Независност криволинијског интеграла од путање

Област у простору $\mathbb{R}^n$ jесте отворен и повезан подскуп од $\mathbb{R}^n$. У овој лекцији увек ће бити $n=3$, али све потпуно исто важи и за $n=2$.

Бавимо се следећим питањем: Под којим условима криволинијски интеграл (друге врсте) датог векторског поља на датој области не зависи од саме криве (путање) већ само од њених крајњих тачака? Испоставља се да је то у блиској вези са особином векторског поља коју уводимо у наредној дефиницији.

Дефиниција: Векторско поље F је градијентно (или, конзервативно) на области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ако постоји реална функција f таква да је $\nabla f = F$ на D.

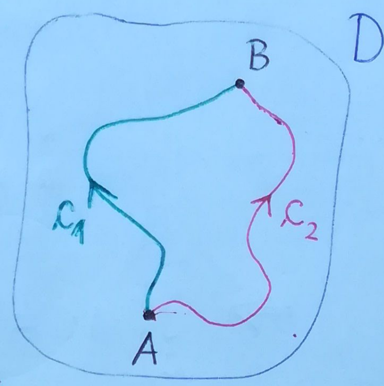
градијент ф-је f

Напомена: У овој дефиницији је амбијент у којем радимо $\mathbb{R}^3$, па је векторско поље F векторска функција с кодоменом $\mathbb{R}^3$ – има три координатне (реалне) ф-је: $F=(P,Q,R)$. У амбијенту $\mathbb{R}^2$ кодомен векторског поља F би био $\mathbb{R}^2$, па би F имало две координатне функције: $F=(P,Q)$.

Теорема: Нека је F непрекидно векторско поље на области $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Следећа три исказа су међусобно еквивалентна.

(1) За сваке две тачке $A, B \in D$ и сваке две део-по-део глатке криве $C_1, C_2 \subset D$ које спајају тачку A с тачком B важи да је

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr.$$



(2) За сваку затворену, оријентисану, део-по-део глатку криву $C \subset D$ важи да је

$$\oint_C F \cdot dr = 0.$$

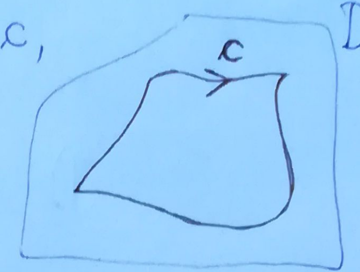
(3) F је градијентно на D.

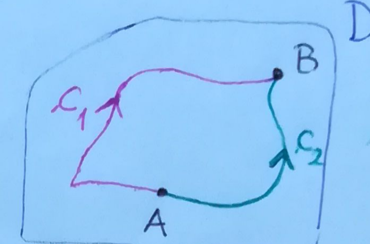
Штавише, ако су испуњена ова три услова (тј. бар један од њих) и ако је f нека (било која) ф-ја т.д. је $\nabla f = F$ на D, онда за било које две тачке $A, B \in D$ и било коју део-по-део глатку криву $C \subset D$ која спаја A са B важи:

$$\boxed{\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A).}$$

На шта вас подсећа ова последња једнакост? На коју формулу?
F је градијент (извод) ф-је f, а A и B су крајње тачке криве C по којој се интеграли.

Δ: $\boxed{(1) \Rightarrow (2):}$ Нека је c затворена, оријентисана, део-по-део глатка крива у области D. Нека су $A, B \in c$, $A \neq B$. Ове тачке деле криву c на две криве c_1 и c_2 које спајају тачку A с тачком B, при чему је c_1 оријентисана исто као и c, а c_2 супротно.



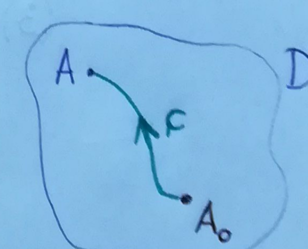


$$\Rightarrow \oint_c F\cdot dr = \int_{c_1} F\cdot dr + \int_{c_2^-} F\cdot dr = \int_{c_1} F\cdot dr - \int_{c_2} F\cdot dr \overset{(1)}{=} 0.$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (3):}$ Претпостављамо сад да важи (2), а треба да пронађемо фју $f: D \to \mathbb{R}$ такву да је $\nabla f = F$ на D.

Нека је $A_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ фиксирана тачка. За $A \in D$ дефинишемо:

$$\boxed{f(A) := \int_c F\cdot dr,}$$



где је c било која део-по-део глатка крива у области D која спаја тачку A_0 с тачком A. Покажимо најпре да је овим исправно дефинисана функција $f: D \to \mathbb{R}$. Прво, за свако $A \in D$ постоји крива c у области D која спаја A_0 и A, јер је D област – – дакле, повезан скуп. Друго, ако је $\tilde{c} \subset D$ још једна таква крива (која спаја A_0 са A), онда имамо затворену криву $\gamma := c \cup \tilde{c}^-$ у области D, па важи

$$0 \overset{(2)}{=} \oint_{\gamma} F\cdot dr = \int_{c} F\cdot dr + \int_{\tilde{c}^-} F\cdot dr = \int_{c} F\cdot dr - \int_{\tilde{c}} F\cdot dr.$$

Дакле, $\int_{c} F\cdot dr = \int_{\tilde{c}} F\cdot dr$, па $f(A)$ не зависи од избора (део-по-део глатке) криве у области D која спаја A_0 са A.

$\Longrightarrow$ Имамо исправно дефинисану фју $f: D \to \mathbb{R}$.

Остаје да докажемо да је $\nabla f = F$ на D, тј. ако је $F=(P,Q,R)$, остаје да докажемо да је $f'_x = P$, $f'_y = Q$ и $f'_z = R$ на D.

Докажимо да је $f'_x = P$ на D, а остале две једнакости се доказују аналогно.

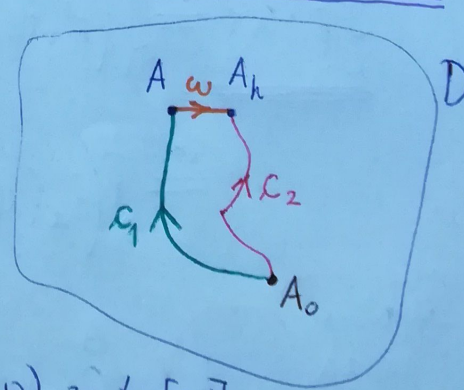
$A(x,y,z)\in D$ произвољна тачка

Знамо да је $f'_x(x,y,z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$. Зато најпре за фиксирано (али довољно мало) $h\neq 0$ размотримо израз $f(x+h,y,z)-f(x,y,z)$.

c_1 – крива у D од A_0 до $A(x,y,z)$

c_2 – крива у D од A_0 до $A_h(x+h,y,z)$

ω – дуж од тачке A до тачке A_h



Једна параметризација криве (дужи) ω је $r(t) = (x+th, y, z)$, $t\in[0,1]$; па је $r'(t) = (h,0,0)$ за $t\in[0,1]$.

$$f(x+h,y,z)-f(x,y,z) = \int_{c_2} F\cdot dr - \int_{c_1} F\cdot dr = \int_{\omega} F\cdot dr = h\cdot \int_0^1 \underbrace{P(x+th,y,z)}_{\text{Непрек.}}\,dt = h\cdot P(x+c_h h, y, z)$$

$c_1 \cup \omega \cup c_2^-$ је затворена орij. крива у D

$\Longrightarrow 0 \overset{(2)}{=} \oint_{c_1\cup\omega\cup c_2^-} F\cdot dr = \int_{c_1} F\cdot dr + \int_{\omega} F\cdot dr - \int_{c_2} F\cdot dr.$

Теор. о ср. вредности за Риманов интеграл $\Longrightarrow \exists\, c_h \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad f'_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot P(x+c_h\cdot h,y,z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} P(x+\underbrace{c_h}_{\text{огран.}}\cdot \underset{\downarrow 0}{h}, y, z) = P(x,y,z)$$

$(0 \le c_h \le 1)$

P нейрек. (јер је $F=(P,Q,R)$ нейрек.)

$\boxed{(3) \Rightarrow (1):}$ Сад имамо фју $f: D \to \mathbb{R}$ т. д. је $\nabla f = F$ на D.

Ако је $F=(P,Q,R)$, онда имамо $(P,Q,R) = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$,

тј. $P = f'_x$, $Q = f'_y$ и $R = f'_z$ на D. (*)

Нека су $A,B \in D$ две произвољне тачке и $c \subset D$ произвољна крива која спаја тачку A с тачком B.

$r:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ - регуларна параметризација криве c

$r(a)=A$, $r(b)=B$, $r(t) = (x(t),y(t),z(t))$, $r'(t) = (x'(t),y'(t),z'(t))$
(**)

једнакост (J) с прошлог предавања, стр. 12

$$\int_c F\cdot dr = \int_a^b \Big(P(r(t))\cdot x'(t) + Q(r(t))\cdot y'(t) + R(r(t))\cdot z'(t)\Big)\,dt$$

$$\overset{(*)}{=} \int_a^b \Big(f'_x(r(t))\cdot x'(t) + f'_y(r(t))\cdot y'(t) + f'_z(r(t))\cdot z'(t)\Big)\,dt$$

правило ланца

$$= \int_a^b g'(t)\,dt = g(b)-g(a) = f(r(b)) - f(r(a))$$

$g(t) := f(r(t))$

Њутн-Лајбницова формула

$$\overset{(**)}{=} f(B) - f(A).$$

Дакле, интеграл векторског поља F по кривој C заправо не зависи од те криве, већ само од њених крајњих тачака A и B, чиме је доказано да важи (1).

Овим је доказан и други део теореме, тј. формула на крају њене формулације. ■

Напомена 1: Веома је важно да су све криве с којима се ради у овој теореми унутар области D, да ниједна од њих ниједним својим делом не изађе изван области.

Напомена 2: Уз неке додатне претпоставке на векторско поље F и област D, имаћемо и четврти еквивалентан услов овима из теореме. За случај равни $\mathbb{R}^2$, тј. области у $\mathbb{R}^2$, њега ћемо навести већ данас – кад урадимо Гринову формулу. За случај области у $\mathbb{R}^3$ то ћемо урадити за две недеље – кад будемо радили Стоксову формулу.

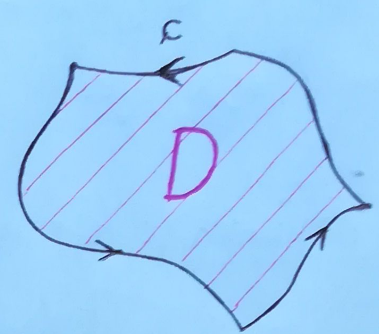
Гринова формула

Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилна функција, знамо да је (по Њутн–Лајбницовој формули) $\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a).}$

Дакле, интеграл извода ф-је f на $[a,b]$ зависи само од вредности ф-је f на граници $\{a, b\}$ сегмента $[a,b]$.

Гринова формула је формула сличног вида.

Теорема: (Гринова формула) Нека је област $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена и нека је $\partial D = c$ део-по-део глатка, затворена крива, која је још и позитивно оријентисана (што значи да при кретању кривом c у задатом смеру њена унутрашњост, област D, увек је с леве стране). Ако је $F=(P,Q)$ векторско поље на $\overline{D}$ т. д. су функције P, Q, P'_y и Q'_x непрекидне на $\overline{D}$, онда је

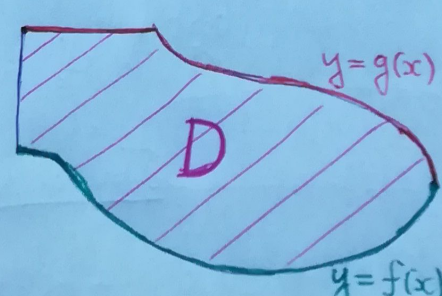


$$\boxed{\oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy.}$$

Δ: Докажимо теорему најпре у специјалном случају кад је D тзв. елементарна област. То значи да се $\overline{D}$ може представити у облику

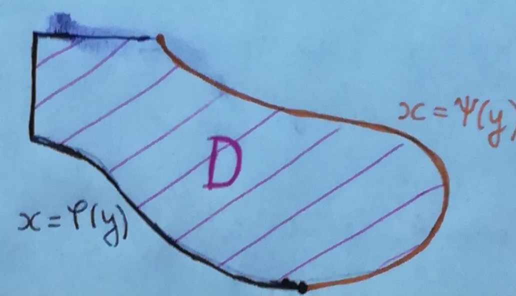
$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$, (1)

где су f и g непрекидне, део-по-део глатке ф-је на $[a,b]$, и у облику



$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$, (2)

где су φ и ψ непрекидне, део-по-део глатке ф-је на $[c,d]$.



Треба, дакле, да докажемо да је $\oint\limits_{c} F\cdot dr = \iint\limits_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$.

Пошто је $F=(P,Q)=(P,0)+(0,Q)$, а оба интеграла (и криволинијски друге врсте и двоструки) имају својство линеарности, довољно је доказати наредне две једнакости:

I $\quad \boxed{\oint\limits_{c} (P,0)\cdot dr = -\iint\limits_{\overline{D}} P'_y\,dx\,dy}$, $\boxed{\oint\limits_{c} (0,Q)\cdot dr = \iint\limits_{\overline{D}} Q'_x\,dx\,dy}$ $\quad$ II

(тражена једнакост се онда добија сабирањем ове две).

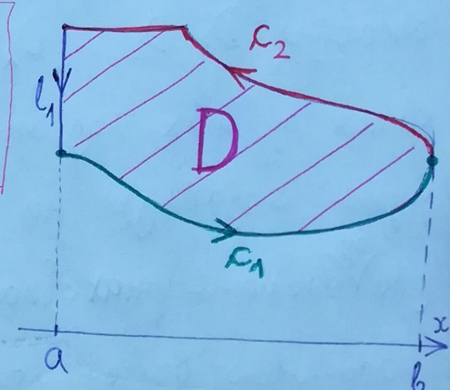
Докажимо једнакост I. Криву c поделићемо на четири дела (у општем случају): c_1, c_2, l_1 и l_2, чије су параметризације дате са:

c_1: $x=t$, $y=f(t)$, $t\in[a,b]$

c_2: $x=t$, $y=g(t)$, $t\in[a,b]$

l_1: $x=a$, $y=t$, $t\in[f(a),g(a)]$

l_2: $x=b$, $y=t$, $t\in[f(b),g(b)]$



(У ситуацији на слици десно, $f(b)=g(b)$, па нема дела l_2.)

$$\oint\limits_{c} (P,0)\cdot dr = \int\limits_{c_1} (P,0)\cdot dr + \int\limits_{l_2} (P,0)\cdot dr + \int\limits_{c_2} (P,0)\cdot dr + \int\limits_{l_1} (P,0)\cdot dr$$

За криве c_2 и l_1 горње параметриз. дају супротне оријент.

$$= \int_a^b P(t,f(t))\cdot \underbrace{x'(t)}_{=1}\,dt + 0 - \int_a^b P(t,g(t))\cdot \underbrace{x'(t)}_{=1}\,dt - 0$$

$x'=0$ на l_1 и l_2

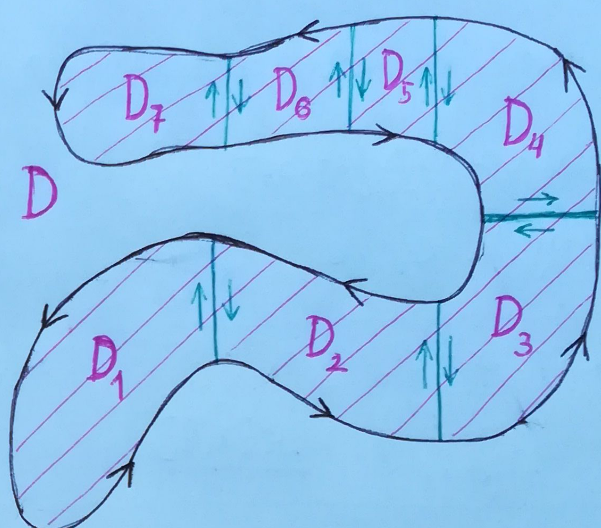
$$= \int_a^b \big(P(t,f(t)) - P(t,g(t))\big)\,dt$$

$$-\iint\limits_{\overline{D}} P'_y\,dx\,dy \overset{\text{Фубини}}{\underset{\text{представљање (1) скупа } \overline{D}}{=}} -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} P'_y(x,y)\,dy\right)dx \underset{\text{Њутн-Лајбницова формула}}{=} -\int_a^b P(x,y)\Big|_{f(x)}^{g(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b \Big(P(x,f(x)) - P(x,g(x))\Big)\,dx.$$

Овим је доказана једнакост I, а на сличан начин (користећи представљање (2) скупа $\overline{D}$) може се доказати и једнакост II.

Нека је сад $D\subset\mathbb{R}^2$ произвољна област. Показује се да се она (водоравним и усправним дужима) може поделити на елементарне области $D_1, D_2, \dots, D_k$. При том се свака од тих подеоних (додатих) дужи појављује на граници тачно две од елементарних области $D_1, D_2, \dots, D_k$. И то, ако је $c_i = \partial D_i$ $(i=\overline{1,k})$ позитивно оријентисана, онда се поменута дуж појављује као део једне криве c_i са једном оријентацијом и још једне криве c_j са супротном оријентацијом.



$$\Longrightarrow \oint_c P\,dx + Q\,dy = \oint_{c_1} P\,dx+Q\,dy + \oint_{c_2} P\,dx+Q\,dy + \dots + \oint_{c_k} P\,dx+Q\,dy$$

На основу првог дела доказа, Гринова ф-ла важи за елементарне области.

$$= \iint\limits_{\overline{D}_1}(Q'_x - P'_y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\overline{D}_2}(Q'_x - P'_y)\,dx\,dy + \dots + \iint\limits_{\overline{D}_k}(Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

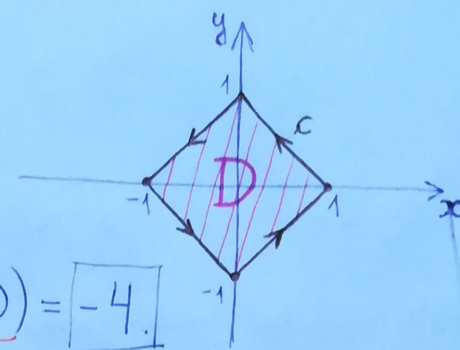
адитивност двоструког интеграла

$$= \iint\limits_{\overline{D}}(Q'_x - P'_y)\,dx\,dy.$$

Пример: Израчунати $\oint\limits_c (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, где је c позитивно оријентисана крива дата једначином $|x|+|y|=1$.

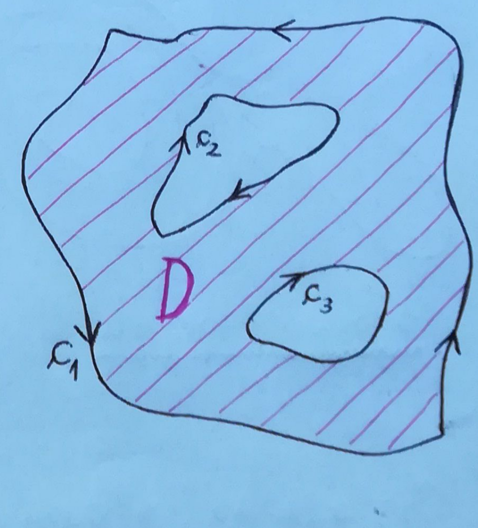
$$P = x+y \implies P'_y = 1$$

$$Q=-(x-y)=y-x \implies Q'_x=-1$$



$$\oint\limits_c (x+y)\,dx-(x-y)\,dy \overset{\text{Гринова ф-ла}}{=} \iint\limits_{\overline{D}} (-1-1)\,dx\,dy = -2\cdot \underbrace{P(D)}_{=\sqrt{2}^{\,2}=2} = \boxed{-4.}$$

Напомена: Гринова формула важи и ако се граница области D састоји од више затворених кривих (као, на пример, на следећој слици). Тада се под $\oint\limits_c P\,dx+Q\,dy$ подразумева збир интеграла по свим тим кривама, оријентисаним тако да област D остаје са леве стране кад се крећемо по некој од тих кривих у назначеном смеру. На пример, у ситуацији као на слици Гринова формула би изгледала овако:

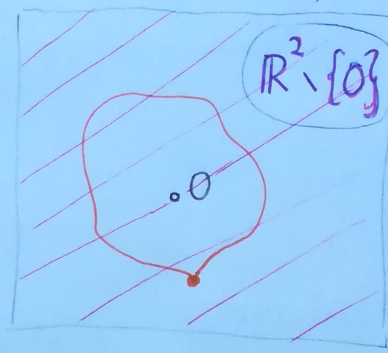


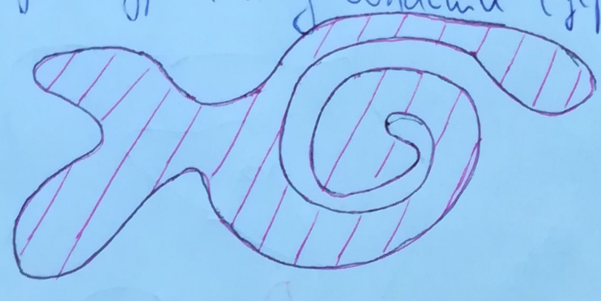
$$\oint\limits_{c_1} P\,dx+Q\,dy + \oint\limits_{c_2} P\,dx+Q\,dy + \oint\limits_{c_3} P\,dx+Q\,dy = \iint\limits_{\overline{D}} (Q'_x-P'_y)\,dx\,dy.$$

Доказ који смо дали покрива заправо и овај случај. И оваква област се водоравним и усправним дужима може поделити на елементарне...

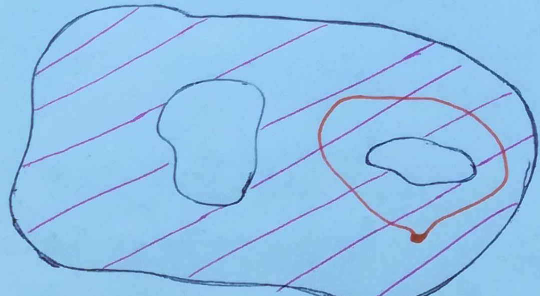
Дефиниција. За област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ кажемо да је <u>просто повезана</u> ако за сваку просту затворену криву $c \subset D$ важи да је њена унутрашњост подскуп од D.

Наравно, читава раван $\mathbb{R}^2$ јесте једна просто повезана област, али ако из ње избацимо једну тачку, онда добијамо област која није просто повезана. Наиме, ако узмемо било коју просту затворену криву која „обиђе" ту избачену тачку, њена унутрашњост није садржана у области (јер садржи избачену тачку).





просто повезана



није просто повезана

Сад можемо да формулишемо четврти услов еквивалентан са она три из теореме о независности криволинијског интеграла од путање (стр. $\boxed{2}$). Као што смо и најавили, он ће бити еквивалентан, али уз одређене додатне претпоставке на област D и векторско поље F. За област D захтеваћемо да је просто повезана, и то је кључни услов, а векторско поље F није довољно да буде непрекидно (као у поменутој теореми), већ ћемо захтевати да буде непрекидно-диференцијабилно (заправо, ако је $F=(P,Q)$, довољно је да функције P, Q, P'_y и Q'_x буду непрекидне).

Последица: Нека је $F=(P,Q)$ непрекидно-диференцијабилно векторско поље на просто повезаној области $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Тада важи еквиваленција:

$$\boxed{F \text{ је градијентно на } D \iff Q'_x = P'_y \text{ на } D.}$$

(Дакле, поменути четврти услов је десна страна ове еквиваленције.)

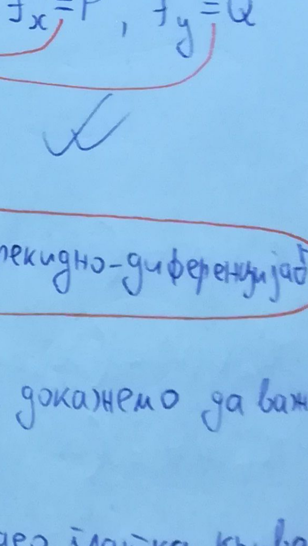
Δ: $\boxed{\Rightarrow)}$ Нека је $f: D\to\mathbb{R}$ т.д. је $\nabla f = F$. $\Rightarrow$ $f'_x = P$, $f'_y = Q$

$$Q'_x = f''_{yx} = f''_{xy} = P'_y \text{ на } D. \checkmark$$

$f''_{xy} = P'_y$ и $f''_{yx} = Q'_x$ јесу непрекидне ф-је, јер је F непрекидно-диференцијаб.

$\boxed{\Leftarrow)}$ На основу теореме са стр. $\boxed{2}$ довољно је да докажемо да важи услов (2) из те теореме.

Нека је c затворена, оријентисана, део-по-део глатка крива у области D (ради једноставнијег доказа, претпоставимо и да је проста затворена – да нема самопресека).



Ако је D_1 унутрашњост криве c, онда је $\overline{D_1}\subset D$ (јер је D просто повезана).

$$\oint_c F\cdot dr \overset{\text{Гринова формула}}{=} \pm\iint_{\overline{D_1}} \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{=0} dx\,dy = 0. \checkmark$$

$Q'_x=P'_y$ на D, па и на $\overline{D_1}$

Параметризација површи

На последњем одржаном трочасу увели смо појам површи у $\mathbb{R}^3$, као скупа тачака у $\mathbb{R}^3$ чије координате задовољавају неку једначину. Међутим, да бисмо по површи интегралили скаларна и векторска поља, треба нам параметризација површи.

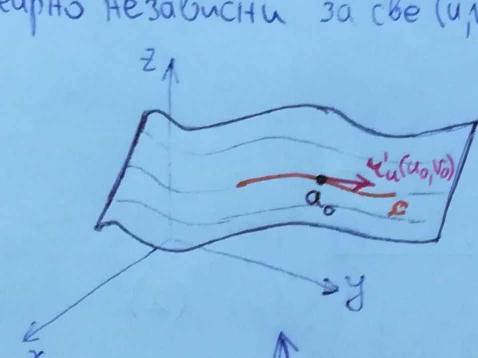
$\boxed{\text{Дефиниција:}}$ Нека је $S \subset \mathbb{R}^3$ површ и $r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ непрекидно-диференцијабилно пресликавање које је „1-1" на D, где је D област у $\mathbb{R}^2$, и $r(\overline{D}) = S$. Пресликавање r тада називамо <u>параметризацијом</u> <u>површи S</u>.

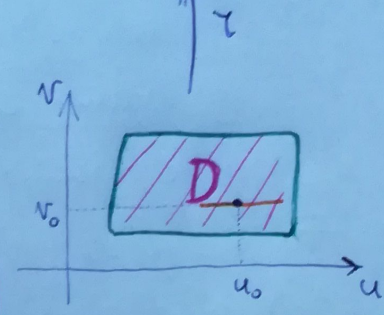
Параметризација r је <u>регуларна</u> ако су вектори $r'_u(u,v)$ и $r'_v(u,v)$ линеарно независни за све $(u,v) \in D$.

$$r(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$$

$$r'_u(u,v) = \big(x'_u(u,v),\, y'_u(u,v),\, z'_u(u,v)\big)$$

$$r'_v(u,v) = \big(x'_v(u,v),\, y'_v(u,v),\, z'_v(u,v)\big)$$





За $(u_0,v_0) \in D$, нека је $a_0 = r(u_0,v_0) \in S$, и уочимо криву c на површи S дату параметризацијом $\gamma : (u_0 - \varepsilon,\, u_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(u) := r(u, v_0).$$

c је крива на површи S

$$\Longrightarrow \gamma'(u) = r'_u(u, v_0). \qquad \Longrightarrow r'_u(u_0,v_0) = \gamma'(u_0) \in T_{a_0} S$$

тангентна раван на површ S у т. a_0

Слично се показује и да $r'_v(u_0,v_0) \in T_{a_0} S$.

$\Longrightarrow$ $r'_u(u_0,v_0) \times r'_v(u_0,v_0)$ јесте један вектор нормале на површ S у тачки a_0

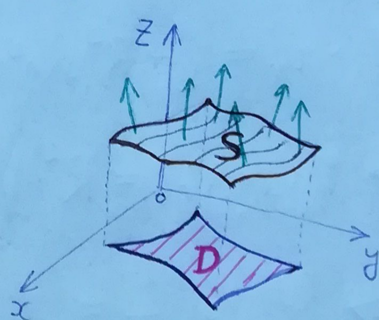
векторски производ

Овај векторски производ је ненула вектор јер су $r'_u(u_0,v_0)$ и $r'_v(u_0,v_0)$ линеарно независни (неколинеарни). То је и смисао регуларности дате површи, односно њене параметризације – да имамо (ненула) вектор нормале у свакој (или скоро свакој) њеној тачки. Зато регуларне површи (површи које имају регуларну параметризацију) називамо и глатким површима.

Примери: 1) D - област у $\mathbb{R}^2$, $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ непрекидно-диференц. фја

$$S := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\overline{D},\ z=f(x,y)\} = \Gamma_f$$

$r:\overline{D}\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v):=(u,v,f(u,v))$



$$\Longrightarrow\ r'_u=(1,0,f'_u),\quad r'_v=(0,1,f'_v)$$

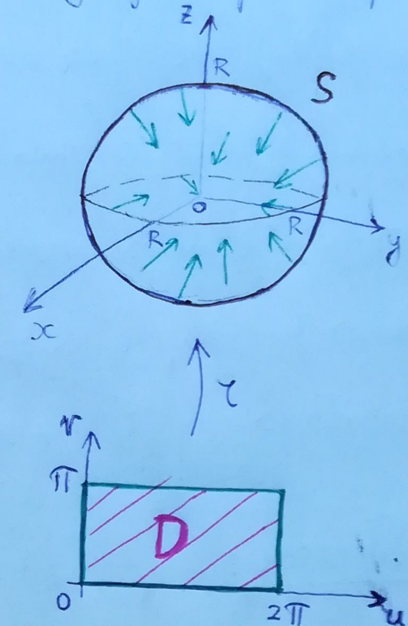
$$r'_u\times r'_v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & f'_u\\ 0 & 1 & f'_v\end{vmatrix}=(-f'_u,-f'_v,1)\neq\vec{0}$$

$\Longrightarrow$ r'_u и r'_v су линеарно независни $\Longrightarrow$ r је регуларна параметризација површи S

Приметимо да вектори нормале $r'_u\times r'_v$ „показују на горе", јер су им z-координате позитивне.

2) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$ - сфера са центром у $(0,0,0)$ полупречника R

Знамо да је једначина ове сфере у сферним координатама $\rho = R$ (в. стр. $\boxed{14}$ предавања од 9. IV), па зато можемо да је параметризујемо на сл. начин:



$r:[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = (R\sin v\cos u,\ R\sin v\sin u,\ R\cos v)$$

$$D=(0,2\pi)\times(0,\pi)$$

$$r'_u = (-R\sin v\sin u,\ R\sin v\cos u,\ 0)$$

$$r'_v = (R\cos v\cos u,\ R\cos v\sin u,\ -R\sin v)$$

$$r'_u\times r'_v = (-R^2\sin^2 v\cos u,\ -R^2\sin^2 v\sin u,\ -R^2\sin v\cos v)$$

$\Rightarrow \|r'_u\times r'_v\| = R^2\cdot\sqrt{\sin^4 v+\sin^2 v\cos^2 v} = R^2\sin v > 0$ за $v\in(0,\pi)$

$\Rightarrow r'_u\times r'_v \neq \vec{0}$ за $(u,v)\in D$ $\Rightarrow$ r је регуларна параметризација сфере S

Како је z-координата вектора нормале $r'_u\times r'_v$ једнака $\underbrace{-R^2}_{<0}\underbrace{\sin v}_{\geq 0}\cos v$, а она је негативна за $v\in(0,\frac{\pi}{2})$ (на горњој полусфери), а позитивна за $v\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ (на доњој полусфери), то закључујемо да ови вектори „показују ка унутра".