7. V 2020.

Стоксова формула

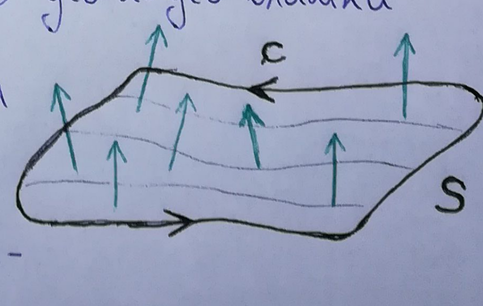
Помоћу симбола $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, о ком је било речи прошли пут, можемо дефинисати још један оператор, ротор, који векторском пољу $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ додељује векторско поље $\nabla \times F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Ако је $F = (P, Q, R)$, онда је

$$\underbrace{\nabla \times F}_{\text{ротор векторског поља } F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \underset{\text{„векторски производ"}}{\times} (P, Q, R) := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right).$$

Поред ознаке $\nabla \times F$ за ротор векторског поља F користи се и ознака $\operatorname{rot} F$.

За Стоксову формулу нам треба још један појам, који уводимо онако мало слободније, неформално. Нека је S део-по-део глатка површ чија је „граница" део-по-део глатка (затворена) крива c. Кажемо да су S и c **сагласно оријентисане** ако за њихове оријентације важи „правило десне руке": ако прсти десне шаке показују смер кретања кривом c, онда палац показује смер век-



тора нормале на површ S.

Теорема: (Стоксова формула) Нека су део-по-део глатка површ S и њена граница — део-по-део глатка крива c — сагласно оријентисане. Ако је F непрекидно-диференцијабилно векторско поље на S, онда је

$$\boxed{\oint_c F\cdot dr = \iint_S (\nabla\times F)\cdot \overrightarrow{dS}.}$$

Δ: Ово ће заправо бити скица доказа, јер нећемо образлагати неке ствари које делују очекивано и очигледно, а чији су формални докази технички врло захтевни и компликовани.

Нека је $F=(P,Q,R)$.

$$\Rightarrow \quad F=(P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R),$$

$$\nabla\times F=(R'_y-Q'_z,\,P'_z-R'_x,\,Q'_x-P'_y)=(0,P'_z,-P'_y)+(-Q'_z,0,Q'_x)+(R'_y,-R'_x,0)$$

Због линеарности оба интеграла (и криволинијског и површинског друге врсте) довољно је да докажемо наредне три једнакости, а тражена формула се добија кад се оне саберу:

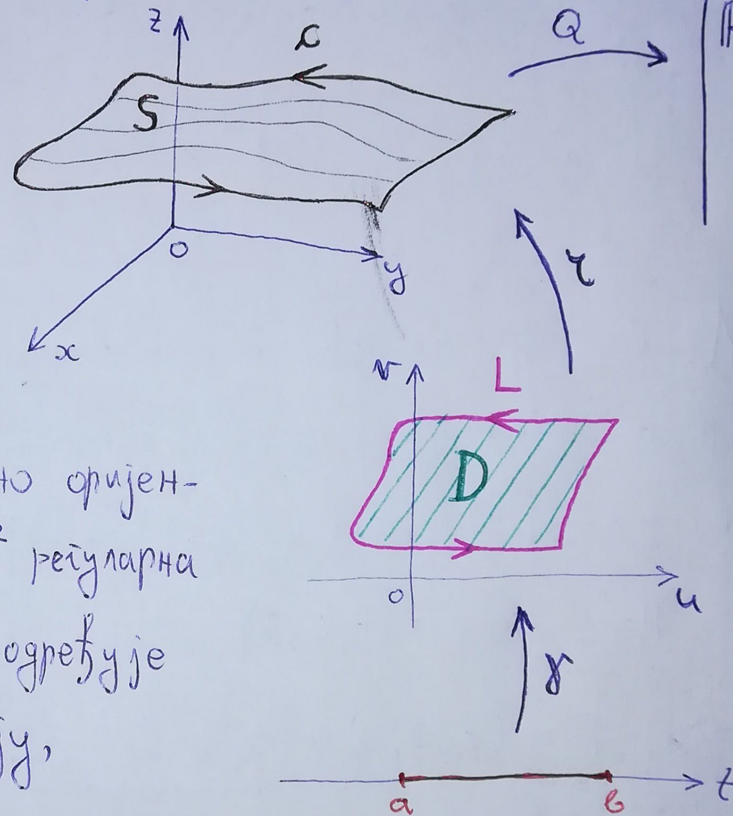
$$\oint_c (P,0,0)\cdot dr=\iint_S (0,P'_z,-P'_y)\cdot\overrightarrow{dS},\quad \oint_c (0,Q,0)\cdot dr=\iint_S(-Q'_z,0,Q'_x)\cdot\overrightarrow{dS},$$

$$\oint_c (0,0,R)\cdot dr=\iint_S (R'_y,-R'_x,0)\cdot\overrightarrow{dS}.$$

Докази (тј. скице доказа) ове три једнакости међусобно су потпуно аналогни. Ми ћемо доказати, на пример, другу, а добра је вежба за студента да, након што прочита овај доказ, докаже прву или трећу.

Нека је $r:\overline{D}\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација површи S која одређује њену оријентацију,

$r(u,v)=(x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v))$.



Нека је $L=\partial D$ део-по-део глатка крива која ограничава област D и која је позитивно оријентисана. Нека је $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ регуларна параметризација криве L која одређује њену (позитивну) оријентацију,

$$\gamma(t)=(u(t),v(t)).$$

Тада је композиција $r\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ регуларна параметризација криве c, а може се показати да одређује њену задату оријентацију. При том за све $t\in[a,b]$ важи

$$(r\circ\gamma)(t)=r(\gamma(t))=r(u(t),v(t))=\big(x(u(t),v(t)),\,y(u(t),v(t)),\,z(u(t),v(t))\big),$$

па је, по правилу ланца,

$$(r\circ\gamma)'(t)=\Big(x'_u(\overbrace{u(t),v(t)}^{=\gamma(t)})\cdot u'(t)+x'_v(\gamma(t))\cdot v'(t),\; y'_u(\gamma(t))\,u'(t)+y'_v(\gamma(t))\cdot v'(t),\; z'_u(\gamma(t))\,u'(t)+z'_v(\gamma(t))\cdot v'(t)\Big).$$

(*)

$$\oint_C (0,Q,0)\cdot d\mathbf{r} \overset{(*)}{=} \int_a^b Q(\mathbf{r}(\gamma(t)))\cdot\left(y'_u(\gamma(t))\cdot u'(t) + y'_v(\gamma(t))\cdot v'(t)\right)dt$$

став са стр. $\boxed{12}$ предавања од 16. IV

$\gamma'(t) = (u'(t), v'(t))$

$$= \oint_L \left(Q(\mathbf{r}(u,v))\cdot y'_u(u,v),\, Q(\mathbf{r}(u,v))\cdot y'_v(u,v)\right)\cdot d\mathbf{r}$$

друга ознака за крив. интег. II врсте

$$= \oint_L Q\cdot y'_u\, du + Q\cdot y'_v\, dv$$

У наставку, за Q, Q'_x, Q'_y и Q'_z подразумевамо аргумент $\mathbf{r}(u,v)$ (нпр. $Q'_z = Q'_z(\mathbf{r}(u,v))$), док за x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, y''_{uv}, z'_u и z'_v подразумевамо аргумент (u,v).

Гринова формула

$$= \iint_D \left((Q\cdot y'_v)'_u - (Q\cdot y'_u)'_v\right)du\,dv$$

правило ланца

$$= \iint_D \Big(\big(Q'_x\cdot x'_u + \cancel{Q'_y\, y'_u} + Q'_z\cdot z'_u\big)\cdot y'_v + \cancel{Q\cdot y''_{uv}} -$$

$$- \big(Q'_x\cdot x'_v + \cancel{Q'_y\, y'_v} + Q'_z\cdot z'_v\big)\cdot y'_u - \cancel{Q\cdot y''_{uv}}\Big)du\,dv$$

$$= \iint_D \left((x'_u\, y'_v - x'_v\cdot y'_u)\cdot Q'_x + (y'_v\cdot z'_u - y'_u\cdot z'_v)\cdot Q'_z\right)du\,dv$$

$$\iint_S (-Q'_z, 0, Q'_x)\cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-Q'_z(\mathbf{r}(u,v)), 0, Q'_x(\mathbf{r}(u,v))\right)\cdot \underbrace{(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}_{=(x'_u,\,y'_u,\,z'_u)\times(x'_v,\,y'_v,\,z'_v)}\, du\,dv$$

став са стр. $\boxed{9}$ прошлог предавања

$$= \iint_D (-Q'_z, 0, Q'_x)\cdot\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u,\; x'_v z'_u - x'_u z'_v,\; x'_u y'_v - x'_v y'_u\right)du\,dv$$

$$= \iint_D \left((y'_v z'_u - y'_u z'_v)\cdot Q'_z + (x'_u y'_v - x'_v y'_u)\cdot Q'_x\right)du\,dv$$

✓

Пример: Урадимо задатак (пример) са стр. $\boxed{15}$ предавања од 16. IV помоћу Стоксове формуле.

$$c: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 2x-2y+z-2=0 \end{cases}, \quad F(x,y,z) = (-x+y+z,\, x-y+z,\, x+y-z)$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times F = (1-1, 1-1, 1-1) = (0,0,0) = \mathbf{0}$$

Нека је S било која (део-по-део глатка) површ чија је граница крива c и нека је S оријентисана сагласно са c (нпр. за S можемо да узмемо део равни $2x-2y+z-2=0$ ограничен кривом c – то буде унутрашњост елипсе у тој равни – и то његову горњу страну).

Стоксова формула

$$\Longrightarrow \oint_c F\cdot dr = \iint_S \underbrace{(\nabla\times F)}_{=\mathbf{0}} \cdot \vec{dS} = 0.$$

Напомена 1: Кад примењујемо Стоксову формулу за израчунавање интеграла $\oint_c F\cdot dr$, као што смо нагласили у овом примеру, можемо да бирамо површ $S\subset\mathbb{R}^3$ чија је граница c (таквих површи има више), само треба да пазимо да векторско поље F буде дефинисано (и непрекидно-диференцијабилно) на целом S. У овом примеру било је сасвим свеједно коју површ одаберемо (јер је $\nabla\times F = \mathbf{0}$), али генерално (кад је $\nabla\times F\neq\mathbf{0}$), тај избор је есенцијалан. Наравно, бирамо што једноставнију површ како бисмо

у том примеру

умели да интегралимо векторско поље $\nabla \times F$ по њој. Приметимо да код Гринове и формуле Гауса и Остроградског није било таквог избора — област $D \subset \mathbb{R}^2$ из прве, односно $T \subset \mathbb{R}^3$ из друге формуле, увек је јединствена.

<u>Напомена 2</u>: Гринова формула је специјалан случај Стоксове. Наиме, ако је површ S (из Стоксове формуле) садржана у xOy равни и ако се посматра њена горња страна, онда је јединични вектор нормале $\vec{n}(x,y,z)=(0,0,1)$ за све $(x,y,z)\in S$, па се десна страна Стоксове формуле своди на двоструки интеграл функције $Q'_x - P'_y$.

Заправо, све три ове формуле (Грин, Гаус-Остроградски, Стокс), грубо речено, јесу овог облика:

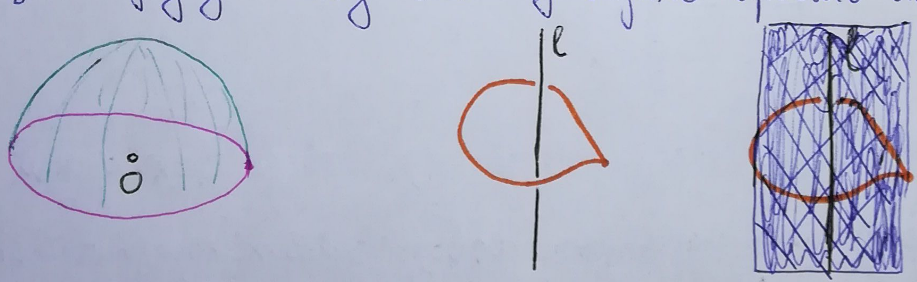
$$\int_{\partial S} F = \int_{S} \underline{\qquad},$$

при чему овде стоји неки вид извода векторског поља F (ту фигуришу парцијални изводи његових координатних ф-ја). Штавише, постоји формула која обухвата све три ове формуле (чак и Њутн-Лајбницову), али она се формулише у терминима који превазилазе програм овог предмета (многострукости, диференцијалне форме, ...).

Као последицу Гринове формуле извели смо четврти услов еквивалентан са она три из теореме о независности криволинијског интеграла од путање (стр. $\boxed{2}$ предавања од 23. IV) за векторска поља дефинисана на области у $\mathbb{R}^2$. Сад ћемо урадити аналогну ствар у $\mathbb{R}^3$, и то помоћу Стоксове формуле. Тамо је кључни услов био да је област у $\mathbb{R}^2$ о којој је реч просто повезана, па најпре дефинишемо тај појам за области у $\mathbb{R}^3$.

Дефиниција: За област $D \subseteq \mathbb{R}^3$ кажемо да је просто повезана ако за сваку просту затворену део-по-део глатку криву $C \subset D$ постоји део-по-део глатка површ $S \subset D$ чија је граница крива C.

На пример, цео простор $\mathbb{R}^3$ јесте просто повезана област. И кад избацимо једну тачку опет добијамо просто повезану област $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.



Али ако избацимо једну праву ℓ из $\mathbb{R}^3$, онда добијамо област $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$, која није просто повезана — крива која „обиђе" праву ℓ није граница ниједне површи садржане у $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ (свака таква површ мора пресећи праву ℓ).

Последица: Нека је F непрекидно-диференцијабилно векторско поље на просто повезаној области $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Тада важи еквиваленција:

$$\boxed{F \text{ је градијентно на } D \iff \nabla \times F = 0 \text{ на } D.}$$

Δ: $\boxed{\Longrightarrow)}$ Нека је $F = (P, Q, R)$ и нека је $f : D \to \mathbb{R}$ т. д. је $\nabla f = F$.

$$\Rightarrow \ (f'_x, f'_y, f'_z) = \nabla f = F = (P, Q, R) \text{ на } D$$

$$\Longrightarrow \ Q'_z = f''_{yz} = f''_{zy} = R'_y \quad \Rightarrow \quad R'_y - Q'_z = 0 \text{ на } D.$$

$f''_{yz} = Q'_z$ и $f''_{zy} = R'_y$ јесу непрекидне ф-је, јер је F непрекидно-диференц.

Слично, $P'_z - R'_x = Q'_x - P'_y = 0$ на D. $\Longrightarrow$ $\nabla \times F = 0$ на D. ✓

$\boxed{\Longleftarrow)}$ Као у доказу последице Гринове формуле на стр. $\boxed{12}$ предавања од 23. IV, на основу теореме са стр. $\boxed{2}$ истог предавања, довољно је доказати услов (2) из те теореме.

c – затворена, оријентисана, део-по-део глатка крива у области D (као и тамо, претпостављамо додатно да је проста затворена – да нема самопресека)

D просто повезана $\Longrightarrow$ постоји површ $S \subset D$ чија је граница c (оријентишимо S сагласно са c)

$$\Rightarrow \oint_c F \cdot dr \overset{\text{Стоксова формула}}{=} \iint_S \underbrace{(\nabla \times F)}_{=0} \cdot \vec{dS} = 0. \ ✓$$

$\nabla \times F = 0$ на D, па и на S

IV Диференцијалне једначине

Диференцијалне једначине првог реда – основни појмови и примери

Најпростије речено, диференцијална једначина је једначина у којој је непозната функција и у којој фигуришу изводи те непознате функције.

Диференцијална једначина првог реда јесте једначина сл. облика:

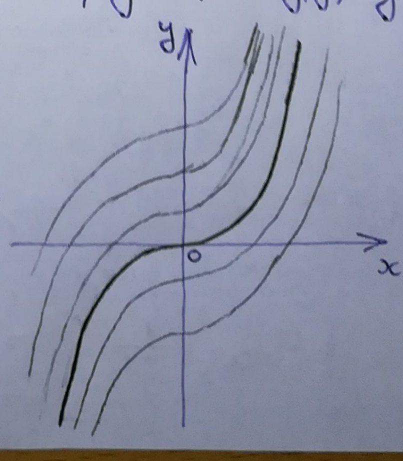
$$\boxed{G(x, y, y') = 0}, \quad (1)$$

где је $y = y(x)$ непозната функција (зависно променљива), а x независно променљива.

Диференцијабилна функција φ је решење једначине (1) ако је $G(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ за све x из неког интервала. Дакле, као што је и уобичајено, нешто је решење дате једначине ако, кад се „уврсти" у једначину, даје тачну једнакост.

Пример: $\boxed{y' = 3x^2}$ – диференцијална једначина I реда $(G(x,y,y') = y' - 3x^2)$

Функција $y = x^3$ је решење ове једначине, али и фја $y = x^3 - 2$ је решење ове једначине. И уопште, свака фја облика $y = x^3 + C$, где је $C \in \mathbb{R}$, јесте једно решење ове једначине.



Наредна теорема говори о постојању и јединствености решења диференцијалне једначине првог реда, али оне која се може записати у облику:

$$\boxed{y' = F(x,y).} \quad (2)$$

(Није свака једначина овог облика – не може се увек из једн. $G(x,y,y')=0$ изразити y'.) Теорему наводимо без доказа.

Теорема: (о постојању и јединствености решења)

Нека је дата једначина (2). Ако су функције две променљиве F и F'_y дефинисане и непрекидне на области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, онда за сваку тачку $(x_0, y_0) \in D$ постоји јединствено решење φ једначине (2) такво да је $\varphi(x_0) = y_0$ (тада се каже да φ задовољава почетни услов $y(x_0) = y_0$).

Пример: Једначина $y' = 3x^2$ има, дакле, бесконачно много решења: $y = x^3 + c$ (за било које $c \in \mathbb{R}$), али само једно које задовољава почетни услов нпр. $y(-5) = -25$ (то је функција $y = x^3 + 100$).

Овде је $F(x,y) = 3x^2$, $F'_y(x,y) = 0$, а то су непрекидне функције на области $D = \mathbb{R}^2$. Из теореме следи да је $y = x^3 + 100$ јединно решење једначине $y' = 3x^2$ које задовољава почетни услов $y(-5) = -25$.

Тако се може показати и да је свако решење φ ове једначине облика $\varphi(x) = x^3 + c$.

С тим у вези, решити диференцијалну једначину значи одредити сва њена решења.

На основу теореме (о постојању и јединствености решења) обично су сва решења дата у облику

$$y = \varphi_c(x) \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Овакав запис, који обухвата сва решења диференцијалне једначине, обично се назива општим решењем те једначине (на пример, $y = x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$, jесте опште решење диф. једн. $y' = 3x^2$). У том смислу, решити диференцијалну једначину значи наћи њено опште решење.

У наставку наводимо неке основне типове диференцијалних једначина и презентујемо начине за њихово решавање.

– једначине с раздвојеним променљивим

То су једначине облика $\boxed{y' = \underbrace{f(x)}_{\text{не зависи од } y} \cdot \underbrace{g(y)}_{\text{не зависи од } x}}$.

Она се може решити на следећи начин (под условом да знамо да израчунамо интеграле који се ту појаве). Најпре y' запишемо као $\dfrac{dy}{dx}$, као количник диференцијала зависно променљиве и диференцијала независно променљиве.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \quad / \cdot \frac{dx}{g(y)}$$

Раздвојене су променљиве: на левој страни немамо x, а на десној немамо y.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

$G(y)$ – примитивна функција функције $\frac{1}{g(y)}$

$F(x)$ – примитивна фја фје $f(x)$

$$\boxed{G(y) = F(x) + C\,, \quad C\in\mathbb{R}}$$

опште решење

Остаје још, ако је могуће, да се y изрази преко x. Али чак и ако то није могуће, последња једнакост се сматра општим решењем полазне једначине (ту је функција $y=y(x)$ имплицитно задата овим решењем). Битно је само да смо се ослободили извода. Треба још напоменути да се приликом дељења једначине са $g(y)$ може десити да „нестане" једно решење, па га на крају треба додати (имаћемо такву ситуацију у наредном примеру).

Пример: Наћи оно решење диференцијалне једначине $y' = y$ које задовољава почетни услов $y(1) = 3e$.

Ово је једначина с раздвојеним променљивим ($f(x)=1$, $g(y)=y$). Наћи ћемо најпре њено опште решење.

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \Big/ \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = dx \quad \Big/ \int$$

$$\ln|y| = x + c_1 \quad , \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Изражавамо y преко x (овде то може):

$$|y| = e^{x+c_1} = \overset{>0}{e^{c_1}} \cdot e^{x}$$

$\Rightarrow \quad y = c \cdot e^{x}$, где је константа $c = e^{c_1} > 0$ за $y>0$, док је $c = -e^{c_1} < 0$ за $y<0$

Али, и ф-ја $y=0$ јесте једно решење једначине $y'=y$ (које је „нестало" због дељења са y), тако да допуштамо и да је $c=0$, па коначно добијамо опште решење:

$$y = c\,e^{x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Нађимо сад решење које задовољава почетни услов $y(1) = 3e$ (на основу теореме знамо да оно постоји и да је јединствено). У опште решење убацимо $x=1$, $y=3e$:

$$3e = c \cdot e \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

$\Rightarrow$ Тражено решење је $y = 3e^{x}$.

- Неке једначине које се (сменом) своде на једначину с раздвојеним променљивим

Навешћемо два таква типа једначина. Први је тзв. хомогена једначина, тј. једначина облика

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (*)$$

Она се сведе на једначину с раздвојеним променљивим тако што се уведе смена непознате функције, тј. зависно променљиве:

$\boxed{z=\frac{y}{x}}$, $z=z(x)$

y – стара зависно променљива

z – нова зависно променљива

$\Downarrow$

$$y=xz \Rightarrow y'=z+xz'$$

$\Rightarrow$ Једначина (*) постаје $z+xz'=f(z)$, тј.

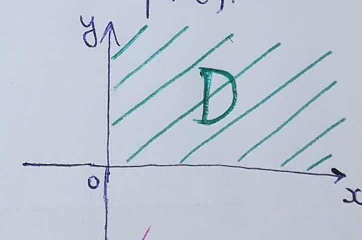
$$z'=\frac{1}{x}\cdot\left(f(z)-z\right),$$

а ово је једначина с раздвојеним променљивим.

Пример: Решити једначину $xy'=y(\ln y-\ln x+1)$.

$$y'=\frac{y}{x}\cdot\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$$ хомогена

Овде је $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ (из теореме).



смена: $\boxed{z=\frac{y}{x}}$, $y=xz$, $y'=z+xz'$

$$\cancel{z}+xz'=z\cdot(\ln z+\cancel{1})$$

$$z'=\frac{1}{x}\cdot z\ln z$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z\ln z}{x}\ \Big/\cdot\frac{dx}{z\ln z}$$

$$\frac{dz}{z\ln z}=\frac{dx}{x}\ \Big/\int$$

$$\underbrace{\int\frac{dz}{z\ln z}}=\int\frac{dx}{x}$$

$t=\ln z$ $\quad \int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\ln z|$

$x>0$

$$\ln|\ln z|=\ln x+c_1 , \quad c_1\in\mathbb{R}$$

$\Downarrow$ слично као у прошлом примеру

$$\ln z=c\cdot e^{\ln x}=c\cdot x , \quad c\in\mathbb{R}$$

$$z=e^{cx} , \quad c\in\mathbb{R}$$

Вратимо смену. $\Downarrow$

$$\boxed{y=xe^{cx}} , \quad c\in\mathbb{R}$$

Други тип који наводимо је једначина облика

$$\boxed{y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)}$$, где су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$.

смена: $\boxed{z = \alpha x + \beta y + \gamma}$, $z = z(x)$ - нова зависно променљива

$$\Rightarrow \quad y = \frac{z - \alpha x - \gamma}{\beta} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' - \alpha}{\beta}$$

$$\frac{z' - \alpha}{\beta} = f(z)$$

$$z' = \beta \cdot f(z) + \alpha$$

једначина с раздвојеним променљивим

$$\vdots$$

$$\frac{dz}{\beta f(z) + \alpha} = dx \quad / \int$$

$$\vdots$$

Линеарна и Бернулијева једначина

– линеарна диференцијална једначина првог реда

То је једначина облика $\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$ (Л)

Не зависе од y

Решићемо једначину најпре у специјалном случају кад је $Q(x) = 0$, а онда ћемо из тог резултата, применом тзв. метода варијације константе, извести формулу за опште решење једначине (Л) за произвољно $Q(x)$.

1° $Q(x)\equiv 0$

једначина с раздвојеним променљивим

$$(Л) \iff y' = -P(x)\cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\,y \quad \Big/ \; \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + c_1 \,, \quad c_1\in\mathbb{R}$$

Знамо да је неодређени интеграл $\int P(x)\,dx$ скуп свих примитивних ф-ја ф-је $P(x)$. Међутим, у овој и у свим наредним једнакостима, $\int P(x)\,dx$ означава неку (било коју) примитивну ф-ју ф-је $P(x)$, а не скуп свих.

слично као у примеру на стр. $\boxed{12}$ и $\boxed{13}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = c\cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,, \quad c\in\mathbb{R}}$$

опште решење једначине (Л) у овом специјалном случају

2° $Q(x)$ произвољно

Користимо метод варијације константе, који се састоји у томе да константу c из општег решења у специјалном случају варирамо, да она више не буде константа него функција од x. Прецизније, опште решење једначине (Л) тражимо у облику:

$$y = c(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,; \quad (*)$$

тј. тражимо све функције $c(x)$ т. д. $y = c(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}$ задовољава једнакост (Л).

$$y' = c'(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx} - c(x)\cdot P(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$

Убацимо у једначину (Л).

$$\Longrightarrow \quad c'(x) = Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + d\,, \quad d\in\mathbb{R}$$

$(**)$

Коначно, (**) убацимо у (*) и добијамо опште решење једначине (Л) (константу означавамо са c уместо са d):

$$\text{(OP)} \quad \boxed{y = e^{-\int P(x)\,dx} \cdot \left(c + \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} \, dx \right), \quad c \in \mathbb{R}}$$

Овим је обухваћен и специјални случај 1°. Напоменимо још једном да у формули (OP) $\int P(x)\,dx$ означава једну (било коју) примитивну фју функције $P(x)$ (не скуп свих), и слично, $\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} dx$ означава једну (било коју) примитивну функцију функције $Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}$.

Пример: Наћи решење једначине $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x$ које задовољава почетни услов $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{32}$.

Линеарна

$P(x) = -\mathrm{ctg}\,x \implies \int P(x)\,dx = -\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} \underset{t=\sin x}{=} -\int \frac{dt}{t} = -\ln(\sin x)$

Занима нас x у околини тачке $\frac{\pi}{4}$, а ту је $\sin x > 0$.

$Q(x) = 2x\sin x$

$\Downarrow$

$$\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} dx = \int 2x \cancel{\sin x}\, \cancel{e^{\ln \frac{1}{\sin x}}} \, dx = x^2$$

$$\overset{(OP)}{\implies} y = e^{\ln(\sin x)} \cdot (c + x^2) = (c + x^2)\sin x.$$

$x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{32}$ $\implies \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{32} = \left(c + \frac{\pi^2}{16}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \implies c = 0$

$\implies$ Тражено решење је $y = x^2 \sin x$.