26. III 2020.

Условни екстремуми

Дефиниција: Нека су $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ реалне функције n променљивих и нека је

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = \dots = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Ако је $f : D_f \to \mathbb{R}$, $S \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, онда екстремуме (тачке екстремума) рестрикције $f|_S$ називамо <u>условним екстремумима</u> (<u>тачкама условних екстремума</u>) <u>функције f</u> <u>под условима</u> <u>$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0$</u>, <u>$\varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0$</u>, $\dots$, <u>$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0$</u>.

Подсетимо се да је рестрикција $f|_S : S \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f|_S(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n)$ за $(x_1, \dots, x_n) \in S$. Дакле, исто је правило придруживања, само је домен сужен на S. Кад тражимо условне екстремуме просто игноришемо све тачке које нису у S, тј. све тачке које не задовољавају услове.

Горња дефиниција обухвата и глобалне и локалне екстремуме. Нпр. т. $a_0 \in S$ је тачка условног глобалног максимума ф-је f ако

$$(\forall a \in S) \quad f(a) \leq f(a_0).$$

Тада је број $f(a_0)$ условни глобални максимум ф-је f, односно највећа вредност фје f на скупу S.

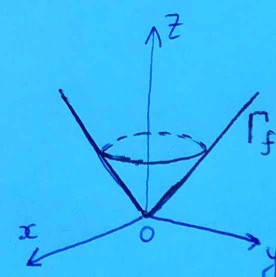
Слично, нпр. $a_0 \in S$ је тачка условног локалног минимума фје f ако

$$(\exists \delta>0)\left(\forall a \in B(a_0;\delta)\cap S\right)\quad f(a_0)\le f(a).$$

Јасно је да ако је $a_0\in S$ тачка (глобалног или локалног) екстремума фје f, онда је a_0 и тачка (глобалног или локалног) условног екстремума фје f. Наиме, ако одговарајућа неједнакост важи за све тачке скупа D_f (односно, у локалном случају, скупа $B(a_0;\delta)\cap D_f$), онда свакако важи и за све тачке подскупа S (односно, $B(a_0;\delta)\cap S$).

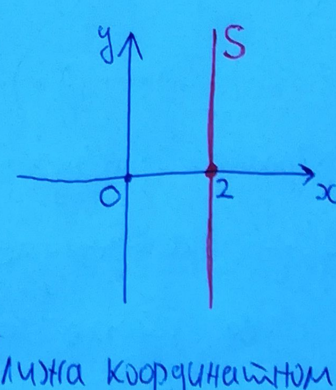
Обрнуто, пак, не мора да важи.

Пример: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y):=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$



Знамо да f има само једну тачку глобалног (и локалног) екстремума, и то минимум у т. $(0,0)$.

Нека је сад и $S:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2\}$.



Фја f, дакле, нема екстремума на ск. S. Међутим, има условних екстремума: има условни глобални минимум у тачки $(2,0)\in S$. Наиме, од свих тачака на правој S, $(2,0)$ је најближа координатном почетку, тј. норма јој је најмања.

$\boxed{\text{Дефиниција:}}$ Кажемо да су (непрекидно-)диференцијабилне (реалне) ф-је n променљивих $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ <u>независне</u> <u>у тачки</u> <u>$a_0 \in \mathbb{R}^n$</u> ако су вектори (градијенти)

$$\nabla\varphi_1(a_0),\ \nabla\varphi_2(a_0),\ \dots,\ \nabla\varphi_k(a_0)$$

линеарно независни (у векторском простору $\mathbb{R}^n$).

Размотримо ову дефиницију у два специјална случаја:

$\boxed{n=3,\ k=1}$ Ако је $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y,z)=0\}$, $a_0 \in S$ и φ независна у тачки a_0, онда то заправо значи да је $\nabla\varphi(a_0) \neq \vec{0}$, односно да је <u>$S$ површ регуларна у т. a_0</u>.

$\underline{\underline{\varphi := \varphi_1}}$

$\boxed{n=3,\ k=2}$ Ако је $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(x,y,z) = \varphi_2(x,y,z) = 0\}$, и φ_1 и φ_2 независне у свим тачкама $a \in S$, онда је S у ствари пресек две регуларне површи у $\mathbb{R}^3$, а услов да су вектори $\nabla\varphi_1(a)$ и $\nabla\varphi_2(a)$ линеарно независни (неколинеарни) обезбеђује да је тај пресек једна регуларна (глатка) крива. (На последњем предавању ово смо неформално звали „трансверзалан" пресек двеју површи.) Дакле, <u>S је регуларна крива</u>.

Уопште, можемо (грубо) рећи:

<u>$\dim S = n - k$</u> , <u>независност = регуларност</u>.

Теорема: Нека су реалне ф-је n променљивих $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ независне у свим тачкама скупа

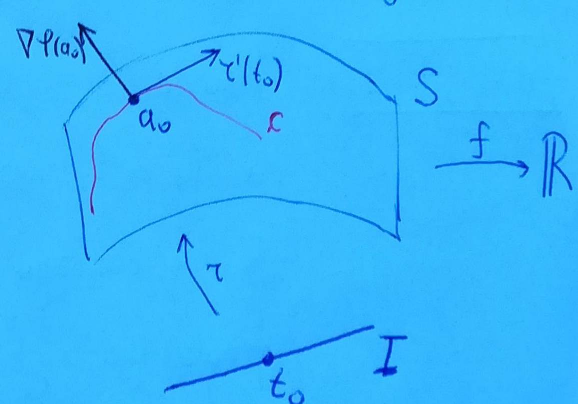
$$S=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1,\dots,x_n)=\varphi_2(x_1,\dots,x_n)=\dots=\varphi_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\}.$$

Ако је $f:D_f\to\mathbb{R}$, $S\subseteq D_f\subseteq\mathbb{R}^n$, диференцијабилна на скупу S и $a_0\in S$ тачка условног локалног екстремума ф-је f (тј. тачка локалног екстремума ф-је $f|_S$), онда постоје $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\in\mathbb{R}$ т. д. је

$$\boxed{\nabla f(a_0)=\lambda_1\cdot\nabla\varphi_1(a_0)+\lambda_2\cdot\nabla\varphi_2(a_0)+\dots+\lambda_k\cdot\nabla\varphi_k(a_0).}$$

Δ: Доказаћемо теорему само у два претходно разматрана случаја.

$\boxed{n=3,\ k=1:}$ $\quad\varphi:=\varphi_1$



Нека је c произвољна крива на површи S која пролази кроз т. $a_0=(x_0,y_0,z_0)$ и нека је $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација.

$\underline{t_0\in I}$ т. д. је $\underline{\underline{\gamma(t_0)=a_0}}$.

Како је a_0 тачка условног локалног екстремума ф-је f, а $\gamma(I)=c\subseteq S$, то је t_0 тачка локалног екстремума (диференцијабилне) ф-је $f\circ\gamma: I\to\mathbb{R}$

$$\xrightarrow{\text{Фермаова теорема}}\ \boxed{(f\circ\gamma)'(t_0)=0.}$$

Ако је $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, онда је по правилу ланца:

скаларни производ

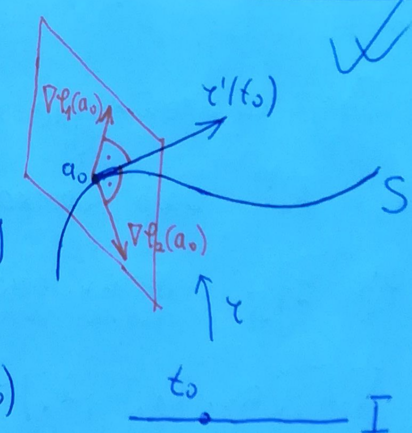
$$(f\circ\gamma)'(t)=f'_x(\gamma(t))\cdot x'(t)+f'_y(\gamma(t))\cdot y'(t)+f'_z(\gamma(t))\cdot z'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t).$$

$\Longrightarrow\quad \nabla f(\underbrace{\tau(t_0)}_{=a_0})\cdot\tau'(t_0)=0$, тј. $\nabla f(a_0)\perp\tau'(t_0)$.

$\Longrightarrow$ $\nabla f(a_0)$ је ортогоналан на тангенту на произвољну криву на површи S која пролази кроз тачку a_0.

$\Longrightarrow$ $\nabla f(a_0)$ је ортогоналан на тангентну раван $T_{a_0}S$, тј. колинеаран је с вектором $\nabla\varphi(a_0)$.

Како је $\nabla\varphi(a_0)\neq 0$, то постоји $\lambda\in\mathbb{R}$ т.д. је $\nabla f(a_0)=\lambda\cdot\nabla\varphi(a_0)$.



$\boxed{n=3,\ k=2:}$ S је крива у простору $\mathbb{R}^3$

Како је S пресек двеју површи $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(x,y,z)=0\}$ и $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi_2(x,y,z)=0\}$, то је тангента на криву S у т. a_0 ортогонална и на вектор $\nabla\varphi_1(a_0)$ и на вектор $\nabla\varphi_2(a_0)$ (јер крива S припада и једној и другој површи).

$\tau: I\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација криве S, $t_0\in I$ т.д. $\tau(t_0)=a_0$

На исти начин као у доказу првог случаја добијамо

$$\nabla f(a_0)\perp\tau'(t_0).$$

Међутим, и линеарно независни вектори $\nabla\varphi_1(a_0)$ и $\nabla(\varphi_2)(a_0)$ су ортогонални на $\tau'(t_0)$ и чине базу одговарајућег дводимензионог потпростора од $\mathbb{R}^3$ (у питању је потпростор свих вектора ортогоналних на $\tau'(t_0)$).

$\Longrightarrow\ (\exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R})\quad \nabla f(a_0)=\lambda_1\cdot\nabla\varphi_1(a_0)+\lambda_2\cdot\nabla\varphi_2(a_0)$.

Уз ознаке из теореме, уочимо фју $n+k$ променљивих:

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k) := f(x_1,\dots,x_n) - \lambda_1\varphi_1(x_1,\dots,x_n) - \dots - \lambda_k\varphi_k(x_1,\dots,x_n)$$

$$\Rightarrow \nabla F = \left(f'_{x_1} - \lambda_1(\varphi_1)'_{x_1} - \dots - \lambda_k(\varphi_k)'_{x_1}, \dots, f'_{x_n} - \lambda_1(\varphi_1)'_{x_n} - \dots - \lambda_k(\varphi_k)'_{x_n}, -\varphi_1, \dots, -\varphi_k\right)$$

$$\Rightarrow \left[\nabla F(\underset{\mathbb{R}^n}{a}, \lambda_1,\dots,\lambda_k) = \underset{\mathbb{R}^{n+k}}{0} \iff \nabla f(a) - \lambda_1\nabla\varphi_1(a) - \dots - \lambda_k\nabla\varphi_k(a) = \underset{\mathbb{R}^n}{0} \text{ и } \boxed{\varphi_1(a) = \dots = \varphi_k(a) = 0}\right]$$

$$\boxed{\varphi_1(a) = \dots = \varphi_k(a) = 0} \iff a \in S$$

Сад из претходне теореме изводимо следећи закључак: да би тачка $a_0 \in \mathbb{R}^n$ била тачка локалног (самим тим, и глобалног) екстремума фје $f|_S$ неопходно је да постоје $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ такви да је $\nabla F(a_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k) = 0$.

Ова функција F назива се Лагранжовом функцијом, а коефицијенти $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ Лагранжовим множиоцима.

Пример: Одредити најмању и највећу вредност функције
$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
на сфери $x^2+y^2+z^2 = 9$.

Означимо ову сферу са $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overbrace{x^2+y^2+z^2-9}^{=:\varphi(x,y,z)} = 0\}$.

Како је сфера S компактан скуп, а фја f непрекидна (јер је полиномијална), то по Вајерштрасовој теореми постоје тачке

$a_0, b_0 \in S$ такве да за све $(x,y,z) \in S$ важи

$$f(a_0) \leq f(x,y,z) \leq f(b_0).$$

Наш задатак је да нађемо бројеве $f_{min} := f(a_0)$ и $f_{max} := f(b_0)$.

Формирајмо Лагранжову функцију:

$$F(x,y,z,\lambda) = \underbrace{x^2+2y^2+3z^2}_{= f(x,y,z)} - \lambda(\underbrace{x^2+y^2+z^2-9}_{= \varphi(x,y,z)})$$

Из претходног разматрања закључујемо да ће важити

$\nabla F(a_0, \lambda) = 0$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\nabla F(b_0, \tilde{\lambda}) = 0$ за неко (друго) $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Зато решавамо наредни систем једначина:

$$F'_x = 2x - 2\lambda x = 2(1-\lambda)x = 0$$
$$F'_y = 4y - 2\lambda y = 2(2-\lambda)y = 0$$
$$F'_z = 6z - 2\lambda z = 2(3-\lambda)z = 0$$
$$F'_\lambda = 9 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

...

и добијамо шест кандидата за тачке a_0 и b_0:

за $\lambda = 1$: $M_{1,2}(\pm 3, 0, 0)$, $f(M_{1,2}) = 9$

за $\lambda = 2$: $M_{3,4}(0, \pm 3, 0)$, $f(M_{3,4}) = 18$

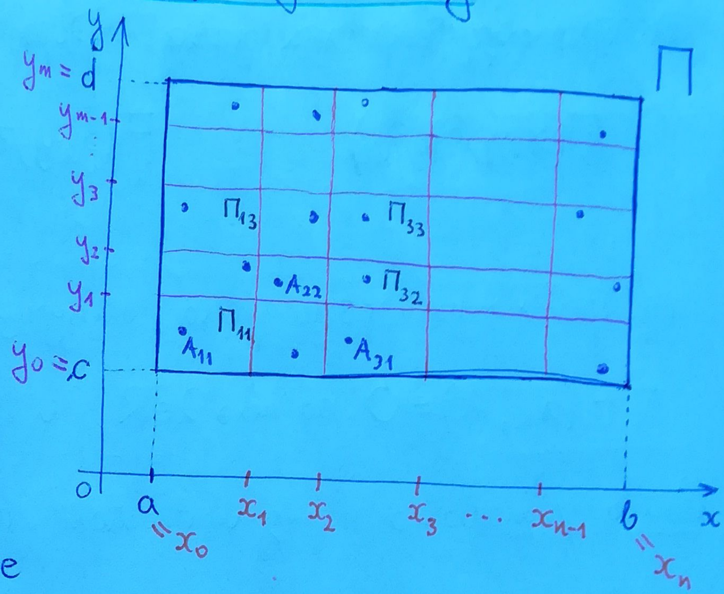
за $\lambda = 3$: $M_{5,6}(0, 0, \pm 3)$, $f(M_{5,6}) = 27$

$$\Longrightarrow \boxed{f_{min} = 9}, \quad \boxed{f_{max} = 27}.$$

II Вишеструки интеграли

Двоструки интеграл по правоугаонику

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$



$\Pi := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$

↖ правоугаоник

Подела P правоугаоника Π jесте уређен пар (P_1, P_2), где je $P_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ подела сегмента $[a, b]$, а $P_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ подела сегмента $[c, d]$. Тиме je заправо правоугаоник Π подељен на мале правоугаонике $\Pi_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Параметар (или дијаметар) поделе P jесте

$$\lambda(P) := \max_{i,j} \underbrace{\operatorname{diam} \Pi_{ij}}_{\text{дужина дијагонале правоугаоника } \Pi_{ij}} = \max_{i,j} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

Поделу са истакнутим тачкама (P, A) правоугаоника Π чине подела P и скуп $A = \{ A_{ij} \mid i = \overline{1, n} , j = \overline{1, m} \}$ при чему $A_{ij} \in \Pi_{ij}$.

Нека је сад још f реална функција две променљиве дефинисана на Π и (P, A) подела са истакнутим тачкама правоугаоника Π.

Интегрална сума фје f која одговара подели са истакнутим тачкама (P, A) јесте

$$\sigma(f, P, A) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(A_{ij}) \cdot \underbrace{P(\Pi_{ij})}_{= (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})}$$

вредност фје у истакнутој тачки

површина правоугаоника Π_{ij}

$\boxed{\text{Дефиниција:}}$ Број $I \in \mathbb{R}$ јесте двоструки интеграл фје f по правоугаонику Π ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (P, A))\ \lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, P, A) - I| < \varepsilon.$$

$\delta = \delta(\varepsilon)$

δ зависи од ε

$\Longleftrightarrow \sigma(f, P, A) \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$

Тада пишемо $\boxed{I = \iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dx\, dy}$, или краће $\boxed{I = \iint\limits_{\Pi} f\, dx\, dy}$.

Функција f је интеграбилна на Π ако постоји број I са овим својством.

Дакле, као код једноструког, тј. Римановог (одређеног) интеграла из Анализе 2: I је интеграл фје f ако за сваку његову околину $(I - \varepsilon, I + \varepsilon)$ важи да су у њој све интегралне суме које одговарају „довољно ситним" поделама. Ово „довољно ситне" се прецизира условом $\lambda(P) < \delta$, где је δ довољно мали позитиван број (који зависи од ε;

што је ε мање и δ је мање). Зато се неформално пише и

$$\iint_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,A).$$

Видимо, дакле, да постоји јака аналогија између ове дефиниције (двоструког интеграла ~~по~~ по правоугаонику) и дефиниције Римановог интеграла по сегменту (из Анализе 2). Тамо се сегмент дели на мање сегменте, овде се правоугаоник дели на мање правоугаонике. Интегрална сума је сума по тим подеоним деловима производа вредности функције у истакнутој тачки и, тамо дужине сегмента, а овде површине тог малог правоугаоника, речју, мере тог подеоног дела.

И тамо и овде је параметар поделе максимум дијаметара подеоних делова — с тим што је за сегменте дијаметар исто што и дужина (мера), док за правоугаонике дијаметар и површина (мера) нису иста ствар.

И наредни пример и наредна 2 става су имали своје аналогоне код једноструког интеграла. Они се и доказују на исти начин као тамо.

Пример: Нека је f константна на Π, тј. за неко $c\in\mathbb{R}$ је

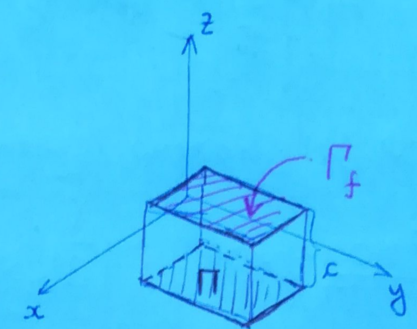
$$f(x,y)=c \quad \text{за све } (x,y)\in\Pi$$

$\Longrightarrow$ За све поделе са истакнутим тачкама (P,A) је

$$\sigma(f,P,A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\underbrace{f(A_{ij})}_{=c}\cdot P(\Pi_{ij}) = c\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(\Pi_{ij}) = c\cdot P(\Pi)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\iint_{\Pi} c\,dx\,dy = c\cdot P(\Pi)}$, јер за произвољно $\varepsilon>0$, за δ можемо да узмемо било шта — свакако ће важити $|\underbrace{\sigma(f,P,A)-c\cdot P(\Pi)}_{=0}|<\varepsilon$ (ако је $\lambda(P)<\delta$).

Посебно, за $c=1$: $\boxed{\iint\limits_\Pi dx\,dy = P(\Pi).}$

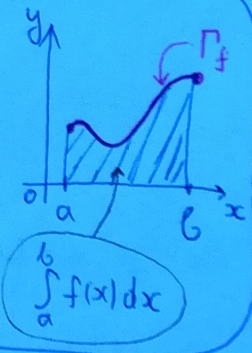


Приметимо из овог примера да је интеграл константне фје $f(x,y)=c$ у ствари запремина квадра чија је основа П, а висина c – другим речима, запремина дела простора између П и графика ове функције (ако је $c>0$).

То је и генерално геометријска интерпретација двоструког интеграла: он представља запремину између правоугаоника (скупа) по ком се интеграли и графика фје (ако је та фја позитивна):

$$\iint\limits_\Pi \underbrace{f(x,y)}_{\geq 0} dx\,dy = \text{запремина тела } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\Pi,\ 0\le z\le f(x,y)\}.$$

Сетимо се да је једноструки интеграл био површина између дела x-осе од a до b и графика (позитивне) функције $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.



Став: (линеарност)

Ако су f и g интеграбилне фје на правоугаонику П и $\alpha\in\mathbb{R}$, онда су и $f+g$ и αf интеграбилне на П и важе једнакости:

$$\boxed{\iint\limits_\Pi \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dx\,dy = \iint\limits_\Pi f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_\Pi g(x,y)\,dx\,dy},$$

$$\boxed{\iint\limits_\Pi \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_\Pi f(x,y)\,dx\,dy.}$$

Δ: $I_1 := \iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy$, $I_2 := \iint\limits_{\Pi} g(x,y)\,dx\,dy$.

Треба да докажемо једнакост: $\iint\limits_{\Pi}(f+g)\,dx\,dy \overset{?}{=} I_1+I_2$.

$\varepsilon>0$ произв.

$(\exists\delta_1>0)(\forall(P,A))\ \lambda(P)<\delta_1 \Rightarrow |\sigma(f,P,A)-I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$

$(\exists\delta_2>0)(\forall(P,A))\ \lambda(P)<\delta_2 \Rightarrow |\sigma(g,P,A)-I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$ (P,A) подела са истакн. тачкама т.д. је $\lambda(P)<\delta$

$\Longrightarrow \lambda(P)<\delta_1$ и $\lambda(P)<\delta_2$

Лако се покаже (као у Анализи 2) да је $\sigma(f+g,P,A)=\sigma(f,P,A)+\sigma(g,P,A)$.

$$\Longrightarrow |\sigma(f+g,P,A)-(I_1+I_2)| = |\sigma(f,P,A)-I_1+\sigma(g,P,A)-I_2|$$
$$\leq \underbrace{|\sigma(f,P,A)-I_1|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\sigma(g,P,A)-I_2|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$
$$< \varepsilon. \checkmark$$

Ако је $\alpha=0$, онда друга једнакост важи на основу претходног примера:

$$\iint\limits_{\Pi} 0\cdot f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Pi} 0\,dx\,dy \overset{\text{пример}}{=} 0\cdot P(\Pi) = 0 = 0\cdot\iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy \checkmark$$

Нека је сад $\alpha\neq 0$. Треба да докажемо да је $\iint\limits_{\Pi}\alpha f(x,y)\,dx\,dy \overset{?}{=} \alpha\cdot I_1$.

$\varepsilon>0$ произв. $(\exists\delta>0)(\forall(P,A))\ \lambda(P)<\delta \Rightarrow |\sigma(f,P,A)-I_1|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$

(P,A) подела са истакнутим тачкама т.д. је $\lambda(P)<\delta$.

$$\sigma(\alpha f,P,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha f(A_{ij})\,P(\Pi_{ij}) = \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(A_{ij})\,P(\Pi_{ij}) = \alpha\cdot\sigma(f,P,A)$$

$$\Longrightarrow |\sigma(\alpha f,P,A)-\alpha I_1| = |\alpha\cdot(\sigma(f,P,A)-I_1)| = |\alpha|\cdot|\sigma(f,P,A)-I_1| < \varepsilon. \checkmark$$

$\blacksquare$

Став: (монотоност) Ако су f и g интеграбилне ф-је на Π и ако је

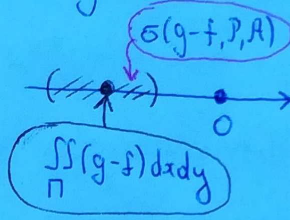
$$\underline{f(x,y) \leq g(x,y)} \quad \text{за све } (x,y) \in \Pi,$$

онда је
$$\boxed{\iint_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{\Pi} g(x,y)\,dx\,dy.}$$

Δ: $g(x,y) - f(x,y) \geq 0$ за све $(x,y) \in \Pi$

$$\Rightarrow \sigma(g-f, P, A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\big(g(A_{ij}) - f(A_{ij})\big)}_{\geq 0} \underbrace{P(\Pi_{ij})}_{\geq 0} \geq 0$$ за све поделе са ист. тачкама (P, A)

$$\Rightarrow \iint_{\Pi} (g-f)\,dx\,dy \geq 0$$, јер би у супротном интегралне суме $\sigma(g-f, P, A)$ биле негативне за довољно ситне поделе P



$$\Rightarrow \underline{\iint_{\Pi} g\,dx\,dy - \iint_{\Pi} f\,dx\,dy} \overset{\text{линеарност}}{=} \iint_{\Pi} (g-f)\,dx\,dy \,\underline{\geq}\, 0. \quad ✓ \quad \blacksquare$$

Као и код једноструких интеграла, може се показати да и овде важе импликације:

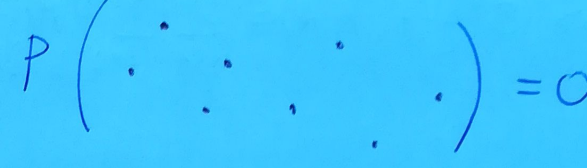
f непрекидна на Π $\Rightarrow$ f интеграбилна на Π $\Rightarrow$ f ограничена на Π

Ни на једном месту не важи обрнута импликација. На пример, из Анализе 2 знамо и да прекидна функција може бити интеграбилна (на сегменту) – довољно је да је ограничена и да има „мало" тачака прекида (нпр. коначно много). И овде важи слична ствар:

Ограничена фја је интеграбилна на Π акко скуп свих њених тачака прекида има површину нула.

Појам да неки подскуп од $\mathbb{R}^2$ „има површину нула" може се, наравно, строго формално дефинисати. Ми то нећемо радити, већ ћемо се задржати на интуицији: На пример, свака глатка крива у равни има површину нула, сваки дискретан (нпр. коначан) скуп тачака у равни има површину нула . . .

$P(c) = 0$



Два основна алата за рачунање вишеструких интеграла јесу Фубинијева теорема и Теорема о смени променљиве. Наведимо сад (без доказа) варијанту Фубинијеве теореме за двоструки интеграл по правоуганику. Она своди израчунавање двоструког интеграла на израчунавање два једнострука.

Теорема: (Фубини) Нека је f непрекидна фја на $\Pi = [a,b] \times [c,d]$. Тада је фја $\alpha(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$ непрекидна на $[c,d]$, а фја $\beta(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ непрекидна на $[a,b]$. Уз то, важе једнакости:

$$\boxed{\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)}_{=\beta(x)} dx = \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)}_{=\alpha(y)} dy.} \quad (*)$$

<u>Напомена:</u> Једнакости (*) заправо важе и ако је f (само) интеграбилна на Π (уз нека додатна објашњења).

<u>Пример:</u> $\Pi = [0,1]\times[1,2]$

$$\iint\limits_{\Pi}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\Big(\underbrace{\int_1^2 (x+y)\,dy}\Big)dx$$

Фубини

ово је интеграл по y (интеграли се по y), па се x третира као константа – као код парцијалних извода

$$= \int_0^1 \left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2\,dx$$

$$= \int_0^1\left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(x+\frac{3}{2}\right)dx = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = \boxed{2}$$

Могли смо и у обрнутом редоследу:

$$\iint\limits_{\Pi}(x+y)\,dx\,dy = \int_1^2\Big(\int_0^1 (x+y)\,dx\Big)dy = \int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2+yx\right)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_1^2\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = \left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(6-2) = \boxed{2}.$$