_a^\infty f_n(x)dx.$$

Доказ. Нека је $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)$. Према Динијевој теореми, $s_n \rightrightarrows f$, на сваком интервалу $[a,b]$, $b > a$, кад $n \to \infty$. Са друге стране, неједнакости $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$, за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in [a,\infty)$ и конвергенција интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ повлаче да $\int\limits_a^\infty s_n(x)dx$ конвергира равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Применом претходне теореме добијамо

$$\int\limits_a^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dx = \int\limits_a^\infty \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^\infty s_n(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int\limits_a^\infty f_k(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_a^\infty f_k(x)dx.$$

□

Став 3.21. *Нека је* $E = I \times J$, $I = [a,\infty)$, $J = (c,d)$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$. *Ако је функција* $f : E \to \mathbb{R}$ *непрекидна и интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *конвергира равномерно по* $y \in J$, *тада је функција* F *непрекидна на* J.

Доказ. Нека је $F_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$, $y \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Функције F_n су непрекидне на J (Теорема 3.2) и важи $F_n \rightrightarrows F$ на J, кад $n \to \infty$, по претпоставци, па је F непрекидна функција на J (Став 1.10).

□

Пример 3.22. У Примеру 3.15 смо показали да интеграл $F(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ конвергира равномерно на интервалу $[0,\infty)$. На основу претходног става, F је непрекидна функција на $[0,\infty)$. Специјално, $\lim\limits_{y\to 0+} F(y) = F(0)$, тј.

$$\lim_{y\to 0+} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

(2) Диференцирање несвојствених параметарских интеграла

У следећој теореми наводимо довољне услове да функција дефинисана несвојственим параметарским интегралом буде диференцијабилна.

Теорема 3.23. *Нека су испуњени следећи услови:*

(1) функција $f : E \to \mathbb{R}$, где је $E = [a,\infty) \times J$, $J = (c,d)$, је непрекидна по $x \in [a,\infty)$ за свако $y \in J$, а функција $\frac{\partial f}{\partial y}$ је дефинисана и непрекидна на E,

(2) интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ конвергира за неко $y = y_0 \in J$,

(3) интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ равномерно конвергира на J.

Тада је

(а) функција $F(y)$ диференцијабилна на J,

(б) $F'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,\ y \in J$.

Доказ. Нека је $F_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx,\ y \in J,\ n \in \mathbb{N}$. Функције F_n су диференцијабилне на интервалу J за свако $n \in \mathbb{N}$ и, према Теореми 3.3, важи

$$F_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

На основу (3) важи $F_n' \rightrightarrows \Phi$ на J, кад $n \to \infty$, а према (2) видимо да је $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y_0) = F(y_0)$.

Према Ставу 1.14, $F_n \rightrightarrows F$ на J, кад $n \to \infty$ и $F'(y) = \Phi(y),\ y \in J$, тј. $\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx,\ y \in J.$ $\square$

Пример 3.24. Израчунајмо интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Интеграл $F(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx,\ y > 0$, задовољава услове претходне теореме: подинтегрална функција $f(x,y) = \frac{\sin x}{x} e^{-xy},\ f(0,y) = 1$ је непрекидна заједно са својим парцијалним изводом $\frac{\partial f}{\partial y}$, интеграл $F(y)$ конвергира за свако $y > 0$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx = -\int\limits_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = -\frac{1}{1+y^2}$ равномерно конвергира по $y \geq y_0 > 0$ (на пример, на основу Дирихлеовог критеријума).
Према претходној теореми, $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2},\ y > 0$, па се интеграцијом добија $F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$. Докажимо да је $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) = 0$.
Нека је $\varepsilon > 0$. Изаберимо $x_0 \in (0, \pi/2)$ тако да је

$$0 < \int\limits_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \leq \int\limits_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из

$$\left| \int\limits_{x_0}^\infty f(x,y) dx \right| \leq \int\limits_{x_0}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{-xy} dx \leq \frac{1}{x_0} \int\limits_{x_0}^\infty e^{-xy} dx = \frac{e^{-x_0 y}}{x_0 y},$$

следи да $\int\limits_{x_0}^\infty f(x,y) dx \to 0$ кад $y \to \infty$, па постоји $y_0 > 0$ тако да за свако $y \geq y_0$ важи $\left| \int\limits_{x_0}^\infty f(x,y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Дакле, $\left| \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \right| < \varepsilon$, за $y \geq y_0$, што значи да је $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) = 0$. Из овога се добија да је $C = \frac{\pi}{2}$, па је $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(3) Интеграција несвојствених параметарских интеграла

Погледајмо прво Риманов интеграл функције дефинисане несвојственим параметарским интегралом.

Теорема 3.25. *Нека је* $I = [a, \infty)$ *и* $J = [c, d]$, $-\infty < c < d < \infty$. *Ако је*
(1) функција $f(x,y)$ *непрекидна на* $E = I \times J$,

(2) интеграл $F(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *равномерно конвергира на* J*,*

тада $F\in\mathcal{R}(J)$ *и важи*

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^\infty\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx. \tag{3.14}$$

Доказ. Из непрекидности функције f, на основу Теореме 3.6, следи да за свако $b\in[a,\infty)$ важи

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx. \tag{3.15}$$

Према (2), $F(b,y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx \rightrightarrows \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ на J, кад $b\to\infty$. На основу Става 1.12 важи

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_c^d F(b,y)dy=\int\limits_c^d\lim_{b\to\infty}F(b,y)dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right)dy. \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16) следи (3.14). $\square$

Пример 3.26. Полазећи од интеграла $\int\limits_0^\infty\frac{\sin yx}{x}dx=\int\limits_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, $y>0$, који равномерно конвергира на сваком сегменту $[a,b]$, $b>a>0$, добијамо

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_a^b\frac{\sin yx}{x}dy\right)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^\infty\frac{\sin yx}{x}dx\right)dy=\frac{(b-a)\pi}{2}.$$

Теорема 3.27. *Нека је* $I=[a,\infty)$, $J=[c,\infty)$ *и* $E=I\times J$*. Ако важи*

(1) функција f *је непрекидна на* E*,*

(2) интеграл $F(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *равномерно конвергира на сваком интервалу* $[c,d]\subset[c,\infty)$*,*

(3) интеграл $\Phi(x)=\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *равномерно конвергира на сваком интервалу*

$[a,b] \subset [a,\infty)$,

(4) бар један од интеграла $\int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy \right) dx$, $\int\limits_c^\infty \left(\int\limits_a^\infty |f(x,y)|dx \right) dy$ *конвергира,*

тада је

$$\int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^\infty \left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \right) dy. \tag{3.17}$$

Доказ. Претпоставимо да први интеграл у (4) конвергира. Тада је за произвољно $d > c$, према Теореми 3.25,

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{3.18}$$

Означимо $\Phi(d,x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$.

Према (3) важи $\Phi(d,x) \rightrightarrows \Phi(x)$, $d \to \infty$, на сваком интервалу $[a,b] \subset [a,\infty)$. Како је

$$|\Phi(d,x)| \leq \int\limits_c^d |f(x,y)|dy \leq \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$$

и $\int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy \right) dx < \infty$ према претпоставци (4), интеграл $\int\limits_a^\infty \Phi(d,x)dx$ равномерно конвергира по $d \in [c,\infty)$ (Вајерштрасов критеријум - Теорема 3.12). Примењујући Теорему 3.19, добијамо

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^\infty \Phi(d,x)dx = \int\limits_a^\infty \lim_{d\to\infty} \Phi(d,x)dx = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy \right) dx. \tag{3.19}$$

Из (3.19) и (3.18) следи (3.17). □

Ако је $f : [a,b) \times (c,d) \mapsto \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, и за свако $y \in J = (c,d)$ постоји несвојствени интеграл, са сингуларитетом у тачки b,

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx, \tag{3.20}$$

тада се он назива несвојствени интеграл који зависи од параметра y.

Може се дефинисати његова униформна конвергенција, може се показати да одговарајући критеријуми равномерне конвергенције важе и у овом случају, и, такође, могу да се формулишу и докажу аналогне теореме којима се утврђују његова функционална својства.

3.4 Ојлерови интеграли

У овом одељку разматрамо функције дефинисане Ојлеровим интегралима:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \tag{3.21}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \tag{3.22}$$

које се називају Бета и Гама функција, редом.

а) Гама функција

Интеграл (3.22) је несвојствени интеграл (сингуларитет је $x = \infty$) и, ако је $\alpha < 1$, сингуларитет је и тачка $x = 0$. Што се тиче првог сингуларитета, лако се види да интеграл конвергира за свако $\alpha \in \mathbb{R}$. Ако $x \to 0+$, тада $x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1}$, па закључујемо да интеграл (3.22) конвергира само ако је $\alpha > 0$. Дакле, домен функције Γ је $(0, \infty)$.

(1) За свако $\alpha > 0$ важи $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Заиста, парцијалном интеграцијом добијамо

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx = -x^\alpha e^{-x}|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{3.23}$$

Како је $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$, то је $\Gamma(n+1) = n!$ за $n \in \mathbb{N}$.

Примедба 3.28. Функција Γ се може дефинисати и за негативне вредности параметра α, различите од негативних целих бројева, помоћу $\Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$.

Прво се овом формулом функција Γ дефинише за $-1 < \alpha < 0$, а затим се, настављајући поступак, дефинише и за остале вредности параметра $\alpha \in (-\infty, 0)\backslash\mathbb{Z}$.

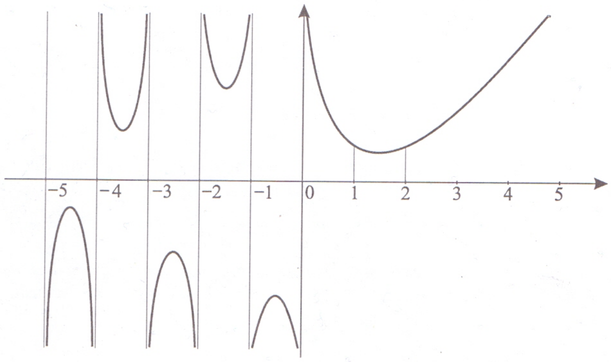
(2) Функција Γ је на интервалу $(0, \infty)$ бесконачно дифернцијабилна. Интеграл (3.22), као ни интеграли

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x} dx, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

не конвергирају равномерно по $\alpha \in (0, \infty)$, али конвергирају равномерно на сваком интервалу $[a, b] \subset (0, \infty)$. Заиста, ако је $a < \alpha \leq b$, тада је, за довољно мало x, $|x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}| \leq x^{a-1}$. Како $\int_0^1 x^{a-1}dx$ конвергира, закључујемо да интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x} \ln^n x dx$ конвергира равномерно на $[a, \infty)$.

Са друге стране, интеграл $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x} \ln^n x dx$ равномерно конвергира на $[a, b]$, јер је $|x^{\alpha-1}e^{-x} \ln^n x| \leq x^{b-1}e^{-x} \ln^n x, \; x \geq 1$, и $\int_1^\infty x^{b-1}e^{-x} \ln^n x dx$ конвергира. Према томе, интеграл у (3.24) равномерно конвергира, па важи формула (3.24).

(3) Из формуле (3.24), за $n = 2$, видимо да је $\Gamma''(\alpha) > 0$, па је функција Γ конвексна на $(0, \infty)$. Како је $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, на основу Ролове теореме, постоји $\alpha_1 \in (1, 2)$, такво да је $\Gamma'(\alpha_1) = 0$. Како је Γ' растућа функција, важи $\Gamma'(\alpha) < 0$, за $0 < \alpha < \alpha_1$, и $\Gamma'(\alpha) > 0$, за $\alpha > \alpha_1$. Одатле видимо да функција Γ строго опада на $(0, \alpha_1)$ и строго расте на (α_1, ∞).
Приметимо још и да важи $\Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \to \infty$, кад $\alpha \to 0+$, и да $\Gamma(\alpha) \to \infty$, кад $\alpha \to \infty$ ($\Gamma(\alpha) > n!$ за $\alpha > n + 1$). График функције Γ дат је на слици:



(4) Важи Ојлер-Гаусова формула за функцију Γ:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}. \tag{3.25}$$

Сменом $x = \ln \dfrac{1}{u}$ у интегралу (3.22), добијамо $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}du$. Приметимо да $f_n(u) = n(1-u^{1/n}) \rightrightarrows \ln\dfrac{1}{u} = f(u)$ на сваком интервалу $[a,b] \subset (0,1]$. Наиме, означимо $g(t) = t(1-u^{1/t})$, $t > 0$. Тада је $g'(t) = 1 - u^{1/t} + u^{1/t}\ln u^{1/t}$. Како је $1 - k + k\ln k > 0$, за $0 < k < 1$, то је $g'(t) > 0$, $t > 0$, односно, функција g је растућа на $(0,\infty)$. Према томе је низ $\{f_n(u)\}$ растући на $(0,1)$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(u) = \ln\dfrac{1}{u}$, за свако $u \in (0,1)$, на основу Динијеве теореме следи да $f_n \rightrightarrows f$, $n\to\infty$ на сваком компактном скупу у $(0,1)$. Ако се уз ово искористи и аналог Теореме 3.19 за несвојствене параметарске интеграле (3.20), добија се

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1 (1-u^{1/n})^{\alpha-1}du,\ \alpha > 1.$$

Сменом $u = v^n$, из (3.29) добијамо

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\mathrm{B}(n,\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}.$$

Ако је $0 < \alpha \le 1$, тада је

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha+1}(n-1)!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\frac{n}{\alpha+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}.$$

(5) За Гама функцију важи формула

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

Доказ ћемо извести користећи једнакост (3.25) и приказ синуса у облику

$$\sin\pi\alpha = \pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right),\ |\alpha| < 1. \tag{3.26}$$

Једнакост (3.26) ћемо показати у поглављу Фуријеови редови, нешто касније. За $0 < \alpha < 1$ је

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\frac{n^{1-\alpha}(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\alpha(n-\alpha)}\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)^{-1}\right]$$

$$= \alpha^{-1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)^{-1} = \alpha^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-\alpha^2} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Специјално, за $\alpha = \frac{1}{2}$, добијамо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, одакле можемо добити вредност Ојлер-Поасоновог интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

б) Бета функција

Бета функција је дефинисана за $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и непрекидна је по обе променљиве на свом домену.

(1) Сменом $x = 1-t$ у интегралу (3.21) добијамо да је $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha)$.

(2) За $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ важи

$$\mathrm{B}(\alpha.\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha-1,\beta). \tag{3.27}$$

Заиста, парцијалном интеграцијом добијамо

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^\beta dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}dx - \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\right] =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\mathrm{B}(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta),$$

одакле следи (3.27). Користећи симетрију функције B, добијамо да важи

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha,\beta-1), \tag{3.28}$$

за $\alpha>0$ и $\beta>1$.

Како је $\mathrm{B}(\alpha,1)=\dfrac{1}{\alpha}$, то је

$$\mathrm{B}(\alpha,n)=\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)},\ n\in\mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Специјално, ако је $\alpha=m\in\mathbb{N}$, онда је

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

(3) За $\alpha>0,\ \beta>0$ важи

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Претпоставимо прво да је $\alpha>1$ и $\beta>1$ и напишимо $\Gamma(\alpha+\beta)$ у облику

$$\Gamma(\alpha+\beta)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx=(1+y)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)t}dt$$

(овде смо у први интеграл увели смену $x=(1+y)t,\ 0<y<\infty$). Сменом $x=\dfrac{t}{1+t}$ у интегралу (3.21), добија се друга репрезентација функције B:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t)^{\alpha+\beta}}.$$

Користећи овај облик за функцију B, добијамо

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\int\limits_0^\infty\Gamma(\alpha+\beta)\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$$

$$=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)t}dt\right)dy.$$

Докажимо да су испуњени услови Теореме 3.27 за промену редоследа интеграције. Функција $f(t,y) = t^{\alpha+\beta-1}y^{\alpha-1}e^{-(1+y)t}$ је непрекидна и ненегативна на $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Интеграли

$$\int_0^{\infty} f(t,y)dt = y^{\alpha-1}(1+y)^{-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta),$$

$$\int_0^{\infty} f(t,y)dy = t^{\beta-1}e^{-t}\Gamma(\alpha)$$

дефинишу непрекидне функције од $y\in[0,\infty)$, односно $t\in[0,\infty)$ и постоји интеграл

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t,y)dt\right)dy = \mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Према томе, важи

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)t}dy\right)dt$$

$$= \int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}dt\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-yt}dy$$

$$= \int_0^{\infty} t^{\beta-1}e^{-t}dt\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\beta)\Gamma(\alpha).$$

Да бисмо доказали да формула важи за све $\alpha,\beta>0$, довољно је да применимо (3.23), (3.27) и (3.28).

Пример 3.29. 1) Сменом $x^n = t$ у интегралу $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}$, $n\in\mathbb{N}$, добијамо

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t} = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

2) За $\alpha, \beta > -1$, сменом $\sin^2 x = t$ добијамо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$

4 Фуријеов ред

У овом поглављу ћемо поменути још један специјални тип функционалних редова - тригонометријске Фуријеове редове. Они се могу посматрати и као специјални случај општих Фуријеових редова у просторима са скаларним производом и зато ћемо прво утврдити нека својства општих Фуријеових редова.

Дефиниција 4.1. Нека је E реалан векторски простор.
Функција $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ је скаларни производ на E ако за све $x, y, z \in E$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ важи:
(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
(4) $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z \rangle = \lambda_1 \langle x, z \rangle + \lambda_2 \langle y, z \rangle$.

Скаларни производ индукује норму на E дефинисану са

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle, \ x \in E.$$

Важи Коши-Шварцова неједнакост

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \ x, y \in E. \tag{4.1}$$

Дефиниција 4.2. Векторски простор у коме је дефинисан скаларни производ зове се (реални) пред-Хилбертов простор.

Пример 4.3. Нека ја $\mathcal{R}^2[a, b]$ векторски простор реалних функција f дефинисаних на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, таквих да је f^2 интеграбилна на сваком затвореном интервалу који припада (a, b) и $\int_a^b f^2(x) dz$ постоји као Риманов или несвојствен интеграл. Ако се идентификују функције које се разликују на скупу мере нула, тада је са

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx,\ \ f,g\in\mathcal{R}^2[a,b],$$

дефинисан скаларни производ на $\mathcal{R}^2[a,b]$.

Лема 4.4. *Скаларни производ је непрекидан на сваком пред-Хилбертовом простору E у следећем смислу:*

ако $\|f_n-f\|\to 0$ *и* $\|g_n-g\|\to 0$, *тада* $\langle f_n,g_n\rangle\to\langle f,g\rangle$.

Доказ. Користећи (4.1) и особине скаларног производа, добијамо

$$|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle|=|\langle f_n-f,g_n\rangle+\langle f,g_n-g\rangle|\le\|f_n-f\|\|g_n\|+\|f\|\|g_n-g\|\to 0,$$

кад $n\to\infty$ јер је у оба сабирка један чинилац ограничен, а други тежи нули. □

Дефиниција 4.5. Фамилија $\{e_n|\ n\in\mathbb{N}\}$ елемената пред-Хилбертовог простора E зове се ортогонални систем у E ако је

$$\langle e_k,e_n\rangle=\begin{cases}0, & k\ne n\\ \|e_n\|^2>0, & k=n\end{cases}.$$

Ако је још и $\|e_n\|=1,\ n\in\mathbb{N}$, ортогонални систем $\{e_n|\ n\in\mathbb{N}\}$ се зове ортонормирани систем у E.

Пример 4.6. У простору $\mathcal{R}^2[-l,l]$ фамилија

$$\left\{\frac{1}{2},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\dots,\cos\frac{k\pi x}{l},\sin\frac{k\pi x}{l},\dots\right\}\tag{4.2}$$

је ортогонални систем.

Заиста,

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2=\int\limits_{-l}^{l}\frac{1}{4}dx=\frac{l}{2};$$

$$\left\langle\frac{1}{2},\cos\frac{k\pi x}{l}\right\rangle=\int\limits_{-l}^{l}\frac{1}{2}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{l}{2k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=0,\ \ k\ge 1;$$

$$\left\langle\frac{1}{2},\sin\frac{k\pi x}{l}\right\rangle=\int\limits_{-l}^{l}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=-\frac{l}{2k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=0,\ \ k\ge 1;$$

$$\left\langle \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l} \right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0, \quad k,n \geq 1;$$

$$\left\langle \cos\frac{k\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l} \right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \\ l, & k = n \end{cases}, \quad k,n \geq 1;$$

$$\left\langle \sin\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l} \right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \\ l, & k = n \end{cases}, \quad k,n \geq 1.$$

Даље је $\left\|\frac{1}{2}\right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}$, $\left\|\cos\frac{k\pi x}{l}\right\| = \left\|\sin\frac{k\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l}$, $k \geq 1$. Нормирањем система (4.2) добија се систем

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots \tag{4.3}$$

Систем (4.2) назива се основни тригонометријски систем.
У специјалном случају $l = \pi$, систем (4.2) постаје

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots . \cos(kx), \sin(kx), \ldots \tag{4.4}$$

а (4.3) постаје

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \ldots \tag{4.5}$$

Систем (4.4) је ортогоналан у $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$, а систем (4.5) је ортонормиран у $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$.

Општије, може се показати да је систем

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi x}{b-a}, \sin\frac{2\pi x}{b-a}, \ldots, \cos\frac{2k\pi x}{b-a}, \sin\frac{2k\pi x}{b-a}, \ldots$$

ортогоналан у $\mathcal{R}^2[a,b]$.

Пример 4.7. Фамилије

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \ldots$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin\frac{k\pi x}{l}, \dots$$

су ортогонални системи у $\mathcal{R}^2[0,l]$ и називају се косинусним и синусним тригонометријским системом, редом.

Дефиниција 4.8. Нека је E пред-Хилбертов простор са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нека је $\{e_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ ортогонални систем у E. Ако је $x \in E$, бројеви

$$\hat{x}_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle},\ i \in \mathbb{N}$$

зову се Фуријеови коефицијенти елемента x у односу на ортогонални систем $\{e_i |\ i \in \mathbb{N}\}$.

Пример 4.9. За $f \in \mathcal{R}^2[-l,l]$, Фуријеови коефицијенти у односу на основни тригонометријски систем (4.2) су

$$a_0(f) = \frac{\left\langle f, \frac{1}{2} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k(f) = \frac{\left\langle f, \cos\frac{k\pi x}{l} \right\rangle}{\left\langle \cos\frac{k\pi x}{l}, \cos\frac{k\pi x}{l} \right\rangle} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k \geq 1,$$

$$b_k(f) = \frac{\left\langle f, \sin\frac{k\pi x}{l} \right\rangle}{\left\langle \sin\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l} \right\rangle} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ k \geq 1.$$

Убудуће ћемо писати само a_k и b_k уместо $a_k(f)$ и $b_k(f)$, када је јасно о којим се Фуријеовим коефицијентима ради.

Нека је E пред-Хилбертов простор, $\{e_i |\ i = 1, 2, \dots, n\}$ ортогонални систем у E и $x \in E$. За које коефицијенте $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, функција $\left\| x - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|$ има минималну вредност?

Нека су $\hat{x}_i$ Фуријеови коефицијенти елемента x у односу на ортогонални систем $\{e_i |\ i = 1, 2, \dots, n\}$. Тада је

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \hat{x}_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \hat{x}_k)^2 \|e_k\|^2. \tag{4.6}$$

Очигледно, $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|$ има минималну вредност ако је последњи сабирак у (4.6) једнак нули, тј. ако је $\alpha_k = \hat{x}_k$ за $k = 1, \ldots, n$. Тиме је доказана следећа теорема.

Теорема 4.10. *Нека је E пред-Хилбертов простор са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нека је $\{e_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ ортогонални систем у E. Тада за свако $x \in E$ и за било коју линеарну комбинацију $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ важи*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} e_i \right\| \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| = \|x - y\|,$$

при чему једнакост важи само ако је $\alpha_k = \dfrac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}$, $k = 1, \ldots, n$.

Стављајући $\alpha_k = \dfrac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}$, $k = 1, \ldots, n$ у (4.6), добија се Беселова једнакост

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, e_k\rangle^2}{\langle e_k, e_k\rangle}. \tag{4.7}$$

Израз на левој страни једнакости (4.7) није негативан, па је

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, e_k\rangle^2}{\langle e_k, e_k\rangle} \le \|x\|^2. \tag{4.8}$$

Неједнакост важи за свако $n \in \mathbb{N}$.

Низ $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\langle x, e_k\rangle^2}{\langle e_k, e_k\rangle} \right)$ је неопадајући, јер је за свако $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\langle x, e_k\rangle^2}{\langle e_k, e_k\rangle} \ge 0$, ограничен одозго са $\|x\|^2$, па ред $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\langle x, e_k\rangle^2}{\langle e_k, e_k\rangle}$ конвергира. Из (4.8) добијамо Беселову неједнакост

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k\rangle^2}{\langle e_k, e_k\rangle} \le \|x\|^2, \tag{4.9}$$

за произвољан елемент $x \in E$.

Пример 4.11. Ако је $E = \mathcal{R}^2[-l, l]$, а систем $e_1, e_2, \ldots,$ основни тригонометријски систем, неједнакост (4.9) постаје

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2(f) + b_k^2(f)] \leq \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx. \tag{4.10}$$

Дефиниција 4.12. Нека је $\{e_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ ортогонални систем у пред-Хилбертовом простору са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ако $x \in E$, ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} e_k$$

назива се Фуријеов ред елемента x у односу на ортогонални систем $\{e_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ и означава са

$$x \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} e_k.$$

Дефиниција 4.13. Фамилија $\{e_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ елемената пред-Хилбертовог простора E назива се потпуни систем у E ако за свако $x \in E$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји линеарна комбинација $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ таква да је $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon$.

Теорема 4.14. *Нека је E пред-Хилбертов простор са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нека је $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ ортонормирани систем у E. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(1) Систем $\{e_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ је потпун у E.

(2) За свако $x \in E$ важи $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$, тј. $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \to 0$, када $n \to \infty$.

(3) За свако $x \in E$ важи Парсевалова једнакост $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2$.

Доказ. (1) $\Longrightarrow$ (2). Нека је $\varepsilon > 0$. Према претпоставци постоји линеарна комбинација $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ таква да је

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Према Теореми 4.10, коефицијенти α_k се у (4.11) могу заменити са $\langle x, e_k\rangle$, тј.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\| < \varepsilon. \tag{4.12}$$

На основу Беселове једнакости (4.7) закључујемо да, ако је $m \geq n$, тада је

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\|,$$

што, на основу (4.12), значи да за свако $m,\ m \geq n$, следи

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\| < \varepsilon.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). Користећи непрекидност скаларног производа (Лема 4.4), добијамо

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k, \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle^2 .$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). Из Беселове једнакости (4.7) и претпоставке

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 \right) = 0,$$

закључујемо да је

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\| = 0.$$

$\square$

4.1 Тригонометријски Фуријеов ред

У Теореми 4.14 видели смо да Фуријеов ред елемента x, у односу на ортонормирани систем $\{e_k|\ k \in \mathbb{N}\}$ у E, конвергира у норми простора E, која је индукована скаларним производом на E, елементу x ако и само ако је систем $\{e_k|\ k \in \mathbb{N}\}$ потпун у E. Таква конвергенција се назива конвергенција у средњем.

Ако су $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ реални бројеви, ред

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{4.13}$$

назива се тригонометријски ред, а његове парцијалне суме

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{4.14}$$

називају се тригонометријски полиноми.
Ако ред (4.13) конвергира на $\mathbb{R}$, његова сума је $2l-$периодична функција. Сада нас занима под којим условима се $2l-$периодична функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ може представити тригонометријским редом (4.13).
Претпоставимо да је $2l-$периодична функција f представљена тригонометријским редом (4.13) и нека ред конвергира униформно на $\mathbb{R}$. Тада, користећи ортогоналност основног тригонометријског система у $\mathcal{R}^2[-l,l]$, видимо да је

$$a_0 = a_0(f) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ k \geq 1, \tag{4.15}$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ k \geq 1.$$

Закључујемо да, у том случају, коефицијенти реда су Фуријеови коефицијенти функције $f \in C[-l,l] \subset \mathcal{R}^2[-l,l]$ у односу на основни тригонометријски систем. Интеграли (4.15) постоје ако је f апсолутно интеграбилна функција на $[-l,l]$.

Дефиниција 4.15. Нека је $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ апсолутно интеграбилна функција на интервалу $[-l,l]$. Функцији f придружен ред

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{4.16}$$

где су коефицијенти реда израчунати по формулама (4.15), назива се тригонометријски Фуријеов ред функције f.

Ако је функција $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ парна, тада је

$$a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}, \; k \geq 0, \qquad\qquad b_k = 0, \; k \geq 1,$$

а ако је непарна, тада је

$$a_k = 0, \; k \geq 0, \qquad\qquad b_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \; k \geq 1.$$

(1) Конвергенција тригонометријског Фуријеовог реда

Према Дефиницији 4.15, апсолутно интеграбилној функцији f на интервалу $[-l, l]$ може се придружити Фуријеов ред. То придруживање означили смо са $\approx$. Такође смо показали да, ако придружени тригонометријски ред конвергира равномерно на $\mathbb{R}$, тада његова сума је функција f. Сада ћемо говорити о конвергенцији тригонометријског Фуријеовог реда. За то ће нам бити потребан следећи интегрални облик његових парцијалних сума.

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{k\pi x}{l} + \left(\frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} + \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} \right) \right] dt$$

$$= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi (t-x)}{l} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi (t-x)}{l} \right] dt. \tag{4.17}$$

Означимо $D_n(u) = 1 + 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi u}{l}$.

Сада је $S_n(x) = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int\limits_{-l}^{l} f(t)D_n(x-t)dt.$

Рачунамо $D_n(u)$:

$$D_n(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{ik\pi u}{l}} + e^{\frac{-ik\pi u}{l}}}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{i\pi u}{l}}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{-i\pi u}{l}}\right)^k = \sum_{k=-n}^{n}\left(e^{\frac{i\pi u}{l}}\right)^k$$

$$= e^{\frac{-in\pi u}{l}}\left(1 + e^{\frac{i\pi u}{l}} + e^{\frac{i2\pi u}{l}} + \cdots + e^{\frac{i2n\pi u}{l}}\right) = e^{\frac{-in\pi u}{l}} \frac{\left(1 - e^{\frac{i(2n+1)\pi u}{l}}\right)}{1 - e^{\frac{i\pi u}{l}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{-in\pi u}{l}}\left(1 - e^{\frac{i(2n+1)\pi u}{l}}\right)}{-e^{\frac{i\pi u}{2l}}\left(e^{\frac{i\pi u}{2l}} - e^{\frac{-i\pi u}{2l}}\right)} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{l}} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{l}}}{e^{\frac{i\pi u}{2l}} - e^{\frac{-i\pi u}{2l}}}$$

$$= \frac{2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{l}}{2i\sin\frac{\pi u}{2l}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{l}}{\sin\frac{\pi u}{2l}}. \tag{4.18}$$

Функција D_n се назива Дирихлеово језгро. Његова својства наводимо у следећој теореми.

Теорема 4.16. *Дирихлеово језгро D_n има следећа својства:*
(1) D_n је $2l-$периодична функција на $\mathbb{R}$;
(2) За свако $n \in \mathbb{N}$ је $\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int\limits_{-l}^{l} D_n(u)du = 1$;
(3) За свако $\delta \in (0,l)$ следи да $\displaystyle\int\limits_{\delta}^{l} D_n(u)du \to 0$, кад $n \to \infty$.

Доказ. (1) Из $D_n(u+2l) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{\frac{ik\pi(u+2l)}{l}} = \sum_{k=-n}^{n} e^{\frac{ik\pi u}{l}}e^{i2k\pi} = \sum_{k=-n}^{n} e^{\frac{ik\pi u}{l}} = D_n(u)$, следи да је функција D_n $2l-$периодична. Парност следи из (4.18).
(2) Како је $\displaystyle\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{ik\pi u}{l}}du = 0$ за $k \neq 0$, то је

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} D_n(u)du = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{ik\pi u}{l}}du = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{i0\pi u}{l}}du = 1.$$

(3) Ова особина је специјални случај следеће теореме. □

Теорема 4.17. *(Риман)*
Нека је функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ интеграбилна на сваком интервалу $[c,d]\subset(a,b)$ и нека $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ постоји као Риманов или несвојствени интеграл. Тада је $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0.$

Доказ. Нека је $\varepsilon>0$. Изаберимо интервал $[c,d]\subset(a,b)$ тако да је

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int\limits_c^d f(x)e^{i\lambda x}dx\right| < \varepsilon. \tag{4.19}$$

Такав интервал $[c,d]$ постоји јер је $|f|$ интеграбилна функција на (a,b) и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int\limits_c^d f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \le \int\limits_a^c |f(x)|dx + \int\limits_d^b |f(x)|dx.$$

Према претпоставци $f_{[c,d]}\in\mathcal{R}[c,d]$, па постоји подела $P: c=x_0<x_1<\cdots<x_n=d$ интервала $[c,d]$ таква да је

$$0\le \int\limits_c^d f(x)dx - s(f,P) < \varepsilon, \tag{4.20}$$

где је $s(f,P)=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$, $m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$.

Нека је функција $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ дефинисана са $g(x)=m_k$, $x\in[x_{k-1},x_k)$, $1\le k\le n$. Очигледно је $g(x)\le f(x)$, $x\in[c,d]$, па, према (4.20), закључујемо да је

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\int\limits_c^d f(x)e^{i\lambda x}dx - \int\limits_c^d g(x)e^{i\lambda x}dx\right| &\le \int\limits_c^d (f(x)-g(x))|e^{i\lambda x}|dx \\ &= \int\limits_c^d f(x)dx - s(f,P) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Важи и

$$\int\limits_c^d g(x)e^{i\lambda x}dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)e^{i\lambda x}dx = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}}{i\lambda}.$$

Како је $|e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}| \leq 2$, следи

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int\limits_c^d g(x)e^{i\lambda x}dx = 0. \tag{4.22}$$

Крај доказа следи из (4.19), (4.21) и (4.22) јер

$$\left| \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \right| \leq \left| \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int\limits_c^d f(x)e^{i\lambda x}dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_c^d f(x)e^{i\lambda x}dx - \int\limits_c^d g(x)e^{i\lambda x}dx \right| + \left| \int\limits_c^d g(x)e^{i\lambda x}dx \right|.$$

$\square$

Примедба 4.18. Раздвајајући реални и имагинарни део интеграла у управо доказаној Римановој теореми, добијамо да је

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0, \quad \lim_{|\lambda|\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0,$$

па, из Дефиниције 4.15, следи да Фуријеови коефицијенти $a_k(f)$ и $b_k(f)$ апсолутно интеграбилне функције $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ теже нули кад $k \to \infty$.

Теорема 4.19. *(Риманов принцип локализације)*
Нека је f $2l-$периодична апсолутно интеграбилна функција. Тада за свако $\delta \in (0, l)$ парцијална сума тригонометријског Фуријеовог реда функције f у било којој тачки $x \in \mathbb{R}$ може се написати у облику

$$S_n(x) = \frac{1}{2l} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x-t)D_n(t)dt + o(1),$$

где је $o(1)$ нула низ који зависи од δ и x.

Примедба 4.20. Ако је функција $2l-$периодична и апсолутно интеграбилна на интервалу $[-l,l]$, тада је апсолутно интеграбилна на сваком интервалу $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и важи

$$\int_a^{a+2l} |f(x)|dx = \int_{-l}^{l} |f(x)|dx.$$

Доказ. С обзиром на то да су функције f и D_n $2l-$периодичне, увођењем смене $x-t=u$ добијамо да важи

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x-u)D_n(u)du.$$

Сада следи

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\left(\int_{-l}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{l}\right) f(x-t)D_n(t)dt. \tag{4.23}$$

Сменом $t=-u$ добија се $\displaystyle\int_{-l}^{-\delta} f(x-t)D_n(t)dt = \int_{\delta}^{l} f(x+t)D_n(t)dt$. Дакле, према (4.23) је

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2l}\int_{\delta}^{l} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{\sin\frac{\pi t}{2l}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}dt. \tag{4.24}$$

Функција $\left|\sin\dfrac{\pi t}{2l}\right|^{-1}$ је ограничена на интервалу $[\delta,l]$. Зато, последњи интеграл у (4.24) је $o(1)$, $n\to\infty$, на основу Риманове теореме. $\square$

Теорема 4.21. *(Динијева теорема)*
Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2l-$периодична аполутно интеграбилна функција на интервалу $[-l,l]$. Ако су у тачки $x\in\mathbb{R}$ испуњени Динијеви услови:

(а) функција f има у тачки x леву и десну граничну вредност, тј. постоје граничне вредности $f(x-)=\lim\limits_{t\to 0+} f(x-t)$ и $f(x+)=\lim\limits_{t\to 0+} f(x+t)$,

(б) интеграли $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}dt$ и $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}dt$ конвергирају апсолутно за неко $\varepsilon>0$,

тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у тачки x и важи

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k(f) \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}. \tag{4.25}$$

Доказ. Користећи интегрални облик (4.23) парцијалне суме $S_n(x)$, реда (4.25), и Теорему 4.16 (својства (1) и (2)), добијамо

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{0} f(x-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2l}\int_{0}^{l} f(x-t)D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{0}^{l} [f(x-t) + f(x+t)]D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_{0}^{l} \left[\frac{f(x-t) - f(x-)}{2} + \frac{f(x+t) - f(x+)}{2} + \frac{f(x-) + f(x+)}{2}\right] D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_{0}^{l} \left[\frac{f(x-t) - f(x-)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} + \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\right] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}dt$$
$$+\frac{f(x-) + f(x+)}{2}. \tag{4.26}$$

Како $2\sin\dfrac{\pi t}{2l} \sim \dfrac{\pi t}{l},\ t \to 0$, функције

$$t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x-)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}, \qquad t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}$$

задовољавају услове Риманове теореме 4.17. Због тога је

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1} \left[\frac{f(x-t) - f(x-)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} + \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\right] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}dt = 0,$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{f(x-) + f(x+)}{2}$. □

Приметимо да Теорема 4.21 остаје да важи ако се услов (б) замени условом (в) Постоје константе $\delta > 0$, $K > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ тако да је

$$|f(x+t) - f(x+)| \leq Kt^{\alpha}, \qquad |f(x-t) - f(x-)| \leq Kt^{\alpha} \tag{4.27}$$

за све $t \in (0, \delta)$.

Следећа теорема је последица Динијеве теореме 4.21.

Теорема 4.22. *(Липшицова теорема)*
Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2l-$периодична апсолутно интеграбилна функција на интервалу $[-l, l]$. Ако у тачки $x \in \mathbb{R}$ важи Хелдеров услов:

$$(\exists \delta > 0)(\forall t)(|t| < \delta \Longrightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq K|t|^{\alpha},\ 0 < \alpha \leq 1), \tag{4.28}$$

тада Фуријеов ред функције f конвергира у тачки x ка $f(x)$.

Доказ. Из (4.28) следи да је $\lim\limits_{t \to 0}(f(x+t) - f(x)) = 0$, што значи да је функција f непрекидна у тачки x. Други Динијев услов следи из неједнакости

$$\frac{|f(x \pm t) - f(x)|}{|t|} \leq K|t|^{\alpha-1}$$

и чињенице да је $\int\limits_0^{\varepsilon} t^{\alpha-1} dt < \infty$, за свако $\varepsilon > 0$. □

Теорема 4.23. *Нека је f $2l-$периодична део по део непрекидно диференцијабилна функција на интервалу $[-l, l]$. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира*
(а) $f(x)$ у свакој тачки $x \in (-l, l)$ у којој је функција непрекидна,
(б) $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$ у свакој тачки $x \in (-l, l)$ прекида функције f,
(в) вредности $\dfrac{f(-l+) + f(l-)}{2}$ у тачкама $x = -l$ и $x = l$.

Ово следи јер се коришћењем Лагранжове теореме о средњој вредности може закључити да функција f испуњава (4.27), за $\alpha = 1$, па тиме и све услове Динијеве теореме.

(2) Равномерна конвергенција Фуријеовог реда

Теорема 4.24. *Нека је $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ непрекидна, део по део непрекидно диференцијабилна функција и $f(-l) = f(l)$. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира функцији f апсолутно и равномерно на интервалу $[-l, l]$.*

Доказ. Како је $\left|a_k \cos\frac{k\pi x}{l}\right| \leq |a_k|$ и $\left|b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right| \leq |b_k|$, $k \in \mathbb{N}$, довољно је, на основу Вајерштрасове теореме, да се докаже да ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ конвергира. Парцијалном интеграцијом добијамо

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l} - \frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{l}{k\pi}b'_k, \ k \geq 1,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l} + \frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{l}{k\pi}a'_k, \ k \geq 1, \tag{4.29}$$

јер је $f(l)\cos k\pi - f(-l)\cos(-k\pi) = 0$. Са a'_k и b'_k означени су Фуријеови коефицијенти функције f', која припада простору $\mathcal{R}^2[-l, l]$.

Из (4.29) следи

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{l}{\pi}\left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k}\right) \leq \frac{l}{\pi}\left(|a'_k|^2 + |b'_k|^2 + \frac{1}{2k^2}\right). \tag{4.30}$$

Друга неједнакост у (4.30) следи из $0 \leq \left(|a'_k| - \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(|b'_k| - \frac{1}{2k}\right)^2$. На основу Беселове неједнакости (4.10),

$$\frac{{a'_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}({a'_k}^2 + {b'_k}^2) \leq \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'^2(x)dx,$$

закључујемо да ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty}({a'_k}^2 + {b'_k}^2)$ конвергира. Ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ такође конвергира, па из (4.30) следи конвергенција реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$. □

Последица 4.25. *(Вајерштрас)*
Нека је $f \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тада, за свако $\varepsilon > 0$ постоји тригонометријски полином T_n ($l = \pi$) такав да је $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

Доказ. Функција је равномерно непрекидна на $[-\pi,\pi]$, па се лако може дефинисати функција $\varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, део по део линеарна, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, таква да је

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.31}$$

Према претходној теореми, низ (T_n) парцијалних сума Фуријеовог реда функције φ равномерно конвергира на $[-\pi,\pi]$ функцији φ, па, према томе,

$$\exists n_0\ \forall n\ n \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |T_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.32}$$

Из (4.31) и (4.32) следи доказ.

□

Наводимо још једну последицу Теореме 4.24.

Последица 4.26. *(Диференцирање тригонометријског Фуријеовог реда)*
Нека је $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ непрекидна, део по део непрекидно диференцијабилна функција и нека је $f(-l) = f(l)$. Тада се тригонометријски Фуријеов ред функције

$$f' \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k' \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k' \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

може добити формалним диференцирањем тригонометријског Фуријеовог реда функције f,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right),$$

тј. $a_k' = \dfrac{k\pi}{l} b_k$ и $b_k' = -\dfrac{k\pi}{l} a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Последица 4.27. *(Интеграција Фуријеовог реда)*
Нека је функција $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ део по део непрекидна. Тада се њен тригонометријски Фуријеов ред

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

може интегралити члан по члан и важи

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\left(1-\cos\frac{k\pi x}{l}\right) + \frac{a_k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{4.33}$$

Доказ. Дефинишимо функцију $F : [-l,l] \to \mathbb{R}$ са $F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt$. Функција F је непрекидна на $[-l,l]$, део по део непрекидно диференцијабилна ($F'(x) = f(x) - a_0/2$ у свакој тачки x у којој је функција f непрекидна) и важи

$$F(l) - F(-l) = \int_0^l f(t)dt - \frac{a_0 l}{2} - \int_0^{-l} f(t)dt - \frac{a_0 l}{2} = \int_{-l}^{l} f(t)dt - a_0 l = 0.$$

Пошто функција F испуњава услове Теореме 4.24, њен Фуријеов ред конвергира функцији F равномерно на $[-l,l]$ и зато је

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{k\pi x}{l} + B_k\sin\frac{k\pi x}{l},\ x\in[-l,l], \tag{4.34}$$

где $A_0 = a_0(F),\ A_k = a_k(F),\ B_k = b_k(F)$. Сада добијамо

$$A_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{l}{k\pi}b_k,\ k\in\mathbb{N}, \tag{4.35}$$

$$B_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{l}{k\pi}a_k,\ k\in\mathbb{N}. \tag{4.36}$$

Из (4.34), (4.35) и (4.36) следи

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \frac{A_0}{2} + \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos\frac{k\pi x}{l} + \frac{a_k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{4.37}$$

Стављајући $x = 0$, добијамо

$$\frac{A_0}{2} = \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}. \tag{4.38}$$

Из (4.37) и (4.38) следи (4.33). □

Пример 4.28. Нека је $f(x) = \cos\alpha x,\ |x| \le \pi,\ |\alpha| < 1,\ f(x+2\pi) = f(x)$. Функција f је парна па важи

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x dx = \frac{2}{\alpha\pi}\sin\alpha x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\alpha\pi}\sin\alpha\pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\alpha+k)x + \cos(\alpha-k)x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\alpha+k)x}{\alpha+k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\alpha-k)x}{\alpha-k}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+k)\pi}{\alpha+k} + \frac{\sin(\alpha-k)\pi}{\alpha-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\pi\cos k\pi}{\alpha+k} + \frac{\sin\alpha\pi\cos k\pi}{\alpha-k}\right) = (-1)^k\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k}\right) =$$

$$= (-1)^k\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2},\ k \ge 1,$$

$$b_k = 0,\ k \ge 1.$$

Према Теореми 4.24 је

$$\cos\alpha x = \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right).$$

За $x = \pi$ добијамо

$$\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}.$$

Ако је $|\alpha| \le \alpha_0 < 1$, тада је $\dfrac{1}{|\alpha^2 - n^2|} \le \dfrac{1}{n^2 - {\alpha_0}^2}$. Према томе, ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$ конвергира равномерно по α на интервалу $[-\alpha_0, \alpha_0]$, па се може интегралити члан по члан, тј.

$$\int_0^x \left(\frac{\cos \pi\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{\pi\alpha}\right) d\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2\alpha \; d\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

што даје

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

На основу тога добијамо

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \; |x| < 1.$$

Ову једнакост смо најавили у (3.26), када смо изводили особине Гама функције.

Теорема 4.29. *За сваку функцију* $f \in \mathcal{R}^2[-l, l]$ *и за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји тригонометријски полином* T_n *такав да је*

$$\|f - T_n\| = \left(\int_{-l}^{l} (f(x) - T_n(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Доказ. (1) Посматрајмо функцију $f_\delta : [-l, l] \to \mathbb{R}, \; 0 < \delta < l$,

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < l - \delta \\ \\ 0, & l - \delta \le |x| \le l \end{cases}.$$

Тада је

$$\|f - f_\delta\|^2 = \int_{-l}^{-l+\delta} f^2(x) dx + \int_{l-\delta}^{l} f^2(x) dx. \tag{4.39}$$

Према претпоставци, $f \in \mathcal{R}^2[-l, l]$, па се, према (4.39), δ може изабрати тако да је

$$\|f - f_\delta\| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.40}$$

(2) Функција $f_\delta \in \mathcal{R}[-l+\delta, l-\delta]$, што значи да постоји $M > 0$ тако да за свако $x \in [-l+\delta, l-\delta]$ важи $|f_\delta(x)| \le M$ и, такође, постоји подела $P: -l+\delta = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l-\delta$ тако да је

$$\int\limits_{-l+\delta}^{l-\delta} f_\delta(x)dx - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon^2}{32M}, \tag{4.41}$$

где је $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f_\delta(x)$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Нека је

$$g(x) = \begin{cases} m_k, & x \in [x_{k-1}, x_k),\ k = 1, 2, \ldots, n \\ \\ 0, & x \in [-l, -l+\delta) \cup [l-\delta, l] \end{cases}.$$

Очигледно важи

$$x \in [-l, l] \Longrightarrow (f_\delta(x) - g(x))^2 \le 2M(f_\delta(x) - g(x)). \tag{4.42}$$

Користећи (4.41) и (4.42), добијамо

$$\|f_\delta - g\|^2 = \int\limits_{-l}^{l} (f_\delta - g)^2(x)dx \le 2M \int\limits_{-l+\delta}^{l-\delta} (f_\delta(x) - g(x))dx$$

$$= 2M \left[\int\limits_{-l+\delta}^{l-\delta} f_\delta(x)dx - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \right] < \frac{\varepsilon^2}{16}. \tag{4.43}$$

(3) Нека је δ_1 довољно мало, тако да су интервали $(x_j - \delta_1, x_j + \delta_1)$, $0 \le j \le n$, дисјунктни, да је $-l < x_0 - \delta_1$ и $x_n + \delta_1 < l$ и да је $8M^2\delta_1(n+1) < \dfrac{\varepsilon^2}{16}$.

Дефинишимо функцију $g_{\delta_1} : [-l, l] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$g_{\delta_1}(x) = g(x),\ x \in [-l, x_0 - \delta_1] \cup \cup_{j=0}^{n-1} [x_j + \delta_1, x_{j+1} - \delta_1] \cup [x_n + \delta_1, l],$$

односно, $g_{\delta_1}(x)$ је линеарна функција на интервалима $[x_j - \delta_1, x_j + \delta_1]$, $j = 0, 1, \ldots, n$, која је одређена тачкама $(x_j - \delta_1, g(x_j - \delta_1))$ и $(x_j + \delta_1, g(x_j + \delta_1))$.

Из $|g_{\delta_1}(x)| \leq M,\ x \in [-l, l]$, следи

$$\|g - g_{\delta_1}\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{x_j-\delta_1}^{x_j+\delta_1} (g(x) - g_{\delta_1}(x))^2 dx \leq$$

$$\leq 4M^2 \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{x_j-\delta_1}^{x_j+\delta_1} dx = 8M^2\delta_1(n+1) < \frac{\varepsilon^2}{16}. \tag{4.44}$$

(4) Функција g_{δ_1} задовољава услове Теореме 4.24. Према томе,

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{x\in[-l,l]} |g_{\delta_1}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2l}}, \tag{4.45}$$

где је S_n низ парцијалних сума тригонометријског Фуријеовог реда функције g_{δ_1} на интервалу $[-l, l]$.

Из (4.45) следи

$$\forall n \geq n_0 \Longrightarrow \|g_{\delta_1} - S_n\| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.46}$$

Користећи неједнакост троугла и релације (4.40), (4.43), (4.44) и (4.46) закључујемо да важи $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow \|f - S_n\| < \varepsilon$. □

Приметимо да смо, заправо, доказали да је основни тригонометријски систем потпун у $\mathcal{R}^2[-l, l]$.

Према Теореми 4.14 закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 4.30. *(Конвергенција тригонометријског Фуријеовог реда у средњем и Парсевалова једнакост)*
Тригонометријски Фуријеов ред функције $f \in \mathcal{R}^2[-l, l]$ конвергира функцији f у средњем, тј.

$$\left\| f - \left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k(f) \sin\frac{k\pi x}{l} \right) \right\| \to 0,\ n \to \infty, \tag{4.47}$$

и важи Парсевалова једнакост

$$\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f))^2 + (b_k(f))^2 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} (f(x))^2 dx. \tag{4.48}$$

Својство (4.47) је специјални случај својства (2) у Теореми 4.14, а (4.48) је специјални случај својства (3) у истој теореми.

5 Фуријеов интеграл

Непериодична функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не може се развити на читавој реалној правој у Фуријеов ред по неком тригонометријском систему. Међутим, под одређеним условима, могуће је развијање у континуални аналогон Фуријеовог реда - Фуријеов интеграл.

Претпоставимо да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовољава услов да се у произвољном интервалу $(-l, l)$ може развити у тригонометријски Фуријеов ред

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n(f) \sin \frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2} + b_n(f) \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2i}.$$

Ако дефинишемо $c_k(f),\ k \in \mathbb{Z}$, са

$$c_k(f) = \begin{cases} \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}, & k = 1, 2, \dots \\ \\ \frac{a_0(f)}{2}, & k = 0 \\ \\ \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}, & k = -1, -2, \dots \end{cases},$$

горњи Фуријеов ред се може написати у комплексној форми

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{\frac{ik\pi x}{l}}.$$

Из интегралних формула за Фуријеове коефицијенте функције f, добијамо

$$c_k(f) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{ik\pi t}{l}} dt.$$

Ако дефинишемо функцију $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$C(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt,$$

претпостављајући да је f апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}$, онда је за $x_k = \dfrac{k\pi}{l}$

$$C(x_k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{ik\pi t}{l}} dt \sim \frac{l}{\pi} c_k(f),$$

за l довољно велико, што повлачи да је

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{l} C(x_k) e^{\frac{ik\pi x}{l}}.$$

Ова сума представља неку врсту интегралне суме интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{ixt} dt$. Дакле, под одређеним претпоставкама, може се очекивати да се f може представити у облику $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{ixt} dt$.

Дефиниција 5.1. Функција $\hat{f}(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$ назива се Фуријеова трансформација функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и означава се $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$.
Овде је $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_{-A}^{A}$ (главна вредност интеграла).

Дефиниција 5.2. Фуријеов интеграл функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назива се интеграл $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$.

Пример 5.3. Ако је

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin at}{t}, & t \neq 0 \\ a, & t = 0 \end{cases},$$

$a > 0$, тада интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ не конвергира апсолутно, али његова главна вредност постоји, па је

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A}\frac{\sin at}{t}e^{-ixt}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin at\cos xt}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin at\cos xt}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin{(a+x)t}}{t}dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin{(a-x)t}}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}(\operatorname{sgn}(a+x) + \operatorname{sgn}(a-x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \leq a \\ \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Приметимо да Фуријеова транформација функције f из овог примера, која није апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}$, јесте прекидна функција $\hat{f}$. Наиме, важи следећи став.

Став 5.4. *Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}$ и интеграбилна на сваком интервалу $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тада важи:*
(1) $\hat{f}$ је непрекидна функција на $\mathbb{R}$;
(2) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$;
(3) $\hat{f}(x) \to 0,\ |x| \to \infty$.

Доказ. Из $|f(t)e^{-ixt}| \leq |f(t)|$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$ следи да је функција $\hat{f}$ дефинисана на $\mathbb{R}$ и да важи (2).

Докажимо (1). Нека је $h > 0$ и $A > 0$. Тада је

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)[e^{-i(x+h)t} - e^{-ixt}]dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{\infty}|f(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}|f(t)||e^{-i(x+h)t} - e^{-ixt}|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt + \frac{1}{\pi}\int_{A}^{\infty}|f(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\sup_{|t|\leq A}|e^{-ith}-1|\int_{-A}^{A}|f(t)|dt.$$

Прва два интеграла теже нули кад $A \to \infty$ јер је $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$. Трећи сабирак тежи нули кад $h \to 0$ (за фиксирано A). Према томе је $\lim_{h\to 0}\hat{f}(x+h) = \hat{f}(x)$, за $x \in \mathbb{R}$.

Својство (3) је последица Риманове теореме 4.17. □

Теорема 5.5. *Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ апсолутно интеграбилна и локално део по део непрекидна (тј. део по део непрекидна на сваком коначном сегменту). Ако функција f задовољава Динијев услов (из Теореме 4.21) у тачки $x \in \mathbb{R}$, тада Фуријеов интеграл функције f конвергира у тачки x и важи једнакост*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{itx}dt. \tag{5.1}$$

Доказ. Према преходном ставу, функција $\hat{f}$ је непрекидна на $\mathbb{R}$ и, према томе, интеграбилна на сваком сегменту $[-l, l]$, $l > 0$. Примењујући Теорему 3.25, добијамо

$$I_l(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iut}du\right]e^{ixt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\int_{-l}^{l}e^{-i(u-x)t}dt\right]du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\int_{-l}^{l}(\cos t(x-u) + i\sin t(x-u))dt\right]du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{\sin l(x-u)}{x-u}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)\sin lt}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+t)\frac{\sin lt}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin lt}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin lt\,dt.$$

Како је $\int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \int\limits_0^\infty \frac{\sin lt}{t} dt = \frac{\pi}{2},\ l > 0$, закључујемо да је

$$I_l(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x+t) + f(x-t)}{t} \sin lt\, dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty (f(x+) + f(x-)) \frac{\sin lt}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \sin lt\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \sin lt\, dt.$$

Докажимо да први интеграл у добијеном збиру тежи нули кад $l \to \infty$. Слично се доказује да и други сабирак тежи нули кад $l \to \infty$.

Напишимо први интеграл у облику

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \sin lt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \sin lt\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_1^\infty \frac{f(x+t)}{t} \sin lt\, dt - \frac{f(x+)}{\pi} \int\limits_1^\infty \frac{\sin lt}{t} dt =$$

$$= I_1(l,x) + I_2(l,x) - I_3(l,x).$$

Према претпоставци је $\int\limits_0^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \right| dt < \infty$ (Динијев услов), па је $\lim\limits_{l\to\infty} I_1(l,x) = 0$, на основу Риманове теореме. Како је $\int\limits_1^\infty |f(x+t)| dt < \infty$, то је и $\int\limits_1^\infty \left| \frac{f(x+t)}{t} \right| dt < \infty$, па је опет, на основу Риманове теореме, $\lim\limits_{l\to\infty} I_2(l,x) = 0$.

Како је $I_3(l,x) = \frac{f(x+)}{\pi} \int\limits_l^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ и интеграл $\int\limits_l^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ конвергира, то је и $\lim\limits_{l\to\infty} I_3(l,x) = 0$. Тиме смо доказали да је

$$\lim_{l\to\infty} I_l(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

тј. да важи (5.1). $\square$

Последица 5.6. *Ако је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}$ и део по део глатка на сваком коначном интервалу, тада њен Фуријеов интеграл конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ и његова вредност је $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

Примедба 5.7. Ако је $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинишимо са

$$F[\varphi](x) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{ixt} dt, \ x \in \mathbb{R},$$

интегралну трансформацију којом се функцији φ додељује функција $F[\varphi]$. У специјалном случају, када је $\varphi = \hat{f}$ за неку функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F[\varphi] = F[\hat{f}]$ је Фуријеов интеграл функције f. Ако је он једнак функцији f за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. $F[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$, (ако су, на пример, испуњени услови претходне последице уз додатни услов да је $f \in C(\mathbb{R})$, тада је и $\mathcal{F}[F[f]](x) = f(x)$.
Заиста,

$$\mathcal{F}[F[f]](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{itu} du \right] e^{-itx} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-itu} du \right] e^{itx} dt = f(x).$$

Због тога се често трансформација F назива инверзном Фуријеовом транфор-мацијом и означава са $F = \mathcal{F}^{-1}$.

Пример 5.8. Ако је $g(x) = e^{-a|x|}, \ a > 0$, тада је

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos tx \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-at} \cos tx \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2},$$

па је

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t) e^{itx} dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+t^2} e^{itx} dt = \frac{2a}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos tx}{a^2+t^2} dt = e^{-a|x|}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Наведимо још неколико основних својстава Фуријеове трансформације.

Став 5.9. *Ако је* $f \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ *и све функције* $f, f', \dots, f^{(k)}$ *су апсолутно интеграбилне на* $\mathbb{R}$, *тада*
(1) за свако m, $0 \le m \le k$, *важи* $\widehat{f^{(m)}}(x) = (ix)^m \hat{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
(2) $\hat{f}(x) = O(|x|^{-m})$, $|x| \to \infty$, *за* $0 \le m \le k$.

Доказ. Довољно је доказати став за $1 \le m \le k$. Како интеграл $\int\limits_0^\infty f'(t)dt$ конвергира и како је $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$, постоје граничне вредности $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и обе су једнаке нули јер је $\int\limits_{-\infty}^\infty |f(t)|dt < \infty$. На исти начин закључујемо да је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = \dots = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(m-1)}(x) = 0$.

Закључак (1) добијамо парцијалном интеграцијом

$$\widehat{f^{(m)}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f^{(m)}(t) e^{-itx} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[f^{(m-1)}(t) e^{-itx} \Big|_{-\infty}^\infty + ix \int\limits_{-\infty}^\infty f^{(m-1)}(t) e^{-itx} dt \right] =$$

$$= ix \widehat{f^{(m-1)}}(x) = \dots = (ix)^m \hat{f}(x).$$

Својство (2) следи из $\hat{f}(x) = (ix)^{-m} \widehat{f^{(m)}}(x)$ и $\widehat{f^{(m)}}(x) \to 0$, кад $x \to \pm\infty$ (Риманова теорема). □

Став 5.10. *Нека је функција* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локално интеграбилна и функција* $x^k f(x)$, $k \in \mathbb{N}$, *апсолутно интеграбилна на* $\mathbb{R}$. *Тада*
(1) $\hat{f} \in C^{(k)}(\mathbb{R})$;
(2) важи једнакост $\hat{f}^{(k)}(x) = (-i)^k (\widehat{x^k f})$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказ. Пошто је функција $x^k f(x)$ апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}$, функције $x f(x)$, $x^2 f(x) \dots,$ $x^{k-1} f(x)$ су, такође, апсолутно интеграбилне на $\mathbb{R}$. Према томе, примењујући правило за диференцирање несвојственог параметарског интеграла

(Теорема 3.23), добијамо

$$\hat{f}'(x) = \frac{-i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-itx} dt, \ldots, \hat{f}^{(k)}(x) = \frac{(-i)^k}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) e^{-itx} dt.$$

Према Ставу 3.21, $\hat{f}^{(k)} \in C(\mathbb{R})$, тј. $\hat{f} \in C^{(k)}(\mathbb{R})$. $\square$