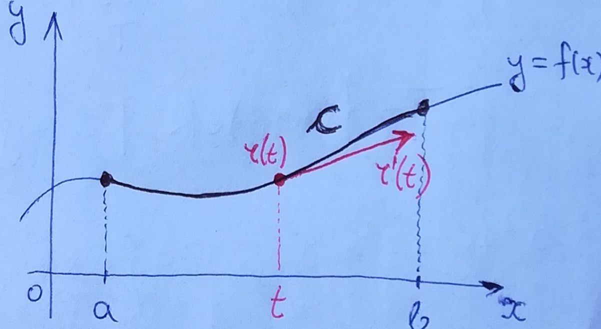
16. IV 2020.

III Криволинијски и површински интеграли

Криволинијски интеграл прве врсте

Из Анализе 2 знамо да, ако је f непрекидно-диференцијабилна функција на сегменту $[a,b]$, онда крива $c=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b\}$ има дужину и важи да је

$$\underbrace{l(c)}_{\text{дужина криве } c} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$



Једна регуларна параметризација криве c је $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,f(t))$. Тада је $\gamma'(t)=(1,f'(t))$, па је $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+(f'(t))^2}$ за све $t\in[a,b]$. Дакле, важи да је

$$\boxed{l(c)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.} \qquad (1)$$

На сличан начин се показује да формула (1) заправо важи за произвољну ~~крив~~ (глатку) криву $c\subset\mathbb{R}^2$ (или $c\subset\mathbb{R}^3$), при чему је $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ (или $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$) њена регуларна параметризација. Дакле, дужину криве одређујемо тако што нађемо неку њену регуларну параметризацију, а онда по параметарском скупу (сегменту $[a,b]$) интегралимо дужине тангентних вектора.

$\boxed{c\subset\mathbb{R}^2}$, $r(t)=(x(t),y(t))$

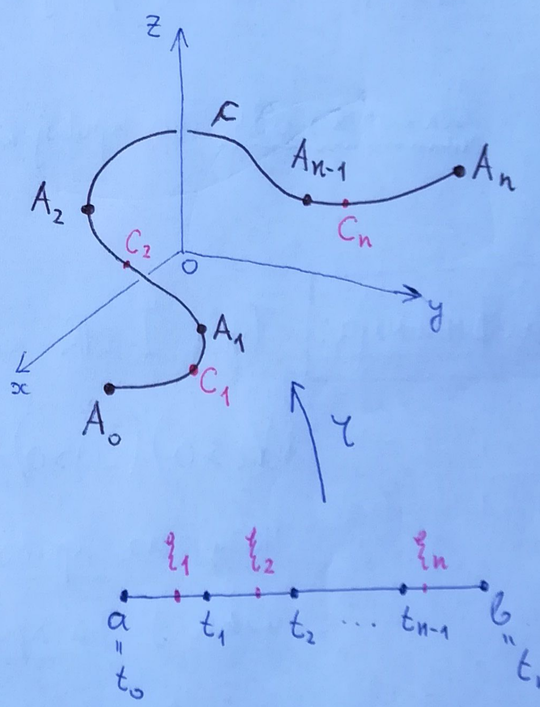
$$l(c)=\int_a^b \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}_{=\|r'(t)\|}\,dt$$

$\boxed{c\subset\mathbb{R}^3}$, $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$

$$l(c)=\int_a^b \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}}_{=\|r'(t)\|}\,dt$$

У наставку ћемо, ради одређености, радити са кривама у $\mathbb{R}^3$ ($c\subset\mathbb{R}^3$), а потпуно аналогну причу имамо и у случају $c\subset\mathbb{R}^2$.

Нека је $c\subset\mathbb{R}^3$ фиксирана (глатка) крива и $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација.



$P: a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ подела сегмента $[a,b]$

$\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ скуп истакнутих тачака

$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,n}$

$A_i := r(t_i)\in c$, $i=\overline{0,n}$

$C_i := r(\xi_i)\in c$, $i=\overline{1,n}$

Ако је c_i део криве c од тачке A_{i-1} до тачке A_i, дефинишемо

$$\Delta s_i := l(c_i)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|r'(t)\|\,dt, \quad i=\overline{1,n};$$

$$\boxed{\tilde{\lambda}(P) := \max_{1\le i\le n}\Delta s_i.}$$

Ако је још и $f: c\to\mathbb{R}$, дефинишемо интегралну суму фје f која одговара подели P са истакнутим тачкама ξ:

$$\boxed{\sigma(f, c, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta s_i .}$$

Овде је, дакле, f реална фја (три променљиве) дефинисана на кривој c. Кад су у питању реалне фје дефинисане на некој кривој или на некој површи биће нам погодно да њих надаље зовемо скаларним пољима (на кривој, односно, на површи). Векторске фје $F : c \to \mathbb{R}^3$ зваћемо векторским пољима. Дакле,

скаларно поље на кривој $c \subset \mathbb{R}^3$ = реална фја на c (кодомен је поље скалара $\mathbb{R}$)

векторско поље на кривој $c \subset \mathbb{R}^3$ = векторска фја на c с кодоменом $\mathbb{R}^3$ (кодомен је векторски простор $\mathbb{R}^3$)

Дефиниција: Број $I \in \mathbb{R}$ са својством

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (P, \xi)) \quad \tilde{\lambda}(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, c, P, \xi) - I| < \varepsilon$$

називамо криволинијским интегралом (прве врсте) скаларног поља f на кривој c, и означавамо га са

$$\int_c f(x, y, z)\, ds \quad , \quad \text{или краће, са} \quad \int_c f\, ds .$$

Може се доказати да ова дефиниција криволинијског интеграла прве врсте не зависи од избора регуларне параметризације криве c.

Основни алат за израчунавање криволинијског интеграла прве врсте даје следећи став, који установљава једнакост тог интеграла са једним Римановим интегралом (а њих знамо да рачунамо).

Став: Ако је c глатка крива, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација и f непрекидно скаларно поље на c, онда постоји $\int_c f(x,y,z)\,ds$ и важи једнакост:

$$\boxed{\int_c f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt.}$$

Δ: Доказујемо само наведену једнакост (доказ постојања криволинијског интеграла изостављамо).

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, γ регуларна парам. $\Rightarrow$ x', y' и z' су непрекидне фје на $[a,b]$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ јесте непрек. фја на $[a,b]$

$\xRightarrow{\text{Вајерштрас}}$ $\|\gamma'(t)\|$ је ограничена на $[a,b]$, тј.

$$\boxed{(\exists M>0)\ (\forall t \in [a,b])\ \|\gamma'(t)\| \le M} \quad (*)$$

$I := \int_c f(x,y,z)\,ds$, $J := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|}_{=:g(t)}\,dt$, $I \overset{?}{=} J$

Због еквиваленције $I = J \iff (\forall \varepsilon > 0)\ |I - J| < \varepsilon$, довољно је да докажемо да је растојање $|I-J|$ мање од сваког позитивног броја.

$\varepsilon > 0$ произв.

$(\exists \delta_1 > 0)(\forall (P,\xi))\ \tilde{\lambda}(P) < \delta_1 \Rightarrow |\sigma(f,c,P,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\exists \delta_2 > 0)(\forall (P,\xi))\ \lambda(P) < \delta_2 \Rightarrow |\sigma(g,P,\xi) - J| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta := \min\left\{\frac{\delta_1}{M}, \delta_2\right\}$

$P: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ подела сегм. $[a,b]$ т. д. је $\lambda(P) < \delta$

(Ако уведемо ознаку $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, из Анализе 2 знамо да је

$\lambda(P) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i$.)

Идеја доказа је да за ову поделу P одаберемо скуп истакнутих тачака $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ тако да важи $\sigma(f, c, P, \eta) = \sigma(g, P, \eta)$ (ово, наравно, не важи за сваки скуп истакнутих тачака; зашто би важило?)

$1 \le i \le n$

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\text{непрек.}} dt = \|\gamma'(\eta_i)\| \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = \|\gamma'(\eta_i)\| \cdot \Delta t_i \quad (**)$$

$\exists \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ т. д. важи ова једнакост, на основу Теореме о средњој вредности за Риманов интеграл.

На овај начин смо изабрали скуп истакнутих тачака $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$.

$$\sigma(f, c, P, \eta) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\eta_i)) \cdot \Delta s_i \overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\gamma(\eta_i)) \cdot \|\gamma'(\eta_i)\|}_{= g(\eta_i)} \Delta t_i = \sigma(g, P, \eta).$$

$$|I - J| = |I - \sigma(f, c, P, \eta) + \sigma(g, P, \eta) - J| \le \underbrace{|I - \sigma(f, c, P, \eta)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\sigma(g, P, \eta) - J|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\lambda(P) < \delta \le \delta_2$

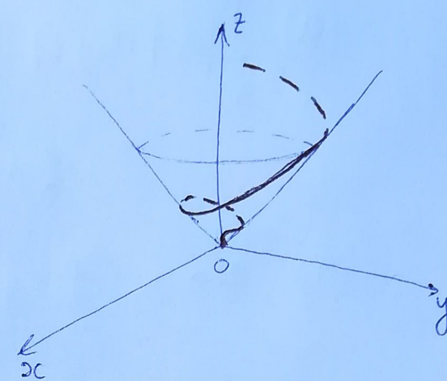
$$\tilde{\lambda}(P) = \max_{1 \le i \le n} \Delta s_i \overset{(**)}{=} \max_{1 \le i \le n} \|\gamma'(\eta_i)\| \Delta t_i$$

$$\overset{(*)}{\le} \max_{1 \le i \le n} M \Delta t_i = M \cdot \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i$$

$$= M \lambda(P) < M \cdot \delta \le M \cdot \frac{\delta_1}{M} = \delta_1$$

<u>Пример:</u> Израчунати $\int\limits_c \left(4z - \sqrt{x^2+y^2}\right) ds$, где је c део конусне

завојнице $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$ за $0 \le t \le 4$.



$\gamma : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

$\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1$$

$$= \cos^2 t - \cancel{2t\cos t}\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t}\cos t + t^2\cos^2 t + 1$$

$$= 2 + t^2$$

$$\Longrightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2+t^2}$$

$$\int\limits_c \left(4z - \sqrt{x^2+y^2}\right) ds = \int_0^4 \Big(4t - \sqrt{t^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}}\Big) \cdot \sqrt{2+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^4 (4t - |t|)\sqrt{2+t^2}\, dt = 3\int_0^4 t\sqrt{2+t^2}\, dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{2+t^2} \\ du &= \frac{t}{u}\, dt \end{aligned}}$$

$$= 3\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} u^2\, du = u^3 \Big|_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} = \boxed{52\sqrt{2}}.$$

У наредном ставу установљавамо основне особине криволинијског интеграла прве врсте. Оне лако следе из претходног става и одговарајућих особина Римановог интеграла. Зато ћемо ми доказати само једну од њих (вероватно најтежу), а докази осталих особина остају за домаћи.

Став: Нека је C глатка крива, f и g непрекидна скаларна поља (реалне функције) на C и нека су $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

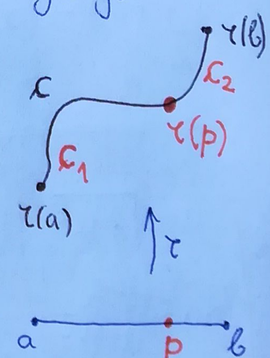
(а) $$\int_C \big(\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)\big)\,ds=\alpha\int_C f(x,y,z)\,ds+\beta\int_C g(x,y,z)\,ds\,;$$

[линеарност]

(б) ако је $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$ за све $(x,y,z)\in C$, онда је
$$\int_C f(x,y,z)\,ds\le\int_C g(x,y,z)\,ds\,;$$
[монотоност]

(в) $$\int_C ds=\ell(C)\,;$$

(г) ако је $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација криве C, $p\in(a,b)$, $C_1=\gamma([a,p])$, $C_2=\gamma([p,b])$, онда је
$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_{C_1} f(x,y,z)\,ds+\int_{C_2} f(x,y,z)\,ds\,;$$
[адитивност]



(д) $$\big(\exists (x_0,y_0,z_0)\in C\big)\quad \int_C f(x,y,z)\,ds=f(x_0,y_0,z_0)\cdot\ell(C).$$

[Теорема о средњој вредности за криволинијски интеграл]

Δ: Доказујемо само део под (д): $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ рег. парам. криве C

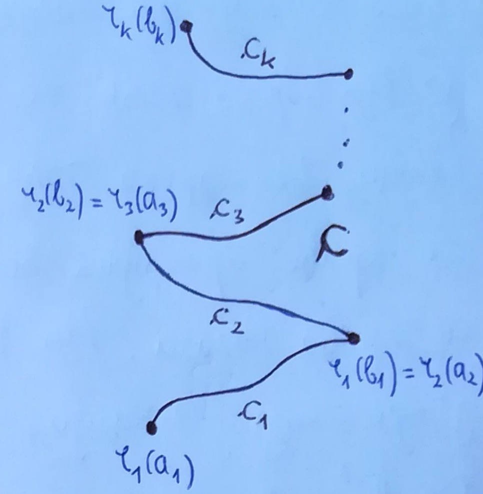
$$\int_C f(x,y,z)\,ds\overset{\text{претх. став}}{=}\int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{непрек.}}\cdot\underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\ge 0}\,dt = f(\gamma(t_0))\cdot\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt\overset{\text{формула (1), стр. 1}}{=}f(x_0,y_0,z_0)\cdot\ell(C)$$

Теор. о ср. вредности за Риманов инт. $\Rightarrow \exists\, t_0\in[a,b]$ т.д.

$(x_0,y_0,z_0):=\gamma(t_0)\in C$

Део-по-део глатка крива је унија глатких кривих:

$$c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k\,;$$



тако да, ако су $r_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,k}$, регуларне параметризације кривих $c_1, c_2, \dots, c_k$, онда важи $r_i(b_i) = r_{i+1}(a_{i+1})$ за све $i=\overline{1,k-1}$ (просто речено, c_{i+1} почиње тамо где се завршава c_i).

Мотивисани делом (г) претходног става, за овакву део-по-део глатку криву c дефинишемо:

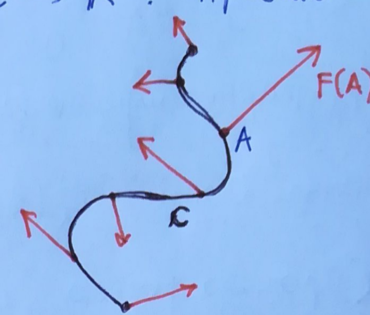
$$\boxed{\int_c f(x,y,z)\,ds := \int_{c_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{c_2} f(x,y,z)\,ds + \dots + \int_{c_k} f(x,y,z)\,ds.}$$

Није тешко уверити се да претходни став (са стране $\boxed{7}$) важи и за (овако дефинисан) криволинијски интеграл (прве врсте) на део-по-део глатким кривама.

Криволинијски интеграл друге врсте

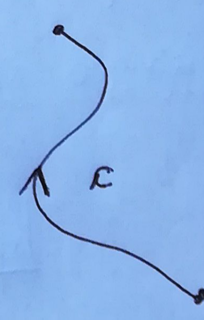
Криволинијски интеграл прве врсте био је интеграл скаларног поља на датој кривој. Криволинијски интеграл друге врсте биће интеграл векторског поља на кривој. Ако је c крива у простору ($c \subset \mathbb{R}^3$), онда је векторско поље функција $F : c \to \mathbb{R}^3$.

Ту је важно да је димензија кодомена баш 3 (да би се то звало векторским пољем). Ако је c крива у равни ($c \subset \mathbb{R}^2$), онда је векторско поље на кривој c функција $F: c \to \mathbb{R}^2$. Просто речено, векторско поље на кривој свакој тачки те криве придружи вектор у амбијенту у ком се крива налази. Ми ћемо у наставку, као и у претходној лекцији, подразумевати да је $c \subset \mathbb{R}^3$, а све аналогно имамо и у случају $c \subset \mathbb{R}^2$. На пример, координатне ф-је векторског поља $F: c \to \mathbb{R}^3$ на кривој $c \subset \mathbb{R}^3$ означаваћемо са P, Q и R ($F = (P, Q, R)$), а за криве у равни просто нема треће координатне функције, па је ту $F = (P, Q)$.

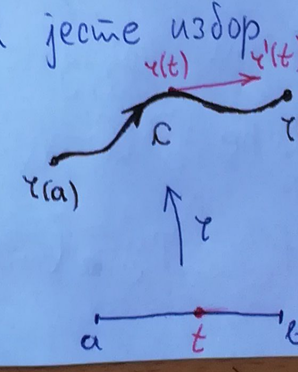


За разлику од интеграла прве врсте криволинијски интеграл друге врсте зависиће од оријентације криве. Ми ћемо оријентацију дефинисати неформално, али сасвим довољно јасно:

<u>Оријентација</u> <u>криве c</u> је смер кретања по тој кривој. (Јасно је да постоје две могуће оријентације дате криве.) Кажемо да је крива c <u>оријентисана</u> ако је фиксирана једна њена оријентација.

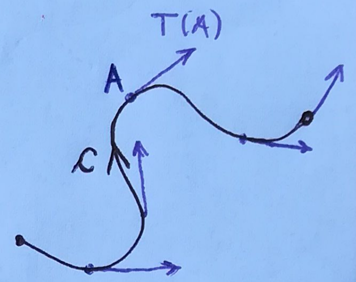


Један начин да се оријентише дата (глатка) крива јесте избор једне њене регуларне параметризације $r: [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Наиме, тада, како се t креће од a до b, тачка $r(t)$ се креће по кривој c од т. $r(a)$ до т. $r(b)$ и то је, дакле, једна оријентација криве c. Тај



„смер кретања" (оријентацију) заправо одређују и тангентни вектори $\gamma'(t)$, $t\in[a,b]$. Крива се, наравно, може и другачије оријентисати (нпр. експлицитним навођењем смера кретања).

Ако је $c\subset\mathbb{R}^3$ глатка оријентисана крива, онда на c имамо непрекидно векторско поље јединичних тангентних вектора у смеру одређеном оријентацијом. То векторско поље означавамо са T. Дакле,



$T: c\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)$ је јединични тангентни вектор на криву c у т. $(x,y,z)\in c$ усмерен у „смеру кретања" одређеном оријентацијом.

Ако је $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација оријентисане криве c тако да γ одређује задату оријентацију од c (ово значи да су вектори $\gamma'(t)$ и $T(\gamma(t))$ исто усмерени за све $t\in[a,b]$), онда очито важи:

$$\boxed{T(\gamma(t))=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}} \quad \text{за све } t\in[a,b]. \qquad (*)$$

(Наравно, кад имамо неку регуларну параметризацију $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ тангентни вектори $\gamma'(t)$, $t\in[a,b]$, не морају бити јединични!)

Сад коначно можемо да дефинишемо криволинијски интеграл друге врсте. Дефинишемо га преко криволинијског интеграла прве врсте.

Дефиниција: Нека је c глатка оријентисана крива и F векторско поље на c. Криволинијски интеграл (друге врсте) векторског поља F на кривој c јесте криволинијски интеграл (прве врсте) скаларног поља $F \cdot T$ на кривој c (ако постоји овај крив. инт. прве врсте). скаларни производ

Означавамо га са $\int_c F \cdot dr$, или, ако је $F=(P,Q,R)$, са

$$\int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz .$$

Дакле,

$$\boxed{\int_c F \cdot dr := \int_c F \cdot T\,ds .}$$

T је векторско поље јединичних тангентних вектора (дефинисано на претходној страни), а скаларни производ два векторска поља на кривој c јесте скаларно поље које се добија кад се одговарајући вектори помноже скаларно тачка по тачка:

скаларни производ

$$(F \cdot T)(x,y,z) := \underbrace{F(x,y,z)}_{\in \mathbb{R}^3} \cdot \underbrace{T(x,y,z)}_{\in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R} \quad \text{за све } (x,y,z) \in c .$$

Знамо да је векторско поље T непрекидно (због глаткости криве c), па ако је и F непрекидно, онда је њихов скаларни производ $F \cdot T$ непрекидно скаларно поље. Став са стране $\boxed{4}$ онда обезбеђује постојање интеграла $\int_C F\cdot dr$, а из тог истог става следи и овај наредни, који даје основни алат за израчунавање криволинијског интеграла друге врсте.

Став: Ако је C глатка оријентисана крива, $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ њена регуларна параметризација која одређује њену задату оријентацију и F непрекидно векторско поље на C, онда је

$$\boxed{\int_C F\cdot dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt.}$$

скаларни производ

став са стр. $\boxed{4}$

Δ: $$\int_C F\cdot dr = \int_C F\cdot T\,ds \overset{\downarrow}{=} \int_a^b \big(F(r(t))\cdot T(r(t))\big)\cdot \|r'(t)\|\,dt$$

обично множење

$$\overset{(*)}{=} \int_a^b \Big(F(r(t))\cdot\Big(\frac{1}{\cancel{\|r'(t)\|}}\cdot r'(t)\Big)\Big)\cdot \cancel{\|r'(t)\|}\,dt$$

билинеарност скаларног производа

$$= \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt. \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Ако је $F=(P,Q,R)$ и $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$, онда је $F(r(t))=\big(P(r(t)),Q(r(t)),R(r(t))\big)$, а $r'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$, па једнакост из претходног става поприма сл. облик (користимо ону другу ознаку за криволинијски интеграл друге врсте):

$$\boxed{\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_a^b\big(P(r(t))\cdot x'(t)+Q(r(t))\cdot y'(t)+R(r(t))\cdot z'(t)\big)\,dt,} \quad \text{(J)}$$

што и оправдава ову ознаку (знамо још из Анализе 1 да је $dx = x'\,dt,\ldots$)

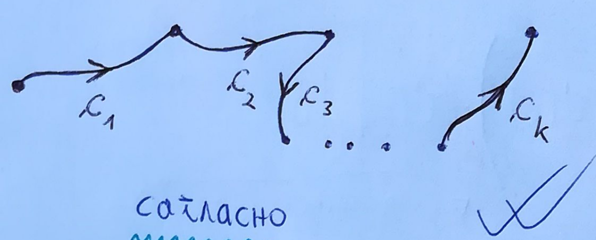
Ако је C^- крива која се добија од оријентисане криве C променом оријентације (дакле, иста крива, само супротно оријентисана), онда за одговарајуће тангентно векторско поље имамо $T^- = -T$, па је

$$\int_{C^-} F\cdot dr = \int_{C^-} F\cdot T^- \, ds = -\int_{C^-} F\cdot T \, ds = -\int_{C} F\cdot T \, ds = -\int_{C} F\cdot dr.$$

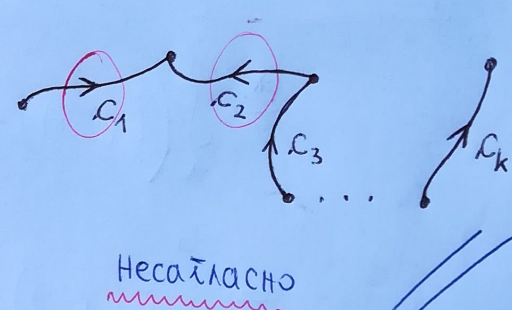
Ово је једнакост кривол. интеграла прве врсте, који не зависе од оријентације, па је за њих $C = C^-$.

глатке

Оријентацију део-по-део глатке криве $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ дефинишемо као сагласно оријентисање кривих $C_1, C_2, \dots, C_k$.



сагласно



несагласно

Тако и криволинијски интеграл (друге врсте) векторског поља F на оријентисаној део-по-део глаткој кривој C дефинишемо на сл. начин:

$$\int_C F\cdot dr := \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \dots + \int_{C_k} F\cdot dr.$$

У наредном ставу установљавамо особине линеарности и адитивности за криволинијски интеграл друге врсте. Оне следе из одговарајућих особина криволинијског интеграла прве врсте (делови (а) и (г) става на стр. $\boxed{7}$).

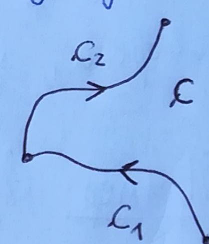
Став: Нека је $\mathcal{C}$ (део-по-део) глатка оријентисана крива, F и G непрекидна векторска поља на $\mathcal{C}$ и нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(а) $$\int_{\mathcal{C}} (\alpha F + \beta G) \cdot dr = \alpha \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr + \beta \int_{\mathcal{C}} G \cdot dr \,;$$

[линеарност]

(б) ако је $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, где су $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ (део-по-део) глатке криве оријентисане сагласно са $\mathcal{C}$, при чему се крај криве $\mathcal{C}_1$ поклапа с почетком криве $\mathcal{C}_2$, онда је

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$



[адитивност]

билинеарност скаларног производа

Δ: (а) $$\int_{\mathcal{C}} (\alpha F + \beta G) \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} (\alpha F + \beta G) \cdot T \, ds = \int_{\mathcal{C}} \big(\alpha (F \cdot T) + \beta (G \cdot T)\big) ds$$

линеарност крив. интег. I врсте

$$= \alpha \int_{\mathcal{C}} F \cdot T \, ds + \beta \int_{\mathcal{C}} G \cdot T \, ds$$

$$= \alpha \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr + \beta \int_{\mathcal{C}} G \cdot dr. \quad \checkmark$$

адитивност крив. интег. I врсте

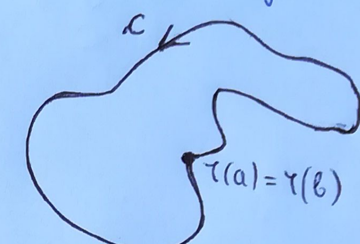
(б) $$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} F \cdot T \, ds = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot T \, ds + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot T \, ds$$

$\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ су оријент. сагласно са $\mathcal{C}$, па је исто T

$$= \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr. \quad \checkmark$$

Питање за размишљање: Зашто немамо особину монотоности за криволинијски интеграл друге врсте?

Ако је $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ параметризација криве C и ако је $r(a)=r(b)$, онда је C затворена крива.



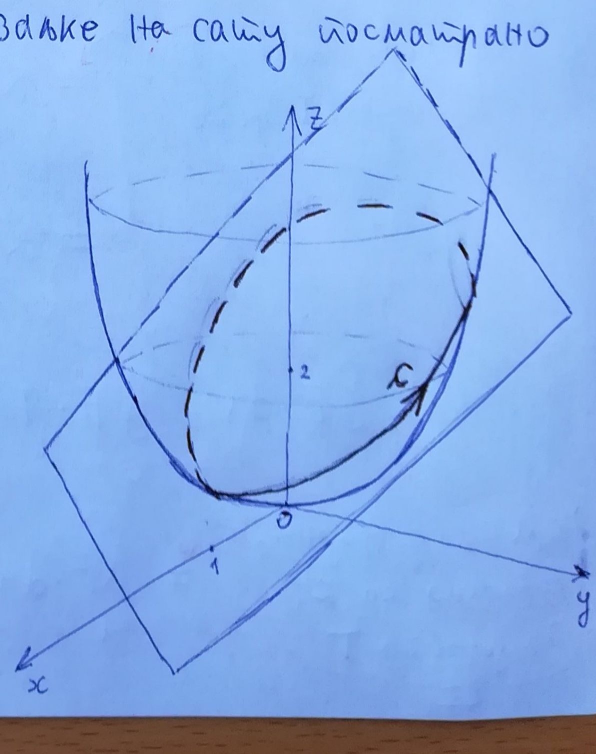
Интеграл векторског поља F на затвореној кривој C означавамо и са $\oint_C F\cdot dr$ и називамо га циркулацијом вект. поља F дуж криве C. Дакле, кружић у ознаци $\oint_C F\cdot dr$ само назначава да је крива по којој се интеграли затворена, у суштини то је исто што и $\int_C F\cdot dr$.

Пример: Одредити циркулацију векторског поља

$$F(x,y,z)=(-x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z)$$

дуж криве $C:\left\{\begin{array}{l} z=x^2+y^2\\ 2x-2y+z-2=0\end{array}\right\}$ оријентисане у смеру супротном смеру кретања казаљке на сату посматрано из тачке $(0,0,2020)$.

Крива C је елипса која се добија као пресек параболоида $z=x^2+y^2$ и равни $2x-2y+z-2=0$, оријентисана ↺ гледано одозго. Да бисмо је параметризовали, параметризоваћемо најпре њену пројекцију на xy-раван, а онда и z изразити преко параметра t из једне од две једначине.



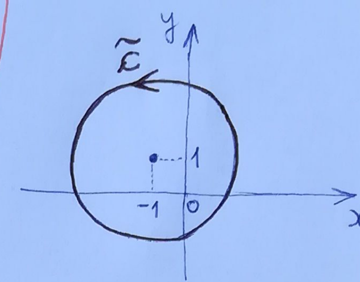
$\tilde{c}$ - пројекција криве c на xy-раван

$$c: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = -2x+2y+2 \end{cases}$$

$\tilde{c}: \ x^2+y^2 = -2x+2y+2$

$\tilde{c}: \ \boxed{(x+1)^2+(y-1)^2 = 4}$

$\Rightarrow$ $\tilde{c}$ је кружница са центром $(-1,1)$ полупречника 2 оријентисана $\circlearrowleft$



Једна њена параметризација је:

$$\tilde{c}: \begin{cases} x = -1+2\cos t \\ y = 1+2\sin t \end{cases}, \quad t \in [-\pi, \pi] \quad \Rightarrow \quad c: \begin{cases} x = -1+2\cos t \\ y = 1+2\sin t \\ z = 6-4\cos t+4\sin t \end{cases}, \quad t \in [-\pi,\pi]$$

$$x' = -2\sin t, \quad y' = 2\cos t, \quad z' = 4\sin t + 4\cos t$$

Имамо регул. параметризацију криве c која одређује њену оријентацију.

$$\oint_c F \cdot dr = \oint_c (-x+y+z)\,dx + (x-y+z)\,dy + (x+y-z)\,dz$$

$$\overset{(J)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[(8-6\cos t+6\sin t)\cdot(-2\sin t) + (4-2\cos t+2\sin t)\cdot 2\cos t + (-6+6\cos t-2\sin t)\cdot(4\sin t+4\cos t) \Big]\,dt$$

$$= \ldots = \boxed{0}.$$