14. V 2020.

– Бернулијева једначина

То је једначина облика $\boxed{y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha},}$ (Б)

не зависе од y

где је $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ (за $\alpha \in \{0,1\}$ ово је линеарна једначина).

Она се сменом своди на линеарну једначину.

смена: $\boxed{z = y^{1-\alpha}}$, $z = z(x)$ – нова зависно променљива

$$\Rightarrow \quad z' = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$$

Дакле, ако y' помножимо са $(1-\alpha)\,y^{-\alpha}$ добијамо z'. Зато једначину (Б) множимо са $(1-\alpha)\,y^{-\alpha}$ и добијамо:

$$z' + (1-\alpha)\,P(x)\,z = (1-\alpha)\,Q(x),$$

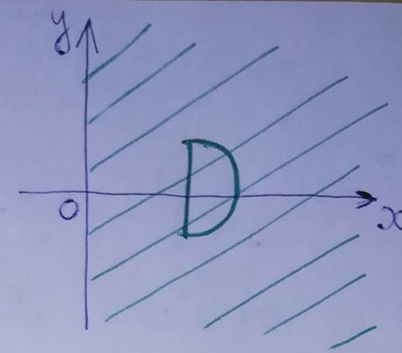
а ово је линеарна једначина (с непознатом функцијом $z = z(x)$).

Напомена: За $\alpha > 0$, очигледно је да је функција $y \equiv 0$ решење једначине (Б), а оно се „изгуби" применом ове смене (због множења са $(1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}$). Зато га треба „додати" на крају. (У наредном примеру ћемо имати такву ситуацију.)

Пример: Решити диференцијалну једначину $x^3y' - 2x^2y = y^2\ln x$.

Кад поделимо једначину са x^3 добијамо: $\boxed{y' - \frac{2}{x}\,y = \frac{\ln x}{x^3}\,y^2.}$ (1)

Бернулијева ($\alpha = 2$).



Овде је област D из Теореме о постојању и јединствености решења (стр. $\boxed{10}$ претходног предавања) десна полураван,

$$D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

Функција $y = 0$ јесте решење ове једначине. За $y \neq 0$ уводимо смену:

$$z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad z = z(x)$$

$$\Rightarrow \quad z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad \text{Једначину (1) множимо са } -\frac{1}{y^2}:$$

$$z' + \frac{2}{x} z = -\frac{\ln x}{x^3}.$$

линеарна, при чему је $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$

$$\int P(x)\,dx = 2\ln x, \quad \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx = -\int \frac{\ln x}{x^3} \cdot e^{\ln x^2}\,dx = -\int \frac{\ln x}{x^{\cancel{3}}}\cancel{x^2}\,dx$$

$$= -\int t\,dt = -\frac{1}{2}\ln^2 x. \qquad t = \ln x$$

стр. $\boxed{17}$ претходног предавања

(OP)

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1}{x^2}\left(c_1 - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = \frac{\overbrace{2c_1}^{=:c} - \ln^2 x}{2x^2} = \frac{c - \ln^2 x}{2x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Вратимо смену: $y = \frac{1}{z} = \frac{2x^2}{c - \ln^2 x}$, $c \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Опште решење (скуп свих решења):

$y = \frac{2x^2}{c - \ln^2 x}$, $c \in \mathbb{R}$;
$y \equiv 0$.

Тотални диференцијал

Уочимо диференцијалну једначину $\boxed{M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0,}$ (ТД)

где су M и N функције две променљиве дефинисане на неком области $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Ако је векторско поље $F(x,y)=(M(x,y),N(x,y))$ градијентно на D, тј. ако постоји реална фја $f:D\to\mathbb{R}$ т.д. је $(f'_x,f'_y)=\nabla f=F=(M,N)$, онда је опште решење једначине (ТД) имплицитно задато на сл. начин:

$$f(x,y)=c\quad,\quad c\in\mathbb{R}.\qquad (*)$$

Наиме, ако диференцирамо једнакост $(*)$, по правилу ланца добијамо (извод је по x, а $y=y(x)$ је функција од x):

$$\underbrace{f'_x(x,y)}_{=M(x,y)}\cdot 1+\underbrace{f'_y(x,y)}_{=N(x,y)}\cdot y'=0\,,$$

а ово је баш (ТД).

Да би векторско поље F било градијентно (ако знамо да је непрекидно-диференцијабилно) неопходно је да важи $M'_y=N'_x$, а ако се ограничимо на неку просто повезану област $D_1\subseteq D$ (што увек можемо), онда је то и довољно (в. последицу Гринове формуле на стр. $\boxed{12}$ предавања од 23. IV).

Пошто је $y'=\dfrac{dy}{dx}$, множењем једначине (ТД) са dx добијамо њен други облик:

$$\boxed{M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0.}\qquad (\text{ТД}')$$

Знамо да за реалну фју f две променљиве и њен диференцијал $df(x,y)$ у тачки (x,y) важи

$$df(x,y)(h,k) = f'_x(x,y)\cdot h + f'_y(x,y)\cdot k$$

$$= f'_x(x,y)\cdot \underbrace{p_1}_{\text{пројекција на прву координату}}(h,k) + f'_y(x,y)\cdot \underbrace{p_2}_{\text{пројекција на другу коорд.}}(h,k)\ , \text{ за све } (h,k)\in\mathbb{R}^2.$$

$$\Rightarrow \quad df(x,y) = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy \ , \quad (*)$$

једнакост два линеарна пресликавања $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

где је са dx означена пројекција на прву координату, а са dy пројекција на другу ($p_1(x,y)=x$, па је зато $dx = dp_1(x,y) = p_1$; и слично за dy).

јер је p_1 линеарно

Зато се израз на десној страни једнакости $(*)$ назива **тоталним диференцијалом** (то је диференцијал фје f).

Дакле, кад имамо једначину (ТД), тј. (ТД'), можемо да се питамо да ли је израз $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ тотални диференцијал, тј. да ли је $M'_y = N'_x$. Ако јесте, решење добијамо тако што нађемо фју f чији је то диференцијал (формула $(*)$).

Пример: Решити једначину $\underbrace{2y(3x-1)}_{=M(x,y)} + \underbrace{(3x^2-2x+4y)}_{=N(x,y)}\cdot y' = 0.$

$$M'_y = 2(3x-1)\ ,\quad N'_x = 6x-2 \quad\Rightarrow\quad M'_y = N'_x \text{ на } \mathbb{R}^2 \ \checkmark$$

$f(x,y)=?$,

$$f'_x(x,y) = M(x,y) = 2y(3x-1) \quad \Big/ \int dx$$

$$f(x,y) = 2y\int(3x-1)\,dx = 2y\left(3\cdot\frac{x^2}{2}-x\right) + \varphi(y)$$

константа по x, али може да зависи од y

$$f(x,y) = 3x^2y - 2xy + \varphi(y) \quad /'_y$$

$$\left.\begin{aligned} f'_y(x,y) &= 3x^2 - 2x + \varphi'(y) \\ &\parallel \\ N(x,y) &= 3x^2 - 2x + 4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi'(y) &= 4y \\ \varphi(y) &= 2y^2 \end{aligned}$$

(*) $\Longrightarrow$ Опште решење: $3x^2y - 2xy + 2y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Линеарне диференцијалне једначине вишег реда

Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека су $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ и $b(x)$ функције дефинисане на неком интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$. Диференцијална једначина

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = b(x)} \quad (ЛЈ)$$

зове се линеарна једначина n-тог реда. (већ смо проучавали линеарну једначину првог реда; стр. 15 претходног предавања).

Ако са $L(y)$ означимо леву страну једначине (ЛЈ), онда видимо да, ако су y_1 и y_2 n пута диференцијабилне функције на I и ако је $\alpha \in \mathbb{R}$, онда важи

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), \quad L(\alpha y_1) = \alpha L(y_1), \quad (+)$$

јер је $(y_1+y_2)' = y_1' + y_2'$, $(\alpha y_1)' = \alpha y_1'$, ...

Наравно, да је нека функција φ решење једначине (ЛЈ) (на интервалу I) значи да је φ n пута диференцијабилна на I и да важи $L(\varphi) = b(x)$, тј. $\varphi^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\cdot\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\cdot\varphi'(x) + a_0(x)\cdot\varphi(x) = b(x)$, за све $x \in I$.

– хомогена линеарна једначина

То је линеарна једначина (ЛЈ) у којој је $b(x) \equiv 0$. Дакле,

$$\boxed{\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y}_{=L(y)} = 0.} \quad \text{(ХЛЈ)}$$

Као и пре, $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ јесу функције дефинисане на неком интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$. Из линеарне алгебре знамо да скуп свих функција из I у $\mathbb{R}$, који се означава са $\mathbb{R}^I$, јесте један векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. Ако су $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^I$ (дакле, $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$) решења једначине (ХЛЈ), тј. ако је $L(y_1) = L(y_2) = 0$, онда из једнакости (+) закључујемо да су и $y_1 + y_2$ и αy_1 (за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$) такође решења једначине (ХЛЈ). То значи да је скуп свих решења једначине (ХЛЈ) један векторски потпростор векторског простора $\mathbb{R}^I$.

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема: Димензија векторског простора свих решења једначине (ХЛЈ) (на интервалу I) јесте n.

Дакле, ако нађемо n линеарно независних решења једначине (ХЛЈ), $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, онда је скуп свих њених решења

$$\{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

Зато, у том случају, запис $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ називамо општим решењем једначине (ХЛЈ).

За утврђивање да ли су дата решења $y_1, y_2, \dots, y_n$ једначине (ХЛЈ) линеарно независна корисна је следећа детерминанта, која се назива детерминанта Вронског, или вронскијан:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Став: Решења $y_1, y_2, \dots, y_n$ једначине (ХЛЈ) јесу линеарно независна ако и само ако је $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$.

Ни овај став нећемо доказивати, али ћемо уместо њега доказати лему помоћу које ћемо (у случају $n=2$) доказивати да су два уочена решења линеарно независна.

Лема: Нека су $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^I$ и нека је $y_1(x) \neq 0$ за све $x \in (a,b) \subseteq I$. Ако су y_1 и y_2 линеарно зависне, онда је $\frac{y_2}{y_1}$ константна функција на (a,b).

Δ: Да су $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^I$ линеарно зависне значи да постоје константе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, од којих је бар једна различита од нуле, т.д. је

$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ за све $x \in I$.

Пп. $\beta = 0 \Rightarrow \alpha \underbrace{y_1(x)}_{\neq 0} = 0$ за све $x \in (a,b) \Rightarrow \alpha = 0$ ↯

$\Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2(x)}{y_1(x)} = -\frac{\alpha}{\beta}$ за све $x \in (a,b)$. ✓ ∎

Посматрајмо сад једначину (ХЛЈ), али такву да су све функције $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ константне – $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$, $i=\overline{0,n-1}$ (у овом случају је $I=\mathbb{R}$):

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0} \qquad \text{(ХЛЈКК)}$$

хомогена линеарна једначина с константним коефицијентима

Нека је $\lambda\in\mathbb{R}$. Диференцирање функције $y=e^{\lambda x}$ само „избацује" једно λ испред: $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$, …, $y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$. Зато је занимљиво ову функцију уврстити у једначину (ХЛЈКК), испитати да ли је она њено решење:

$y=e^{\lambda x}$ је решење једн. (ХЛЈКК) $\iff \underbrace{e^{\lambda x}}_{>0}\cdot\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$ за све $x\in\mathbb{R}$

(ЕКВ)

$\iff \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

$\iff$ број λ је нула полинома P, где је $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$.

Полином P називамо карактеристичним полиномом једначине (ХЛЈКК), а једначину $P(t)=0$ карактеристичном једначином диф. једначине (ХЛЈКК).

У наставку показујемо како се у случају $n=2$ могу наћи два линеарно независна решења једначине (ХЛЈКК), а самим тим, на основу теореме са стране $\boxed{6}$ (и коментара након ње), и њено опште решење.

Ако је, дакле, $n=2$, једначина (ХЛЈКК) поприма облик:

$$\boxed{y'' + by' + cy = 0,} \quad (H2)$$

где су $b, c \in \mathbb{R}$; док за карактеристични полином P имамо:

$$\boxed{P(t) = t^2 + bt + c.}$$

Разликујемо три случаја.

1° $\underbrace{b^2 - 4c}_{\text{дискриминанта квадратне једначине } P(t)=0} > 0$

У овом случају имамо λ_1 и λ_2, две реалне, међусобно различите нуле полинома P.

$$\xRightarrow{(EKB)} \left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \end{aligned}\right\} \text{ решења једн. } (H2)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{const} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \quad \xRightarrow{\text{лема}} \quad y_1 \text{ и } y_2 \text{ су лин. независне}$$

стр. $\boxed{7}$

$\Longrightarrow$ Опште решење једначине (H2) је:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2° $b^2 - 4c = 0$

У овом случају имамо само једну (двоструку) нулу $\lambda \in \mathbb{R}$ полинома P, и важи да је $\lambda = -\frac{b}{2}$.

$$P(t) = t^2 + bt + \frac{b^2}{4} = \left(t + \frac{b}{2}\right)^2$$

Знамо да је $y_1 = e^{\lambda x}$ решење једначине (H2), а покажимо да је то и фја $y_2 = xe^{\lambda x}$:

$$y_2' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} = (1 + \lambda x)e^{\lambda x};$$

$$y_2'' = \lambda e^{\lambda x} + \lambda(1 + \lambda x)e^{\lambda x} = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad y_2'' + by_2' + cy_2 = \Big(\underbrace{(2\lambda + b)}_{=0} + \underbrace{(\lambda^2 + b\lambda + c)}_{=P(\lambda)=0} x \Big) e^{\lambda x} = 0$$

$\lambda = -\frac{b}{2}$

$\Rightarrow$ y_2 је заиста решење једначине (Н2).

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const} \xRightarrow{\text{лема}} y_1 \text{ и } y_2 \text{ су линеарно независне}$$

$\Rightarrow$ Опште решење једначине (Н2) је:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \text{ тј.}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3° $b^2 - 4c < 0$

У овом случају имамо комплексне, међусобно конјуговане нуле полинома P:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Из Вијетових формула знамо да је $c = \lambda_1 \lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2$ и $-b = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha$.

Докажимо да је функција $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ једно решење једначине (Н2):

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x);$$

$$y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$= e^{\alpha x}\big((\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x\big)$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' + by_1' + cy_1 = e^{\alpha x}\Big(\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + b\alpha + c)}_{=0}\cos\beta x + \underbrace{(-2\alpha\beta - b\beta)}_{=0}\sin\beta x\Big) = 0$$

Слично се добија и да је функција $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ решење једн. (Н2).

$$\frac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg}\beta x \overset{\beta \neq 0}{\neq} \text{const} \xRightarrow{\text{лема}} y_1 \text{ и } y_2 \text{ су лин. независне}$$

$\Rightarrow$ Опште решење једначине (H2) је:

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ , тј.}$$

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right) \text{ , } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Примери: 1) Решити једначину $y'' - 2y' - 3y = 0$.

$$P(t) = t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ , } \lambda_2 = -1$$

$\Rightarrow$ Опште решење: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Решити једначину $y'' + y' + y = 0$.

$$P(t) = t^2 + t + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ Опште решење: $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + c_2\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Пре трећег примера уведимо један појам. Проблем проналажења оног решења диференцијалне једначине n-тог реда (нпр. једначине (ЛЈ)) које задовољава n почетних услова облика:

$$y(x_0) = s_0 \text{ , } y'(x_0) = s_1 \text{ , } \ldots \text{ , } y^{(n-1)}(x_0) = s_{n-1} \text{ ;}$$

исто x_0 свуда

где су $x_0, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ дате константе, назива се Кошијев проблем.

3) Решити Кошијев проблем: $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

$$P(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

$\Rightarrow$ Опште решење једн. $y''-4y'+4y=0$ је $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y(0)=0 \Rightarrow$ убацимо $x=0, y=0$ у :

$0 = c_1$

$\Rightarrow y = c_2 x e^{2x}$

$y' = (c_2 + 2c_2 x)e^{2x}$

$y'(0)=3 \Rightarrow$ убацимо $x=0, y'=3$ у : $3 = c_2$

$\Rightarrow$ Решење Кошијевог проблема је функција $y = 3xe^{2x}$.

Може се показати да се опште решење једначине (ХЛЈКК) у случају $n>2$ добија на аналоган начин.

Пример: Решити једначину $y'''-3y''+4y'-2y=0$.

$$P(t) = t^3-3t^2+4t-2 = (t-1)(t^2-2t+2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$\Rightarrow$ Опште решење: $y = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x$, тј.

$$y = e^x(c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

– Нехомогена линеарна једначина

Вратимо се сад на (нехомогену) једначину (ЛЈ):

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y}_{=L(y)} = b(x).$$

Нека је y_p једно решење једначине (ЛЈ). Дакле, $y_p : I \to \mathbb{R}$ је n пута диференцијабилна на I и важи $L(y_p) = b(x)$ за све $x \in I$.

За n пута диференцијабилну фју $y : I \to \mathbb{R}$ важе еквиваленције:

y је решење једначине (ЛЈ) $\iff L(y) = b(x)$

$\iff L(y) = L(y_p)$

$\overset{(+)}{\iff} L(y - y_p) = 0$

$\iff$ $y - y_p$ је решење одговарајуће хомогене једначине (ХЛЈ)

$\iff$ $y = y_h + y_p$, где је y_h неко решење једначине (ХЛЈ)

Дакле, сва решења једначине (ЛЈ) су облика $y_h + y_p$, где је y_h решење једначине (ХЛЈ), и обрнуто, ако је y_h решење једначине (ХЛЈ), онда је $y_h + y_p$ решење једначине (ЛЈ). Овим је доказан следећи став.

Став: Ако је y_h опште решење једначине (ХЛЈ) и y_p једно конкретно решење једначине (ЛЈ), онда је опште решење једначине (ЛЈ) дато са:

$$\boxed{y = y_h + y_p.}$$

Оно што ми знамо јесте да одредимо опште решење хомогене линеарне једначине с константним коефицијентима (ХЛЈКК).

Посматрајмо зато једначину (ЛЈ), али с константним коефицијентема: $\boxed{\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y}_{=L(y)} = b(x).}$ (ЛЈКК)

Како наћи једно решење једначине (ЛЈКК) (да бисмо, помоћу претходног става, онда добили и сва њена решења)? Један случај је описан у наредном ставу, који наводимо без доказа.

Став: Ако је функција $b(x)$ следећег облика:

$$\boxed{b(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x \right),}$$

где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, P_m полином степена m и Q_l полином степена l (неки од ових полинома може бити и нула-полином, а подразумевамо да је степен нула-полинома $-\infty$), онда постоји решење y_p једначине (ЛЈКК) сл. облика:

$$\boxed{y_p = e^{\alpha x} \cdot \left(\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x \right) \cdot x^d,}$$

где је $k = \max\{m, l\}$, $\tilde{P}_k$ и $\tilde{Q}_k$ полиноми степена $\leq k$, а d је вишеструкост нуле $\alpha \pm i\beta$ карактеристичног полинома $P(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$.

Примери: 1) Решити једначину $y'' - y = 4e^{-2x}$.

$P(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ Опште решење одговарајуће хомогене једначине $y'' - y = 0$ јесте: $\underline{y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Сад помоћу претходног става тражимо једно решење y_p:

$b(x) = 4e^{-2x} \Rightarrow \alpha = -2,\ \beta = 0,\ m = 0,\ P_0(x) = 4$

$\Rightarrow$ Тражимо решење полазне једначине у облику:

$$y_p = \tilde{P}_0(x) \cdot e^{-2x} \cdot x^0 = Ae^{-2x} \quad , \quad A \in \mathbb{R}$$

Број -2 није нула карактеристичног полинома P, па је $d=0$.

На основу става, дакле, знамо да постоји константа $A \in \mathbb{R}$ т.д. је $y_p = Ae^{-2x}$ решење полазне једначине. Нађимо је.

$y_p' = -2Ae^{-2x}$, $y_p'' = 4Ae^{-2x}$ $\Rightarrow$ $y_p'' - y_p = 3Ae^{-2x}$

$\Rightarrow$ $3A = 4$ $\Rightarrow$ $A = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $y_p = \frac{4}{3}e^{-2x}$

$\Rightarrow$ Опште решење: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{4}{3}e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Решити једначину $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.

$P(t) = t^2 - 4 = (t-2)(t+2)$ $\Rightarrow$ $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$.

Сад број -2 јесте ~~не~~ нула каракт. полинома P, и то једнострука. Зато је $d=1$, па решење тражимо у облику $y_p = Ae^{-2x} \cdot x$.

$y_p' = A(1-2x)e^{-2x}$, $y_p'' = A(-2-2+4x)e^{-2x} = 4A(x-1)e^{-2x}$

$\Rightarrow$ $y_p'' - 4y_p = A(\cancel{4x} - 4 - \cancel{4x})e^{-2x} = -4Ae^{-2x}$ $\Rightarrow$ $-4A = 4$

$\Rightarrow$ $A = -1$ $\Rightarrow$ $y_p = -xe^{-2x}$

$\Rightarrow$ Опште решење: $y = c_1 e^{2x} + (c_2 - x)e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Пре следећег примера приметимо ову чињеницу: ако је $b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_r(x)$, y_{p_1} решење једначине $L(y) = b_1(x)$, ...

$\dots, y_{pr}$ решење једначине $L(y)=b_r(x)$, онда је $y_{p1}+y_{p2}+\dots+y_{pr}$ решење једначине (ЛЈКК). Наиме,

$$\underline{L(y_{p1}+\dots+y_{pr})} \overset{(+)}{=} L(y_{p1})+\dots+L(y_{pr}) = b_1(x)+\dots+b_r(x) = \underline{b(x)}.$$

3) Решити једначину $y''+4y = \underbrace{2}_{=b_1(x)\ \boxed{0}} + \underbrace{(8x-1)\sin 2x}_{=b_2(x)\ \boxed{\pm 2i}}$.

$P(t)=t^2+4 \implies \lambda_{1,2}=\pm 2i \implies \underline{y_h = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x}$

$$y_p = y_{p_1}+y_{p_2} = \underbrace{A}_{\substack{\alpha=\beta=0 \\ m=0,\ P_0(x)=2 \\ d=0}} + \underbrace{\big((Bx+C)\cos 2x + (Dx+E)\sin 2x\big)\cdot x}_{\substack{\alpha=0,\ \beta=2 \\ m=-\infty \quad l=1 \\ P_m(x)=0 \quad Q_1(x)=8x-1 \\ \implies k=1,\ d=1}}$$

$y_p' = \dots$

$y_p'' = \dots$

$\vdots$

Добију се константе A, B, C, D и E . . . $\underline{y = y_h + y_p}$.

4) Решити једначину $y'''-3y''+4y'-2y = \underbrace{(x+3)e^x}_{=b_1(x)\ \boxed{1}} \underbrace{-2\sin x}_{=b_2(x)\ \boxed{\pm i}} + \underbrace{e^x\cos x}_{=b_3(x)\ \boxed{1\pm i}}$.

пример на стр. $\boxed{12}$ $\implies \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3}=1\pm i$, $\underline{y_h = e^x(c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x)}$

$$y_p = y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3} = \underbrace{(Ax+B)e^x\cdot x}_{\substack{\alpha=1,\ \beta=0, \\ m=1,\ P_1(x)=x+3, \\ d=1}} + \underbrace{C\cos x + D\sin x}_{\substack{\alpha=0,\ \beta=1 \\ P_m(x)=0,\ Q_0(x)=-2 \\ \implies k=0,\ d=0}} + \underbrace{e^x(E\cos x + F\sin x)\cdot x}_{\substack{\alpha=\beta=1 \\ P_0(x)=1,\ Q_l(x)=0 \\ \implies k=0,\ d=1}}$$

$y_p' = \dots$

$y_p'' = \dots$

$y_p''' = \dots$

$\vdots$

A, B, C, D, E, F . . . $\underline{y = y_h + y_p}$.