30. IV 2020.

Површински интеграл прве врсте

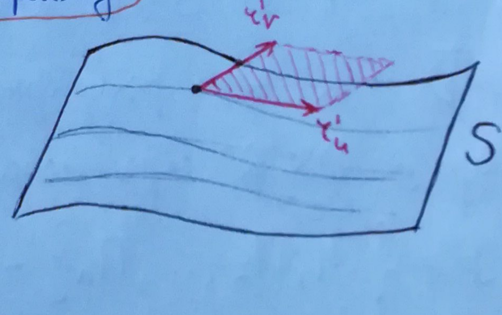
Ако је $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација криве c, знамо да је

$$\underbrace{l(c)}_{\text{дужина криве } c}=\int_a^b \|r'(t)\|\,dt. \qquad (1)$$

Дакле, дужину криве добијамо тако што интегралимо дужине тангентних вектора (при некој регуларној параметризацији) по параметарском скупу (сегменту $[a,b]$).

Ако је $r:\overline{D}\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација површи S, онда (у свакој тачки те површи) имамо два тангентна вектора r'_u и r'_v. Они образују паралелограм (дакле, дводимензиону фигуру) чија је површина једнака $\underbrace{\|r'_u\times r'_v\|}_{\text{интензитет векторског производа}}$. Зато, по аналогији с формулом (1), важи да је

$$\boxed{\underbrace{P(S)}_{\text{површина површи } S}=\iint_{\overline{D}}\|r'_u\times r'_v\|\,du\,dv.} \qquad (2)$$



Дакле, површину површи добијамо тако што интегралимо површине поменутих паралелограма (при некој регуларној параметризацији) по параметарском скупу. Овде је параметарски скуп затворење ограничене области у $\mathbb{R}^2$ (што је мерљив скуп), па је овде реч о двоструком интегралу.

За доказ формуле (2) неопходно је дефинисати појам површине површи у $\mathbb{R}^3$. Ми то нећемо радити, па дакле, ова формула остаје без доказа. Уместо тога, илуструјемо је једним (добро познатим) примером – рачунамо површину сфере (лопте) полупречника R.

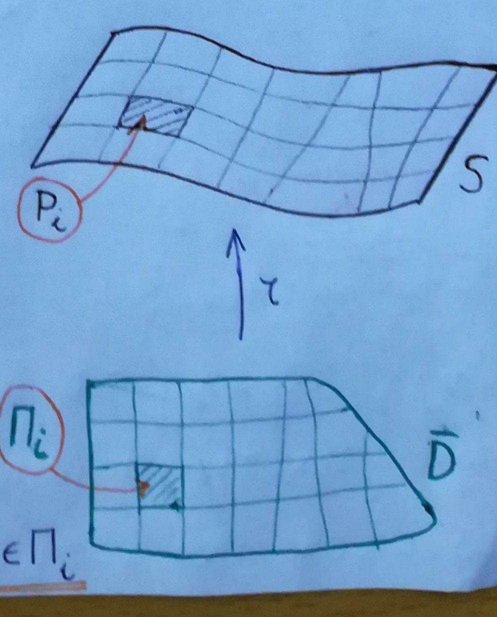
Пример: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

в. стр. 15 претходног предавања

$$P(S) = \iint_{\overline{D}} \| r'_u \times r'_v \| \, du\, dv = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^2 \sin v \, du\, dv \overset{\text{Фубини}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} R^2 \sin v \, dv\right) du$$

$$= 2\pi \cdot R^2 \cdot \underbrace{(-\cos v)\Big|_0^{\pi}}_{=2} = 4R^2\pi$$

Нека је сад $S \subset \mathbb{R}^3$ глатка површ и $r: \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација (где је $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена област).



$P = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}$ – подела скупа $\overline{D}$ на мерљиве скупове

$P_i := r(\Pi_i) \subseteq S, \quad i = \overline{1,n}$

$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – скуп истакнутих тачака $A_i \in \Pi_i$.

$C_i := \tau(A_i) \in P_i \quad , \quad i = \overline{1,n}$

$\Delta S_i := \operatorname{diam} P_i \quad , \quad i=\overline{1,n} \quad ; \quad \tilde{\lambda}(\mathcal{P}) := \max\limits_{1\le i\le n} \Delta S_i$

Ако је још и $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ скаларно поље на површи S, дефинишемо интегралну суму фје f која одговара подели $\mathcal{P}$ са истакнутим тачкама $\mathcal{A}$:

$$\boxed{\sigma(f, S, \mathcal{P}, \mathcal{A}) := \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\cdot P(P_i).}$$

Дефиниција: Реалан број I са својством

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall (\mathcal{P},\mathcal{A}))\ \tilde{\lambda}(\mathcal{P})<\delta \Rightarrow |\sigma(f,S,\mathcal{P},\mathcal{A}) - I| < \varepsilon$$

називамо површинским интегралом (прве врсте) скаларног поља f на површи S, и означавамо га са

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS \text{ , или краће, са } \iint\limits_S f\,dS.$$

Доказује се да ова дефиниција не зависи од избора регуларне параметризације површи S.

На сличан начин као код криволинијског интеграла (стр. $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$ предавања од 16. IV) може се доказати да важи наредни став, који представља основни алат за израчунавање површинског интеграла прве врсте. Он каже да је тај интеграл једнак известном двоструком интегралу (по параметарском скупу).

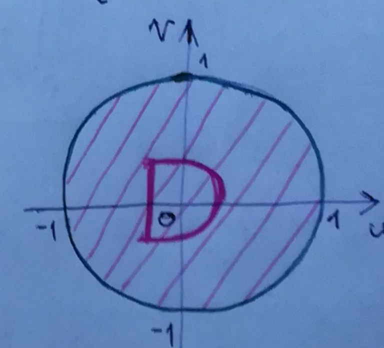
Став: Ако је S глатка површ, $r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација и f непрекидно скаларно поље на S, онда постоји $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$ и важи једнакост:

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{\overline{D}} f(r(u,v)) \cdot \| r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) \| \, du\,dv.}$$

Као и пре, у наставку ћемо векторе $r'_u(u,v)$ и $r'_v(u,v)$ краће записивати као r'_u и r'_v, подразумевајући при том да они зависе од параметара u и v.

Пример: Израчунати $\iint\limits_S z^2\,dS$, где је S део површи $z = xy$ унутар цилиндра $x^2+y^2=1$.

S је график функције $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi(u,v) = uv$, $\overline{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq 1\}$



(в. пример 1) на стр. $\boxed{14}$ предавања од прошлог четвртка). Зато је једна регуларна параметризација површи S дата са:

$$r(u,v) = (u, v, uv) \quad , \quad (u,v) \in \overline{D}$$

$$r'_u = (1, 0, v) \quad , \quad r'_v = (0, 1, u) \quad , \quad r'_u \times r'_v = (-v, -u, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \| r'_u \times r'_v \| = \sqrt{1+u^2+v^2}$$

$$\iint\limits_S z^2\,dS = \iint\limits_{\bar{D}} u^2 v^2 \sqrt{1+u^2+v^2}\,du\,dv \underset{\text{поларна смена}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot\sqrt{1+r^2}\,dr\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta\cdot\underbrace{\int_0^1 r^5\sqrt{1+r^2}\,dr}$$

смена: $t=\sqrt{1+r^2}$

$r^2 = t^2-1$

$\cancel{2}r\,dr = \cancel{2}t\,dt$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\,d\theta\cdot\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)^2\cdot t^2\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\int_1^{\sqrt{2}}(t^6-2t^4+t^2)\,dt = \ldots$$

Сад наводимо став који даје основне особине површинског интеграла прве врсте и који је потпуно аналоган одговарајућем ставу код криволинијских интеграла прве врсте (стр. $\boxed{7}$, 16.IV). Он следи из формуле (2), претходног става и одговарајућих особина двоструког интеграла.

Став: Нека је S глатка површ, f и g непрекидна скаларна поља на S и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

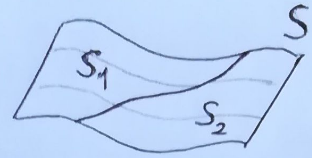
(а) $\displaystyle\iint\limits_S\big(\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)\big)\,dS = \alpha\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS + \beta\iint\limits_S g(x,y,z)\,dS$;

[линеарност]

(б) ако је $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$ за све $(x,y,z)\in S$, онда је

$\displaystyle\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS \le \iint\limits_S g(x,y,z)\,dS$; [монотоност] (в) $\iint\limits_S dS = P(S)$;

(г) ако су S_1 и S_2 глатке површи такве да је $S_1 \cup S_2 = S$ и $P(S_1 \cap S_2) = 0$, онда је



$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)\,dS$$

[адитивност]

(д) $\left(\exists (x_0,y_0,z_0) \in S\right) \quad \iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = f(x_0,y_0,z_0) \cdot P(S)$.

[Теорема о средњој вредности за површински интеграл]

Део-по-део глатка површ S јесте унија глатких површи $S_1, S_2, \dots, S_k$,

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k}$$

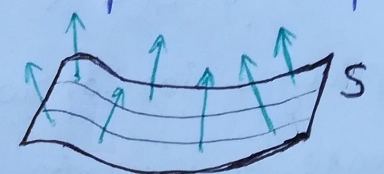
таквих да је $P(S_i \cap S_j) = 0$ кад год је $i \neq j$. За такву површ S и скаларно поље $f : S \to \mathbb{R}$ дефинишемо:

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS := \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)\,dS + \dots + \iint\limits_{S_k} f(x,y,z)\,dS.}$$

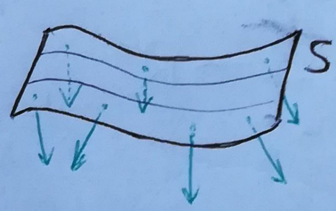
Може се доказати да претходни став важи и за (овако дефинисан) површински интеграл прве врсте на део-по-део глатким површима, с тим што за особину (д) још треба претпоставити да је S повезана (ова дефиниција део-по-део глатке површи допушта могућност да она не буде повезана — на пример, може да се деси да је $S_1 \cap S_i = \emptyset$ за све $i \geq 2$).

Површински интеграл друге врсте

Као код криволинијских интеграла, површински интеграл прве врсте био је интеграл скаларног поља, а површински интеграл друге врсте биће интеграл векторског поља на датој површи. Прича која следи (о површинском интегралу друге врсте) биће потпуно аналогна оној коју смо имали код криволинијског интеграла друге врсте, само се уместо тангентних вектора (на криву) ради с векторима нормале на површ.



горња страна површи S



доња страна површи S

Оријентација површи је избор једне од две стране те површи. Оријентисана површ је површ са одабраном (фиксираном) оријентацијом. Ако је S, на пример, график неке функције (в. стр. $\boxed{14}$ с прошлог предавања), онда она има горњу и доњу страну – и то су две могуће оријентације те површи. Затворене површи (на пример, сфера, елипсоид ...) имају спољашњу и унутрашњу страну итд.

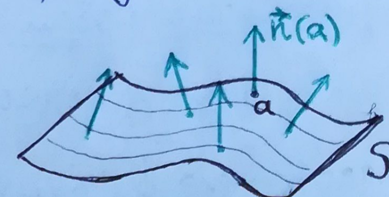
Оријентација површи се обично задаје експлицитним навођењем стране (горња, доња, унутрашња, спољашња, лева, десна, ...), али може и преко њене регуларне параметризације. Наиме, ако је $r: \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ једна таква параметризација, знамо да су вектори

$r'_u \times r'_v$ вектори нормале на површ, па они одређују једну страну (оријентацију) те површи – ону на коју „показују".

На пример, параметризација графика ф-је дата на стр. 14 прошлог предавања одређује његову горњу страну, док параметризација сфере дата на стр. 15 одређује њену унутрашњу страну.

Напоменимо узгред да, за разлику од кривих, не може се свака површ оријентисати. Постоје тзв. неоријентабилне површи које немају две стране, већ само једну. Пример такве површи је Мебијусова трака, али ми се овде нећемо сретати са неоријентабилним површима.

Ако је $S \subset \mathbb{R}^3$ глатка оријентисана површ, онда на S имамо непрекидно векторско поље јединичних вектора нормале на ту површ у смеру одређеном оријентацијом. То векторско поље ћемо означавати са $\vec{n}$.



$\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$, $\vec{n}(x,y,z)$ је јединични вектор нормале на површ S у т. $(x,y,z) \in S$ усмерен на страну одређену оријентацијом.

Ако је $r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ регуларна параметризација оријентисане површи S која одређује задату оријентацију од S, онда је

$$\boxed{\vec{n}\big(r(u,v)\big) = \frac{r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)}{\| r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) \|}} \quad \text{за све } (u,v) \in D. \tag{+}$$

Дефиниција: Нека је S глатка оријентисана површ и F векторско поље на S (дакле, $F : S \to \mathbb{R}^3$).

Површински интеграл (друге врсте) векторског поља F на површи S јесте површински интеграл (прве врсте) скаларног поља $F \cdot \vec{n}$ на површи S (ако постоји овај површински интеграл прве врсте).

скаларни производ

Означавамо га са $\iint\limits_S F \cdot \vec{dS}$, или, ако је $F = (P, Q, R)$, са $\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$.

Дакле, $\boxed{\iint\limits_S F \cdot \vec{dS} := \iint\limits_S F \cdot \vec{n}\, dS.}$

Став: Ако је S глатка оријентисана површ, $r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација која одређује њену задату оријентацију и F непрекидно векторско поље на S, онда је

$$\boxed{\iint\limits_S F \cdot \vec{dS} = \iint\limits_{\overline{D}} F(r(u,v)) \cdot (r'_u \times r'_v)\, du\,dv.}$$

скаларни производ

$$\Delta:\ \iint\limits_S F \cdot \vec{dS} = \iint\limits_S F \cdot \vec{n}\, dS \overset{\text{став са стр. } \boxed{4}}{=} \iint\limits_{\overline{D}} \Big(F(r(u,v)) \cdot \vec{n}(r(u,v))\Big) \|r'_u \times r'_v\|\, du\,dv$$

обично множење

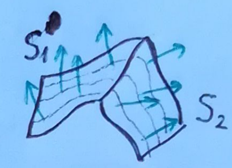
$$\overset{(+)}{=} \iint\limits_{\overline{D}} F(r(u,v)) \cdot (r'_u \times r'_v)\, du\,dv. \quad \checkmark$$

■

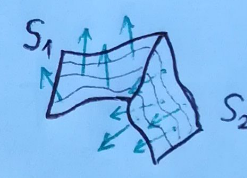
Ако је S^- површ која се добија од оријентисане површи S променом оријентације (дакле, иста површ, само супротно оријентисана), онда је $\vec{n}^- = -\vec{n}$, па имамо:

$$\iint_{S^-} F\cdot d\vec{S} = \iint_{S^-} F\cdot \vec{n}^-\, dS = -\iint_{S^-} F\cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{S} F\cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{S} F\cdot d\vec{S}.$$

Оријентацију део-по-део глатке површи



сагласно



несагласно

$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ дефинишемо као сагласно оријентисање (глатких) површи $S_1, S_2, \dots, S_k$.

Тако и површински интеграл (друге врсте) векторског поља F на оријентисаној део-по-део глаткој површи S дефинишемо на следећи начин:

$$\iint_S F\cdot d\vec{S} := \iint_{S_1} F\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} F\cdot d\vec{S} + \dots + \iint_{S_k} F\cdot d\vec{S}.$$

Попут криволинијског интеграла друге врсте, и површински интеграл друге врсте има особине линеарности и адитивности. Оне лако следе из одговарајућих особина површинског интеграла прве врсте (и билинеарности скаларног производа), као и код криволинијског (стр. $\boxed{14}$, 16. $\boxed{\text{IV}}$).

Став: Нека је S (део-по-део) глатка оријентисана површ, F и G непрекидна векторска поља на S и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(а) $$\iint_S (\alpha F + \beta G)\cdot \vec{dS} = \alpha \iint_S F\cdot \vec{dS} + \beta \iint_S G \cdot \vec{dS} \; ;$$

[линеарност]

(б) ако је $S = S_1 \cup S_2$, где су S_1 и S_2 (део-по-део) глатке површи оријентисане сагласно са S, при чему је $P(S_1 \cap S_2) = 0$, онда је

$$\iint_S F\cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} F\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} F\cdot \vec{dS}.$$ [адитивност]

За крај ове лекције илуструјмо на једном примеру како се рачуна површински интеграл друге врсте (користимо став са стр. $\boxed{9}$).

Пример: Израчунати $\iint_S F\cdot\vec{dS}$, где је S спољна страна сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$, а $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$.

На стр. $\boxed{15}$ предавања од прошлог четвртка имамо параметризацију ове сфере: $r(u,v) = (R\sin v\cos u, R\sin v \sin u, R\cos v)$, $(u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$; али она (као што смо утврдили) одређује унутрашњу страну сфере, па ћемо зато додати један минус испред. Знамо и да је $r'_u \times r'_v = (-R^2\sin^2 v\cos u, -R^2\sin^2 v \sin u, -R^2 \sin v\cos v)$,

а имамо и $F(r(u,v)) = (R^3\sin^3 v\cos^3 u, R^3 \sin^3 v \sin^3 u, R^3\cos^3 v)$. (*)

$$\iint_S F\cdot d\vec{S} \overset{\text{став са стр. } \boxed{9}}{=\!=} -\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} F(r(u,v))\cdot(r'_u\times r'_v)\,du\,dv$$

$$\overset{(*)}{=\!=} \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^5 \sin v\,(\sin^4 v\cos^4 u + \sin^4 v\sin^4 u + \cos^4 v)\,du\,dv$$

$$\overset{\text{Фубини}}{=\!=} R^5\cdot \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin^5 v\,(\cos^4 u + \sin^4 u)\,dv + \int_0^{\pi}\cos^4 v\sin v\,dv\right)du$$

$$= R^5\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin^5 v\,dv\cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}(\cos^4 u+\sin^4 u)\,du}_{=:J} + 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\cos^4 v\sin v\,dv\right)$$

смена: $t=\cos v$

$dt=-\sin v\,dv$

$$= R^5\left(\frac{3\pi}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(1-t^2)^2\,dt + 2\pi\int_{-1}^{1}t^4\,dt\right)$$

$$= R^5\left(3\pi\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,dt + 4\pi\int_0^1 t^4\,dt\right)$$

$$= R^5\cdot\pi\cdot\left(3\cdot\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{5}\right) = R^5\pi\cdot\left(3-2+\frac{7}{5}\right) = \boxed{\frac{12R^5\pi}{5}}$$

$$J = 8\int_0^{\pi/2}\cos^4 u\,du = 4\cdot \underset{\text{Бета функција}}{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = 4\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\underset{\text{Гама функција}}{\Gamma}(3)} = 4\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

Ову (сложену) рачуницу смо извели овако детаљно да бисмо у наредној лекцији на овом примеру илустровали снагу формуле Гауса и Остроградског. Тамо ћемо овај задатак (помоћу те формуле) урадити у два потеза.

Формула Гауса и Остроградског

Оператор градијента ∇ скаларном пољу (реалној функцији) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ додељује векторско поље $\nabla f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Биће нам корисно овакво неформално разматрање: ако симбол ∇ третирамо као уређену тројку, тј. „вектор" $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, онда је ∇f у ствари множење „вектора" ∇ скаларом f здесна.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\implies \nabla f=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Ово се чита „набла".

На сличан начин, помоћу симбола $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ можемо да дефинишемо још један оператор, дивергенцију, који, пак, векторском пољу $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F=(P,Q,R)$, додељује скаларно поље $\nabla\cdot F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

$$\nabla\cdot F=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R):=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

дивергенција векторског поља F

„скаларни производ"

Поред ознаке $\nabla\cdot F$ за дивергенцију векторског поља F користи се још и ознака $\operatorname{div} F$. Ово неформално разматрање дивергенције као

„Скаларног производа" „вектора" ∇ и вектора F првенствено треба схватити као олакшицу за памћење овог појма и његово упоређивање са сродним појмовима (градијентом и ротором, којим ћемо се бавити следећег четвртка), а наравно, формална дефиниција би била:

$$F=(P,Q,R) \quad , \qquad \operatorname{div} F := P'_x + Q'_y + R'_z .$$

Теорема: (формула Гауса и Остроградског) Нека је T ограничена област у $\mathbb{R}^3$ таква да је ∂T део-по-део глатка површ. Ако је S спољна страна површи ∂T и F непрекидно-диференцијабилно векторско поље на $\overline{T}$, онда је

$$\boxed{\iint\limits_{S} F\cdot \overrightarrow{dS} = \iiint\limits_{\overline{T}} \nabla\cdot F \, dxdydz .}$$

Δ: Доказ је сличан доказу Гринове формуле. Извешћемо га само за случај да је T тзв. елементарна област, а у случају произвољне области поступа се као у доказу Гринове формуле (дата област се равнима паралелним с координатним равнима подели на коначно много елементарних области, примени се адитивност површинског, односно троструког интеграла ...).

Нека је, дакле, T елементарна област. То значи да се $\overline{T}$ може представити у следећа три облика (где су D_1, D_2 и D_3 мерљиви скупови који су пројекције тела $\overline{T}$, редом, на координатне равни

xOy, xOz и yOz, а $f, g, \varphi, \psi, \alpha$ и β неке непрекидне, део-по-део глатке функције две променљиве):

$$\overline{T} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_1,\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\} \quad (1)$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,z)\in D_2,\ \varphi(x,z)\le y\le \psi(x,z)\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y,z)\in D_3,\ \alpha(y,z)\le x\le \beta(y,z)\}.$$

Ако је $F=(P,Q,R)$, онда је

$$F=(P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R)\ ;\quad \nabla\cdot F = P'_x + Q'_y + R'_z .$$

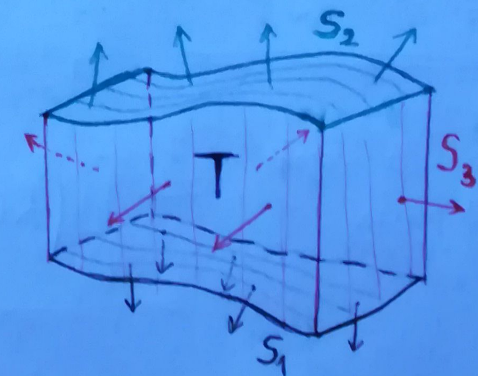
Због линеарности оба интеграла (и површинског друге врсте и троструког) довољно је доказати наредне три једнакости (тражена једнакост се добија њиховим сабирањем):

$$\iint_S (P,0,0)\cdot\vec{dS} = \iiint_{\overline{T}} P'_x\,dx\,dy\,dz\ ,\quad \iint_S (0,Q,0)\cdot\vec{dS} = \iiint_{\overline{T}} Q'_y\,dx\,dy\,dz\ ,\quad \iint_S (0,0,R)\cdot\vec{dS} = \iiint_{\overline{T}} R'_z\,dx\,dy\,dz$$

Доказаћемо трећу, а прве две се доказују потпуно аналогно. Користимо представљање (1) тела $\overline{T}$ и његову границу S делимо на три дела: $S = S_1\cup S_2\cup S_3$,

$$S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_1,\ z=f(x,y)\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_1,\ z=g(x,y)\},$$

S_3 – „омотач"



Вектори нормале $\vec{n}(x,y,z)$ за $(x,y,z)\in S_3$ имају z-координату једнаку нули (паралелни су са xOy равни), па је зато

$$\iint\limits_{S_3} (0,0,R)\cdot \overrightarrow{dS} = \iint\limits_{S_3} \underbrace{(0,0,R)\cdot \vec{n}}_{=0}\, dS = 0.$$

S_1 и S_2 параметризујемо као на стр. $\boxed{14}$ прошлог предавања:

S_1: $\gamma_1(u,v) = (u,v,f(u,v))$, $(u,v)\in D_1$ (Ова параметризација нам даје горњу страну површи, а нама треба доња.)

S_2: $\gamma_2(u,v) = (u,v,g(u,v))$, $(u,v)\in D_1$

$$\iint\limits_{S} (0,0,R)\cdot \overrightarrow{dS} = \iint\limits_{S_1} (0,0,R)\cdot \overrightarrow{dS} + \iint\limits_{S_2} (0,0,R)\cdot \overrightarrow{dS} + \underbrace{\iint\limits_{S_3} (0,0,R)\cdot \overrightarrow{dS}}_{=0}$$

адитивност површинског интегр. II врсте

став са стр. $\boxed{9}$

$$= -\iint\limits_{D_1} \Big(0,0,R(u,v,f(u,v))\Big)\cdot\left(-f'_u, -f'_v, 1\right) du\,dv +$$

$$+ \iint\limits_{D_1} \Big(0,0,R(u,v,g(u,v))\Big)\cdot\left(-g'_u, -g'_v, 1\right) du\,dv$$

$$= \iint\limits_{D_1} \Big(R(u,v,g(u,v)) - R(u,v,f(u,v))\Big)\, du\,dv$$

Фубини

$$\iiint\limits_{T} R'_z\, dx\,dy\,dz \overset{(1)}{=} \iint\limits_{D_1} \left(\int\limits_{f(x,y)}^{g(x,y)} R'_z(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy$$

Њутн-Лајбницова формула

$$= \iint\limits_{D_1} \Big(R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\Big)\, dx\,dy.$$

$\blacksquare$

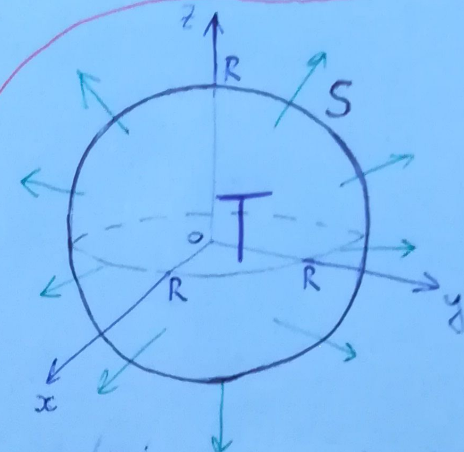
За крај овог предавања, као што смо и најавили, урадићемо пример са стр. 11 (и 12) помоћу формуле Гауса и Остроградског.

$$F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3) \implies \nabla \cdot F = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

S – спољна страна сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$

$\implies$ $S = \partial T$, где је

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < R^2\}$$



$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_T (3x^2+3y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz \underset{\text{прелазак на сферне координ.}}{=} 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R \rho^4 \sin\varphi\, d\rho\right) d\varphi\right) d\theta$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi}_{=2} \cdot \underbrace{\int_0^R \rho^4\, d\rho}_{=\frac{R^5}{5}} = \boxed{\frac{12R^5\pi}{5}}$$