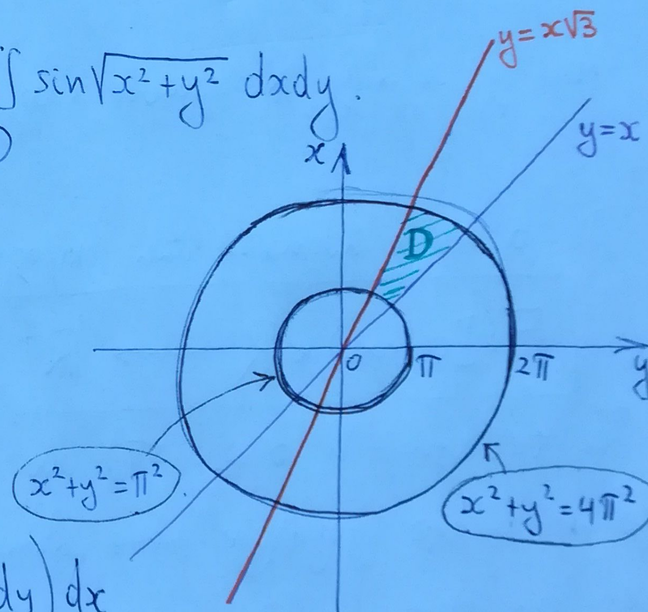
Смена променљивих у двоструком интегралу, поларне координате

Претходна два четвртка спомињали смо и користили теорему Фубинија (њене различите варијанте). Та теорема је један од два основна инструмента за израчунавање вишеструких интеграла. Други је теорема о смени променљивих, о којој ћемо сада говорити. Почињемо једним примером.

Пример: Ако је $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2,\ x\le y\le x\sqrt{3}\right\}$

израчунати интеграл $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.



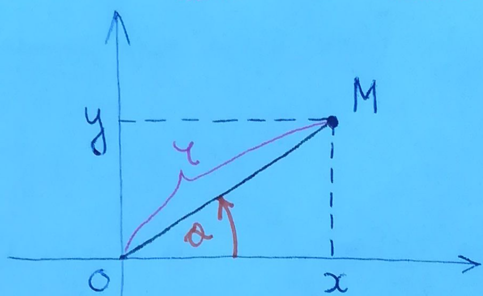
Ако пробамо да израчунамо овај интеграл помоћу оног што смо досад научили, тј. Фубинијеве теореме, видимо да ће то тешко ићи:

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_?^?\left(\int_?^?\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

Да бисмо одредили границе ових интеграла, морали бисмо заправо најпре да скуп D поделимо на три дела, применимо адитивност двоструког интеграла, па онда да одређујемо границе интеграла у сва три сабирка. То је изводљиво и то је мањи проблем. Много већи проблем је како израчунати унутрашњи интеграл $\int_?^?\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$ ма шта да су му границе.

Овај интеграл се може израчунати сменом променљивих у двоструком интегралу, односно преласком на поларне координате. Објаснимо како се у начелу прелази на поларне координате, а онда ћемо то применити на овај пример.

Свака тачка $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ има (јединствено одређене) поларне координате $r>0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$.



$M(r, \theta)$

радијус (радијална координата)

азимут (угаона координата)

Ако су x и y Декартове координате тачке M, онда је $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

Зато ћемо посматрати наредну функцију:

$\boxed{F : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2}$, $F(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

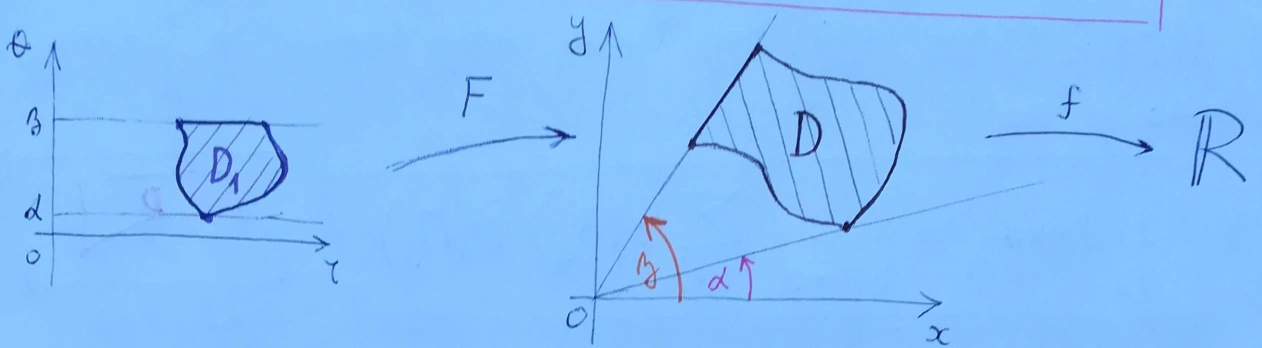
За $r \in (0, +\infty)$ и $\theta \in [0, 2\pi)$, ова ф-ја, дакле, поларним координатама дате тачке додељује њене Декартове координате. Сетимо се да смо ову ф-ју срели и пре – као један пример за одређивање јакобијана. Тада смо видели да је јакобијан ове ф-је у (произвољној) тачки (r, θ):

$$J_F(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Желимо да скицирамо доказ следеће чињенице:

ПК Нека су $D, D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ отворени, повезани и мерљиви скупови, такви да F пресликава $\overline{D}_1$ у $\overline{D}$, а да D_1 пресликава бијективно на D. Ако је f интеграбилна фја на D, онда је

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(\underbrace{r\cos\theta, r\sin\theta}_{=F(r,\theta)})\,\underbrace{r}_{=J_F(r,\theta)}\,dr\,d\theta.} \qquad (1)$$

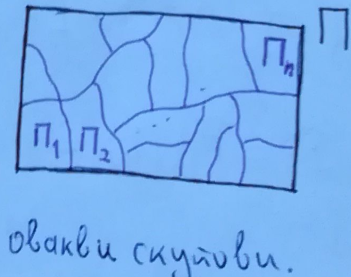


Скицу доказа једнакости (1) почињемо једном општом напоменом.

Напомена: Ако је Π неки правоугаоник у $\mathbb{R}^2$ знамо да је $I=\iint\limits_{\Pi} f\,dx\,dy$ акко $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall (P,A))\ \lambda(P)<\delta \Rightarrow |\sigma(f,P,A)-I|<\varepsilon$.

Мање формално, $I=\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,A)$.

Овде је P подела правоугаоника Π на оне мале правоугаонике, али Π заправо можемо поделити на било какве мерљиве скупове $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Другим речима, подела правоугаоника Π је $\mathcal{P}=\{\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_n\}$, где су $\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_n$ овакви скупови.



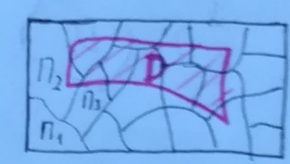
Тада је исто $\lambda(P)=\max\limits_{1\le i\le n}\operatorname{diam}\Pi_i$, а ако су $A_i\in\Pi_i$, $i=\overline{1,n}$, истакнуте тачке, интегрална сума је

$$\underset{\{A_1, A_2, \dots, A_n\}}{\sigma(f, P, \mathcal{A})} = \sum_{i=1}^{n} f(A_i) \cdot P(\Pi_i).$$

И за овако општије дефинисану поделу писаћемо:

$$\iint_{\Pi} f \, dx dy = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \mathcal{A}).$$

Ако је $D \subseteq \Pi$ мерљив скуп, онда слична ствар важи и за $\iint_D f \, dx dy$, с тим што је сад



$2, 3 \in J$, $1 \notin J$

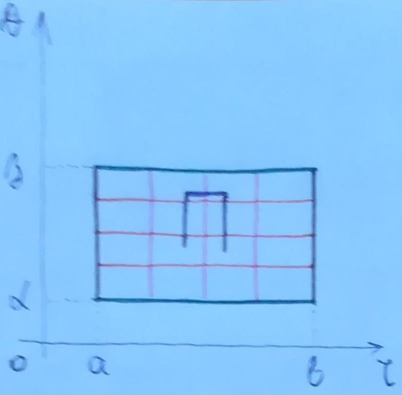
(H) $$\boxed{\iint_D f \, dx dy = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{j \in J} f(A_j) \, P(\Pi_j),}$$

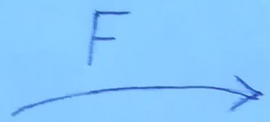
при чему сад у интегралној суми учествују само они $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ за које је $\Pi_j \cap D \neq \emptyset$ (прецизније, $J = \{ j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \Pi_j \cap D \neq \emptyset \}$). То је зато што је $\iint_D f \, dx dy = \iint_{\Pi} f \cdot \chi_D \, dx dy$, а $\chi_D = 0$ на Π_i ако је $\Pi_i \cap D = \emptyset$, тј. ако је $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus J$.

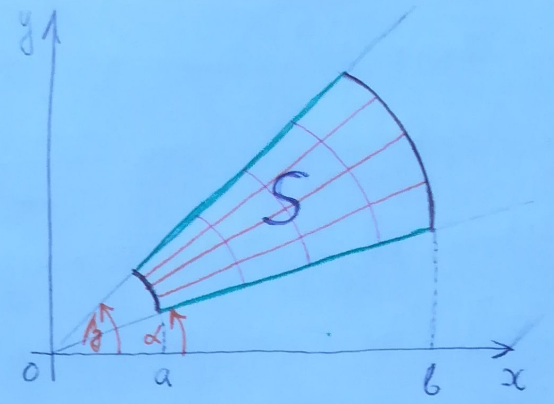
Вратимо се сад на једнакост (1) и поларне координате. Веома важно ће нам бити да одредимо однос површине правоугаоника (у $r\theta$-равни) и његове слике при F (у xy-равни).

$\Pi := [a, b] \times [\alpha, \beta]$, где је $0 \leq a < b$, $\alpha < \beta$ и $\beta - \alpha \leq 2\pi$

$$S := F(\Pi) = \Big\{ \underbrace{(r\cos\theta, r\sin\theta)}_{= F(r, \theta)} \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \underbrace{a \leq r \leq b, \ \alpha \leq \theta \leq \beta}_{\iff (r, \theta) \in \Pi} \Big\}$$







$$P(\Pi) = (b-a)(\beta-\alpha) \qquad P(S) = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\cdot b^2\pi - \frac{\beta-\alpha}{2\pi}a^2\pi$$

$$P(S) = (\beta-\alpha)(b-a)\cdot\frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(S) = \frac{a+b}{2}\cdot P(\Pi)} \quad (\square)$$

Нека је сад $n\in\mathbb{N}$ (привремено) фиксирано. Поделимо правоугаоник Π тако што му обе странице поделимо на n једнаких делова:

$$r_i := a + \frac{b-a}{n}\cdot i \ , \quad i=\overline{0,n}$$

$$\theta_j := \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\cdot j \ , \quad j=\overline{0,n}$$

$$\Pi_{ij} := [r_{i-1}, r_i]\times[\theta_{j-1},\theta_j] \ , \quad i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,n}$$

$\mathcal{P}_n := \{\Pi_{ij} \mid 1\le i\le n, 1\le j\le n\}$ – подела правоугаоника Π

Од ове поделе $\mathcal{P}_n$ помоћу ф-је F добијамо и једну поделу скупа $S=F(\Pi)$:

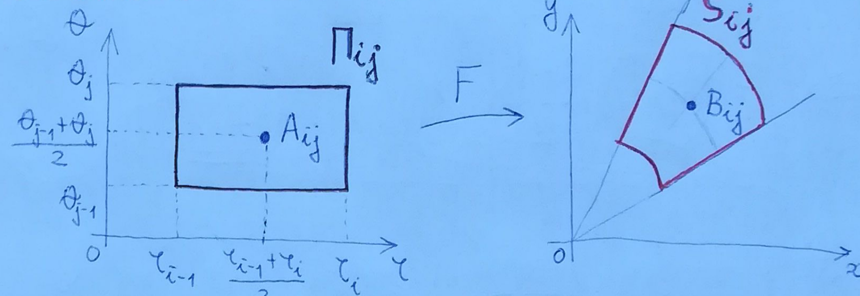
$$S_{ij} := F(\Pi_{ij}) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r_{i-1}\le r\le r_i, \ \theta_{j-1}\le\theta\le\theta_j\}, \ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$$

$\mathcal{S}_n := \{S_{ij} \mid 1\le i\le n, 1\le j\le n\}$ – подела скупа S

На исти начин као $(\square)$ добијамо да је $\boxed{P(S_{ij}) = \frac{r_{i-1}+r_i}{2}\cdot P(\Pi_{ij})}$. $(::)$

Зато ћемо за истакнуту тачку $A_{ij} \in \Pi_{ij}$ узети тачку чија је r-координата баш $\frac{r_{i-1}+r_i}{2}$, тј. средиште водоравне странице правоугаоника Π_{ij}. Њена θ-координата може бити било шта из $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, па ћемо узети нпр. да то буде средиште усправне странице. Дакле, за A_{ij} узимамо баш пресек дијагонала правоугаоника Π_{ij}.

$$A_{ij} := \left(\frac{r_{i-1}+r_i}{2}, \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2} \right) \in \Pi_{ij}, \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$$



За истакнуте тачке у подели $\mathcal{S}_n$ скупа S бирамо слике при F ових истакнутих тачака A_{ij}:

$$B_{ij} := F(A_{ij}) = \left(\frac{r_{i-1}+r_i}{2} \cdot \cos\frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}, \frac{r_{i-1}+r_i}{2} \cdot \sin\frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2} \right) \in S_{ij},$$
$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$$

Приметимо још да за параметре ових подела важи:

$$\lambda(\mathcal{P}_n) \to 0 \text{ кад } n\to\infty \quad (\Pi 1) \qquad \text{и} \qquad \lambda(\mathcal{S}_n) \to 0 \text{ кад } n\to\infty \quad (\Pi 2)$$

(сад n више није фиксирано).

Докажимо коначно чињеницу $\boxed{\text{ПК}}$, тј. једнакост (1). Узмимо да је Π (неки) правоугаоник са својством $D_1 \subseteq \Pi$. Тада је и $D \subseteq F(\Pi) = S$. За претходно конструисане поделе $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{S}_n$ скупова Π и S, нека је J_n скуп свих оних парова индекса (i,j) таквих да $\Pi_{ij} \cap D_1 \neq \emptyset$, тј. таквих да $S_{ij} \cap D \neq \emptyset$.

Означимо још са $g(r,\theta)$ подинтегралну функцију интеграла на десној страни једнакости (1). Дакле,

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r, \quad (*)$$

а ми треба да покажемо да је $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} g(r,\theta)\,dr\,d\theta$.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{(\text{Н}),(\text{П}2)}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in J_n} f(B_{ij})\cdot P(S_{ij})$$

$$\overset{(::)}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in J_n} f\left(\frac{r_{i-1}+r_i}{2}\cdot\cos\frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}, \frac{r_{i-1}+r_i}{2}\cdot\sin\frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}\right)\cdot\frac{r_{i-1}+r_i}{2}\cdot P(\Pi_{ij})$$

$$\overset{(*)}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in J_n} g\left(\frac{r_{i-1}+r_i}{2}, \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}\right)\cdot P(\Pi_{ij})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in J_n} g(A_{ij})\cdot P(\Pi_{ij})$$

$$\overset{(\text{Н}),(\text{П}1)}{=\!=} \iint\limits_{D_1} g(r,\theta)\,dr\,d\theta.$$

Овим је завршена скица доказа чињенице $\boxed{\text{ПК}}$. Она садржи неке непрецизности и неформалности (зато се и зове скица доказа, а не доказ), али поента је да наслутимо зашто важи једнакост (1); пре свега, да објаснимо како се у интегралу на десној страни, поред (очекиване) композиције $f(F(r,\theta))$, појави и јакобијан r. Можемо рећи да је у том смислу кључни део скице доказа једнакост ($\square$) на стр. $\boxed{5}$, која установљава однос између површине правоугаоника и његове слике при F. Тај однос је аритметичка средина r-координата његових темена. Како се подела уситњава, правоугаоници су све мањи, темена све ближа једно другом, па овај однос у лимесу (интегралу) буде просто координата r.

Вратимо се сад на пример са стране $\boxed{1}$ и израчунајмо тај интеграл помоћу $\boxed{\text{ПК}}$:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2, \;\; x \le y \le x\sqrt{3} \right\}$$

$$\Longrightarrow D_1 = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \pi \le r \le 2\pi, \;\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\} = [\pi, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

Једначине кружница $x^2+y^2=\pi^2$ и $x^2+y^2=4\pi^2$ у поларним координатама су $r=\pi$ и $r=2\pi$, а једначине полуправих $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$ (у првом квадранту) јесу $\theta=\frac{\pi}{4}$ и $\theta=\frac{\pi}{3}$.

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy \overset{\boxed{\text{ПК}}}{=} \iint\limits_{D_1} \sin r \cdot r \, dr\, d\theta \overset{\text{Фубини}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \Big(\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} r \sin r \, dr}_{\text{не зависи од } \theta} \Big) d\theta$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r \, dr = \frac{\pi}{12} \cdot \Big(-r\cos r \Big|_{\pi}^{2\pi} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \cos r \, dr}_{=0} \Big)$$

$u = r \quad du = dr$

$dv = \sin r \, dr \quad v = -\cos r$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \left(-2\pi - \pi\right) = \boxed{-\frac{\pi^2}{4}}$$

<u>Напомена:</u> У формулацији чињенице $\boxed{\text{ПК}}$, а и у наредној теореми (о смени променљивих), услов је да су скупови D и D_1 отворени, а у овом примеру су затворени (то су у ствари она затворења $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$ из формулације). Међутим, једнакост (1) важи и ако се узму интеграли по затворењима $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$. Наиме, $\overline{D} \setminus D$ је граница скупа D, која има површину нула, па је $\iint\limits_{\overline{D}} = \iint\limits_{D} + \underbrace{\iint\limits_{\overline{D} \setminus D}}_{=0} = \iint\limits_{D}$. Слично за D_1.

Чињеница $\boxed{\text{ПК}}$ јесте само један (мада најважнији) специјалан случај смене променљивих у двоструком интегралу. Ту теорему наводимо без доказа.

Теорема: (о смени променљивих у двоструком интегралу)

Нека су D и D_1 отворени, повезани и мерљиви скупови у $\mathbb{R}^2$ и нека је $F : \overline{D}_1 \to \overline{D}$ непрекидно-диференцијабилна функција која D_1 бијективно пресликава на D. Ако је f интеграбилна на D, онда је

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(F(u,v)) \cdot |J_F(u,v)|\,du\,dv.}$$

Смена променљивих у троструком интегралу, цилиндричне и сферне координате

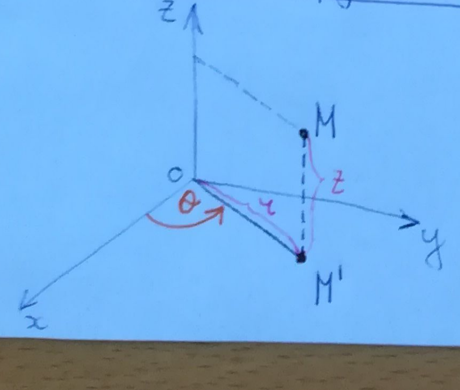
Одмах ћемо формулисати теорему о смени променљивих у троструком интегралу, која је потпуно аналогна оној за двоструки интеграл.

Теорема: (о смени променљивих у троструком интегралу) Нека су T и T_1 отворени, повезани и мерљиви скупови у $\mathbb{R}^3$ и нека је $F: \overline{T_1} \to \overline{T}$ непрекидно-диференцијабилна функција која T_1 бијективно пресликава на T. Ако је f интеграбилна на T, онда је

$$(3) \quad \boxed{\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} f\big(F(u,v,w)\big)\cdot \left|J_F(u,v,w)\right| du\,dv\,dw.}$$

Као и кад је била у питању теорема о смени променљивих у двоструком интегралу, ни ову теорему нећемо доказивати (ти докази су врло сложени). У наставку ћемо видети како изгледа једнакост (3) за две конкретне смене (за две конкретне ф-је F) – за цилиндричне и сферне координате, што ћемо и илустровати примерима.

– <u>цилиндричне координате</u>



$M(r, \theta, z)$ $\quad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}$

цилиндричне координате тачке M

(r, θ) су заправо поларне координате пројекције M' тачке M на xy-раван, док је z у ствари Декартова z-координата тачке M.

Ове координате се зову цилиндричне зато што је у њима једначина $r = c$ (где је c позитивна константа) једначина цилиндра. Наиме, r-координата дате тачке јесте њено растојање од z-осе, а скуп свих тачака које су на фиксираном растојању од неке праве јесте цилиндар.

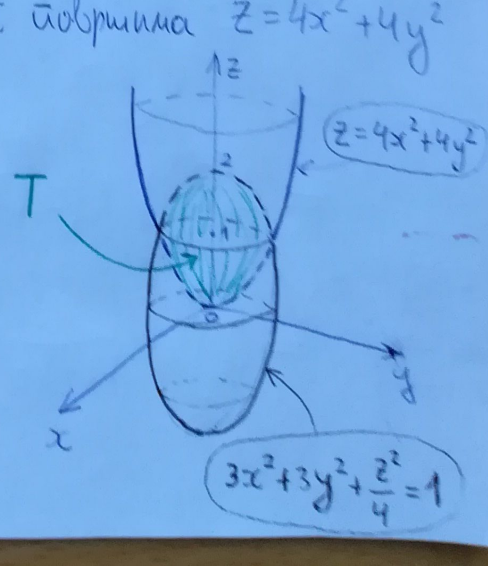
Није тешко уверити се да се Декартове координате изражавају преко цилиндричних на следећи начин: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Зато нам је функција F (функција смене) у овом случају дата са:

$$F(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \quad J_F(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Зато једнакост (3) из теореме (ако су испуњени услови те теореме) у овом случају изгледа овако:

$$\boxed{\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,dr\,d\theta\,dz.} \qquad (4k)$$

Пример: Одредити запремину тела T ограниченог површима $z = 4x^2+4y^2$ и $3x^2+3y^2+\frac{z^2}{4} = 1$.



Тело T је пресек унутрашњости параболоида $z = 4x^2+4y^2$ и унутрашњости елипсоида $3x^2+3y^2+\frac{z^2}{4} = 1$:

$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geq 4x^2+4y^2,\ 3x^2+3y^2+\frac{z^2}{4} \leq 1\right\}.$$

Одредимо тело T у цилиндричним координатама (што ће нам заправо дати тело T_1 из формуле (4к)).

$$z \geq 4(x^2+y^2) = 4r^2 \geq 0$$

$$z^2 \leq 4(1-3x^2-3y^2) \Longrightarrow z \leq 2\sqrt{1-3(x^2+y^2)} = 2\sqrt{1-3r^2}$$

Дакле, $4r^2 \leq z \leq 2\sqrt{1-3r^2}$. Даље,

$$4r^2 \leq 2\sqrt{1-3r^2} \Longleftrightarrow 2r^2 \leq \sqrt{1-3r^2} \Longleftrightarrow 4r^4 \leq 1-3r^2$$

$$\Longleftrightarrow 4r^4+3r^2-1 \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{(r^2+1)}_{>0}(4r^2-1) \leq 0 \Longleftrightarrow 4r^2-1 \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow r^2 \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

$r \geq 0$ увек

$\Longrightarrow$ Тело T је у цилиндричним координатама одређено неједнакостима $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, $4r^2 \leq z \leq 2\sqrt{1-3r^2}$. Другим речима,

$$T_1 = \left\{(r,\theta,z) \;\middle|\; 0 \leq r \leq \tfrac{1}{2},\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 4r^2 \leq z \leq 2\sqrt{1-3r^2}\right\}.$$

Фубини

$$V(T) = \iiint_T dx\,dy\,dz \overset{(4к)}{=} \iiint_{T_1} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{1/2}\left(\int_{4r^2}^{2\sqrt{1-3r^2}} r\,dz\right)dr\right)}_{\text{Не зависи од } \theta} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{1/2} r\left(2\sqrt{1-3r^2}-4r^2\right)dr$$

$\boxed{t = r^2,\ dt = 2r\,dr}$

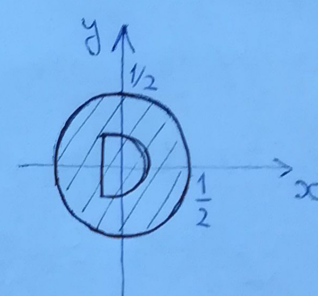
$$= \pi \int_0^{1/4} \left(2\sqrt{1-3t}-4t\right)dt = \dots$$

Како су прве две цилиндричне координате дате тачке у ствари поларне координате њене пројекције на xy-раван, а трећа Декартова z-координата, то се директна примена цилиндричних координата најчешће може избећи, тако што се најпре примени варијанта Фубинијеве теореме коју смо прошлог четвртка дали (2. IV, стр. $\boxed{14}$), а онда се у двоструком интегралу по пројекцији D тела T пређе на поларне координате. Рецимо, у претходном примеру би то изгледало овако:

$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le \frac{1}{4},\ 4(x^2+y^2) \le z \le 2\sqrt{1-3(x^2+y^2)}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in D,\ 4(x^2+y^2) \le z \le 2\sqrt{1-3(x^2+y^2)}\right\},$$

где је $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le \frac{1}{4}\right\}$ пројекција тела T на xy-раван.



$$V(T) = \iiint_T dx\,dy\,dz \overset{\text{Фубини}}{=} \iint_D \left(\int_{4(x^2+y^2)}^{2\sqrt{1-3(x^2+y^2)}} dz\right) dx\,dy$$

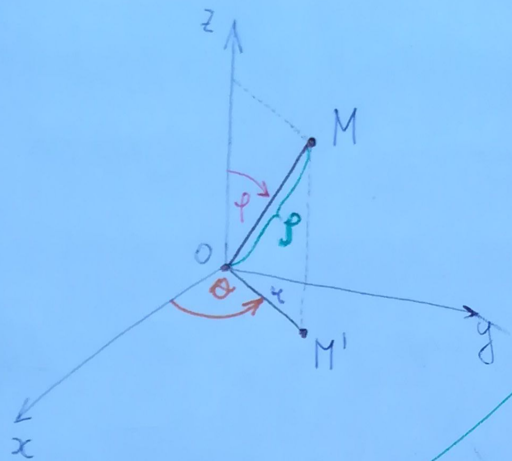
$$= \iint_D \left(2\sqrt{1-3(x^2+y^2)} - 4(x^2+y^2)\right) dx\,dy$$

$D_1 = \left\{(r,\theta) \;\middle|\; 0 \le r \le \frac{1}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$

$$\overset{\boxed{\text{ПК}}}{=} \iint_{D_1} \left(2\sqrt{1-3r^2} - 4r^2\right) r\,dr\,d\theta \overset{\text{Фубини}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2r\left(\sqrt{1-3r^2} - 2r^2\right) dr\right) d\theta$$

$$\overset{t=r^2}{=} 2\pi \int_0^{1/4} \left(\sqrt{1-3t} - 2t\right) dt = \cdots$$

– сферне координате



$M(\rho, \theta, \varphi)$ $\quad \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, \pi]$

сферне координате тачке M

ρ – растојање тачке M до координатног почетка O.

θ – (као и пре) угао између позитивног дела x-осе и вектора $\overrightarrow{OM'}$, где је M' пројекција тачке M на xy-раван.

φ – угао између позитивног дела z-осе и вектора $\overrightarrow{OM}$.

Једначина $\rho = c$ (где је c позитивна константа) у сферним координатама јесте једначина сфере, па се зато ове координате називају сферним.

Изразимо Декартове координате преко сферних:

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = \rho\cos\varphi.$$

Функција смене F је сад: $F(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$

$$\Rightarrow \boxed{J_F(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta$$

$$= -\rho^2\sin\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \boxed{-\rho^2\underbrace{\sin\varphi}_{\geq 0}} \leq 0 \text{ јер је } \varphi \in [0, \pi]$$

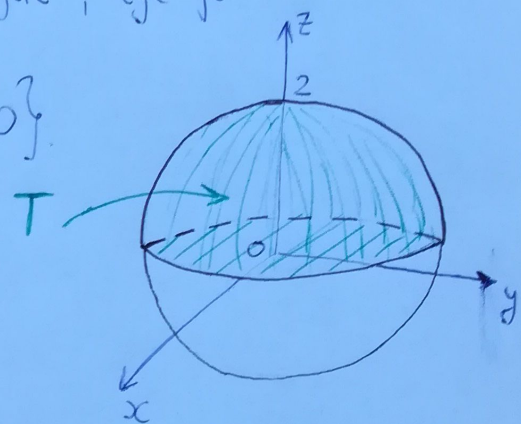
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|J_F(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \sin\varphi}}.$$

Једнакост (3) из теореме о смени променљивих (ако T и T_1 испуњавају услове те теореме) у овом случају изгледа овако:

$$\boxed{\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.} \quad \underline{\underline{(СК)}}$$

<u>Пример:</u> Израчунати $\iiint\limits_T \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$, где је

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z\ge 0\}.$$



$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2, \quad z = \rho\cos\varphi \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta<2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iiint\limits_T \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz \overset{(СК)}{=} \iiint\limits_{T_1} \sqrt{4-\rho^2}\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\overset{\text{Фубини}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 \rho^2\sqrt{4-\rho^2}\cdot\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi}_{=1}\cdot\int_0^2\rho^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho$$

смена: $\rho = 2\sin t$, $d\rho = 2\cos t\,dt$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4\cos^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= 32\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \cdots$$