2. IV 2020.

Прошлог четвртка смо увели двоструки интеграл по правоугаонику. Видели смо да се он уводи на начин аналоган оном за једноструки (Риманов) интеграл по затвореном интервалу. У једнодимензионом случају (на реалној правој $\mathbb{R}$) интервали су мање-више једини скупови згодни за интеграцију. У дводимензионом случају, пак, поред правоугаоника (производа два интервала) има и других „лепих" скупова, по којима би било згодно интегралити функције. То су нпр. други многоуглови, кругови, елипсе, кружни исечци итд. Данас проширујемо дефиницију (од прошли пут) са правоугаоника на, не баш све подскупове од $\mathbb{R}^2$, али на тзв. мерљиве подскупове од $\mathbb{R}^2$ – оне који су „довољно лепи", „довољно правилни".

Двоструки интеграл по произвољном мерљивом скупу

Дефиниција: Скуп $D \subseteq \mathbb{R}^2$ је <u>мерљив</u> ако је ограничен и његова граница има површину нула. Дакле,

$$D \text{ је } \underline{\text{мерљив}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} D \text{ је ограничен и } P(\partial D)=0.$$

<u>Напомена:</u> И прошли пут смо говорили о појму да неки подскуп од $\mathbb{R}^2$ „има површину нула". Нисмо га формално дефинисали, већ

се ослањамо на интуицију. О том појму је реч и у овој дефиницији. Такође, при дефинисању двоструког интеграла, говорили смо и о површини правоугаоника (као производу дужина његових страница). Ускоро ћемо дефинисати појам површине мерљивог скупа, који ће обухватити и ова два појма површине с којима смо досад радили.

Ово слово се чита „хи".

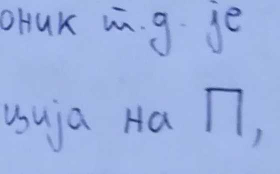
За скуп $D \subseteq \mathbb{R}^2$ уочимо функцију $\chi_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисану са:

$$\boxed{\chi_D(x,y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}}$$

Њу зовемо <u>карактеристичном функцијом скупа D</u>. Није тешко уверити се да χ_D има прекиде тачно у тачкама с границе скупа D, тј.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \chi_D \text{ има прекид у т. } (x,y)\} = \partial D. \qquad (1)$$

Дефиниција: Нека је D мерљив скуп и П правоугаоник т.д. је $D \subseteq П$. Ако је f интеграбилна функција на П, онда дефинишемо <u>двоструки интеграл фје f по скупу D</u>, у ознаци $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ (или краће $\iint\limits_D f\,dx\,dy$) на сл. начин:



$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint\limits_П f(x,y)\cdot \chi_D(x,y)\,dx\,dy.}$$

Зашто је ова дефиниција исправна (коректна)? Прво, сваки мерљив скуп је ограничен, па се може сместити у (довољно велик) правоугаоник (сигурно постоји правоугаоник Π т.д. је $D \subseteq \Pi$). Затим, из формалне дефиниције „скупа површине нула" (коју нисмо дали) може се показати да је унија два скупа површине нула скуп површине нула ($P(A) = P(B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = 0$), као и да је подскуп скупа површине нула скуп површине нула ($A \subseteq B$, $P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$). Ово је, наравно, јасно и из наше интуитивне представе о скуповима који имају површину нула. Е сад, у овој дефиницији, ако је $A^{\subseteq \Pi}$ скуп свих тачака прекида фје f, онда је $P(A) = 0$ (јер је f интеграбилна на Π). Скуп тачака прекида фје $f \cdot \chi_D$ садржан је у скупу $A \cup \partial D$ (в. једнакост (1) на претходној страни), па има површину нула (јер је $P(A) = P(\partial D) = 0$; овде користимо мерљивост скупа D). Зато је фја $f \cdot \chi_D$ интеграбилна на Π, па постоји $\iint\limits_{\Pi} f \chi_D \, dxdy$.

И коначно, може се показати да овако дефинисан $\iint\limits_{D} f \, dxdy$ не зависи од избора правоугаоника Π са својством $\Pi \supseteq D$.

<u>Напомена 1</u>: Претходном дефиницијом уведен је нов појам $\iint\limits_{D} f \, dxdy$, интеграл по мерљивом скупу, и то помоћу раније уведеног (дефинисаног) појма $\iint\limits_{\Pi} f \chi_D \, dxdy$, интеграла по правоугаонику.

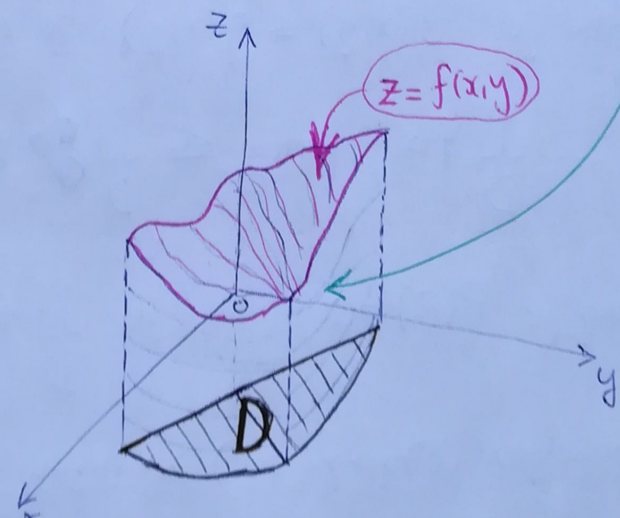
<u>Напомена 2:</u> $(f\cdot\chi_D)(x,y)=f(x,y)\,\chi_D(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$

Дакле, интеграл $\iint\limits_D f\,dx\,dy$ добијамо тако што по правоугаонику $\Pi\supseteq D$ интегралимо ф-ју која се поклапа са f на D, а на $\Pi\setminus D$ узима вредност нула.

Зато ф-ја f не мора баш бити интеграбилна на Π, не мора чак ни бити дефинисана на целом правоугаонику Π. Довољно је да је ограничена на D и да скуп свих њених тачака прекида на D има површину нула. Тада ћемо рећи да је f <u>интеграбилна на D</u>.

Из геометријске интерпретације двоструког интеграла по правоугаонику сад лако добијамо геометријску интерпретацију двоструког интеграла по мерљивом скупу: ако је f интеграбилна на D и $f(x,y)\geqslant 0$ за све $(x,y)\in D$, онда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \text{запремина тела } \underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in D,\ 0\leq z\leq f(x,y)\right\}}$$



Имајући све претходно у виду, сад дефинишемо: за мерљив скуп $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{P(D) := \iint_D dx\,dy}$$

површина скупа D

(Интеграл $\iint_D dx\,dy$ jeсте интеграл константне фје $f \equiv 1$ на D. Она је интеграбилна на D. Зашто?)

Став: Нека је D мерљив скуп, f и g функције интеграбилне на D и $\alpha \in \mathbb{R}$.

(а) Тада су и фје $f+g$ и αf интеграбилне на D и важи:

$$\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy\,;$$

$$\iint_D \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$ [линеарност]

(б) Ако је $f(x,y) \leq g(x,y)$ за све $(x,y) \in D$, онда је

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$ [монотоност]

(в) Ако је $P(D)=0$, онда је $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

[интеграл (било које фје) по скупу површине нула једнак је нули]

Δ: Нека је Π правоугаоник т. д. је $D \subseteq \Pi$. У доказу делова (а) и (б) користимо одговарајуће особине интеграла по правоугаонику.

(а) $$\iint_D (f+g)\,dx\,dy = \iint_\Pi (f+g)\chi_D\,dx\,dy = \iint_\Pi (f\chi_D + g\chi_D)\,dx\,dy$$

линеарност интеграла по правоугаонику

$$= \iint_\Pi f\chi_D\,dx\,dy + \iint_\Pi g\chi_D\,dx\,dy$$

$$= \iint_D f\,dx\,dy + \iint_D g\,dx\,dy.$$

$$\iint_D \alpha f\,dx\,dy = \iint_\Pi \alpha f\chi_D\,dx\,dy = \alpha\iint_\Pi f\chi_D\,dx\,dy = \alpha\iint_D f\,dx\,dy.$$

(б) Приметимо најпре да је $f(x,y)\cdot\chi_D(x,y) \leq g(x,y)\cdot\chi_D(x,y)$ за све $(x,y)\in\Pi$. Наиме, за $(x,y)\in D$ је $\chi_D(x,y)=1$, па се неједнакост своди на $f(x,y)\leq g(x,y)$, што је тачно по претпоставци. За $(x,y)\in\Pi\setminus D$ је $\chi_D(x,y)=0$, па су обе стране неједнакости једнаке нули.

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_\Pi f\chi_D\,dx\,dy \leq \iint_\Pi g\chi_D\,dx\,dy = \iint_D g\,dx\,dy.$$

монотоност интеграла по правоугаонику

(в) f интеграбилна на $D \Rightarrow f$ ограничена на $D \Leftrightarrow (\exists m,M\in\mathbb{R})$ т. д. је $m \leq f(x,y) \leq M$ за све $(x,y)\in D$

$$\xRightarrow{(а),(б)} m\cdot\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{=P(D)=0} \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{=0} \Rightarrow \iint_D f\,dx\,dy = 0.$$

Једноструки (Риманов) интеграл има и својство адитивности:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Овде је сегмент $[a,b]$ унија сегмената $[a,c]$ и $[c,b]$, а пресек ова два сегмента садржи само тачку c, па има дужину нула.

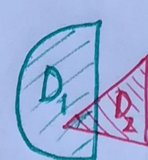
Слично ћемо имати и код двоструког интеграла:

$$\iint_{D_1\cup D_2} f\,dxdy = \iint_{D_1} f\,dxdy + \iint_{D_2} f\,dxdy,$$

али под условом да $D_1\cap D_2$ није превелики, тачније, да је $P(D_1\cap D_2)=0$.

Дакле, (мерљиви) скупови D_1 и D_2 могу да се секу, али не сме бити есенцијалног преклапања.

важи адитивност



не важи адитивност

Прецизније, важи следећи став.

$\boxed{\text{Став:}}$ (адитивност) Нека су D_1 и D_2 мерљиви скупови такви да је $P(D_1\cap D_2)=0$. Ако је функција f интеграбилна на $D_1\cup D_2$, онда је

$$\boxed{\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.}$$

Δ: Приметимо најпре да је $\chi_{D_1\cup D_2} \overset{(*)}{=} \chi_{D_1}+\chi_{D_2}-\chi_{D_1\cap D_2}$. (Зашто?)

Ако је Π (неки) правоугаоник т. д. је $D_1\cup D_2\subseteq \Pi$, онда је

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} f\,dxdy = \iint\limits_{\Pi} f\chi_{D_1\cup D_2}\,dxdy \overset{(*)}{=} \iint\limits_{\Pi}\left(f\chi_{D_1}+f\chi_{D_2}-f\chi_{D_1\cap D_2}\right)dxdy$$

линеарност интеграла по правоугаонику

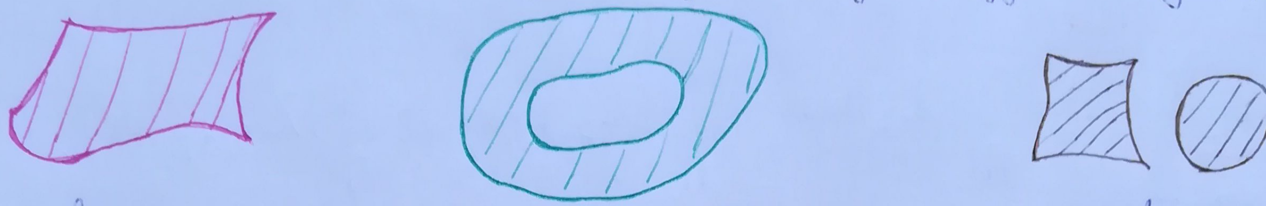
$$= \iint\limits_{\Pi} f\chi_{D_1}\,dxdy + \iint\limits_{\Pi} f\chi_{D_2}\,dxdy - \iint\limits_{\Pi} f\chi_{D_1\cap D_2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} f\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f\,dxdy - \boxed{\iint\limits_{D_1\cap D_2} f\,dxdy} = 0$$

$P(D_1\cap D_2)=0$, претходни став под (в)

Подсетимо се и Теореме о средњој вредности за Риманов интеграл. Она каже да, ако су f и g интеграбилне ф-је на $[a,b]$ и ако је g ненегативна, онда је $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$ за неко $\mu\in\left[\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right]$. Ако је f још и непрекидна, онда уместо μ може да стоји $f(c)$ за неко $c\in[a,b]$.

Код двоструког интеграла имамо практично све исто. Једино се у другом делу теореме захтева да скуп по коме се интеграли (поред тога што је, наравно, мерљив) буде компактан и повезан. Компактност нам треба да би (непрекидна) ф-ја f на њему достизала свој инфимум и супремум (по Вајерштрасовој теореми), а повезаност да би f узимала и све међувредности (да би постојало (x_0,y_0) т.д. је $f(x_0,y_0)=\mu$). Знамо шта значи да је подскуп од $\mathbb{R}^2$ компактан (затворен и ограничен). И повезаност скупова у $\mathbb{R}^n$ може се строго формално дефинисати, али ми то нећемо радити, већ се задржавамо на интуицији. За скупове који нису превише необични (а ми ћемо радити искључиво са таквим) повезаност је у потпуности у складу са интуицијом.



повезан　　　повезан　　　неповезан

Формулишимо сад (без доказа) најављену теорему.

Теорема: (о средњој вредности за двоструки интеграл)

Нека је D мерљив скуп и f и g интеграбилне ф-је на D, при чему је $g(x,y) \geq 0$ за све $(x,y) \in D$. Ако је $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ и $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, онда постоји $\mu \in [m, M]$ такво да је

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\, g(x,y)\, dx dy = \mu \iint\limits_D g(x,y)\, dx dy.}$$

Штавише, ако је D још и компактан и повезан, а f непрекидна на D, онда постоји $(x_0, y_0) \in D$ т.д. је

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\, g(x,y)\, dx dy = f(x_0, y_0) \cdot \iint\limits_D g(x,y)\, dx dy.}$$

Код двоструког интеграла по правоугаонику формулисали смо Фубинијеву теорему, која израчунавање двоструког интеграла по правоугаонику своди на израчунавање два једнострука интеграла. Сад доказујемо варијанту те теореме за интеграл по произвољном мерљивом скупу.

Теорема: (Фубини)

Нека је D мерљив скуп дат у облику:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le \beta(x)\right\}.$$

Ако је f интеграбилна на D, онда је

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.}$$

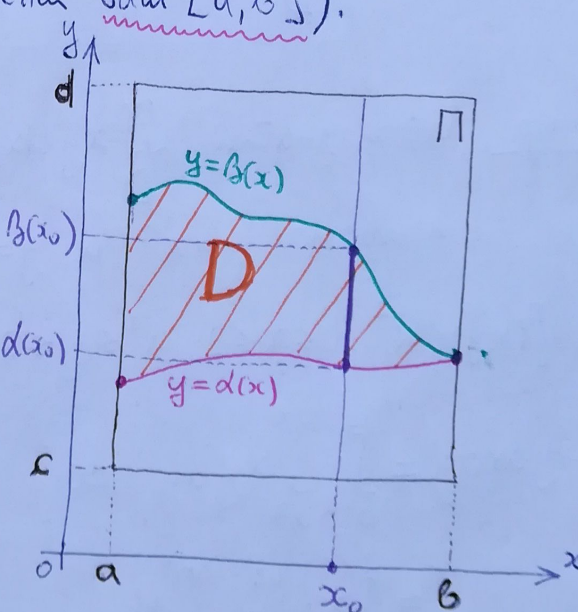
Δ: Одаберимо правоугаоник $\Pi=[a,b]\times[c,d]$ т.д. је $D\subseteq\Pi$ (пошто је цео скуп D између правих $x=a$ и $x=b$, можемо наћи овакав правоугаоник – да је први сегмент баш $[a,b]$).

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_\Pi f(x,y)\,\chi_D(x,y)\,dx\,dy$$

Фубинијева теорема за правоугаоник

$$=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\chi_D(x,y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$



За фиксирано $x_0\in[a,b]$ је $f(x_0,y)\cdot\chi_D(x_0,y)=\begin{cases} f(x_0,y), & y\in[\alpha(x_0),\beta(x_0)]\\ 0, & y\in[c,d]\setminus[\alpha(x_0),\beta(x_0)]\end{cases}$.

Зато је $\displaystyle\int_c^d f(x_0,y)\,\chi_D(x_0,y)\,dy=\int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)\,dy.$

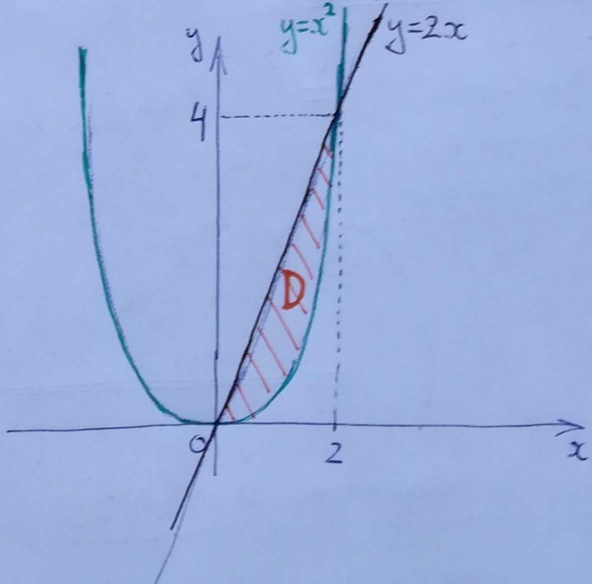
<u>Напомена:</u> Као и у случају Фубинијеве теореме за правоугаоник и ова теорема важи и кад „x и y замене места", тј. кад се промени поредак интеграције. Међутим, то овде није увек могуће – питање је да ли се скуп по коме се интеграли може представити у одговарајућем облику. Конкретно, важи ово тврђење: ако је

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

мерљив скуп и f интеграбилна ф-ја на D, онда је

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.}$$

<u>Пример:</u> Израчунати $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где је D део равни ограничен кривама $y = x^2$ и $y = 2x$.



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$$

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2}\left(4x^2 - x^4\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{32}{3}\right) = 8 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

D можемо представити и у облику: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 4,\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}\}$, па интеграл можемо да рачунамо и овако:

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy\,dx \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^4 y\cdot\left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \cdots = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

Троструки интеграл

Троструки интеграл по квадру, односно произвољном мерљивом скупу у $\mathbb{R}^3$, дефинише се потпуно аналогно двоструком по правоугаонику, односно мерљивом скупу у $\mathbb{R}^2$. Грубо речено, само се свуда реч „површина" замени речју „запремина". Ми овде нећемо све то исписивати. Записаћемо само оквирно како то иде, а студент може детаљније да прође претходне две лекције и „преведе" их на тродимензиони случај (и требало би то да уради – ради бољег схватања и двоструког и троструког интеграла).

$$K = [a,b]\times[c,d]\times[\lambda,\mu] \subset \mathbb{R}^3$$

K – квадар

$P = (P_1, P_2, P_3)$ подела квадра K

$P_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $P_2: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$, $P_3: \lambda = z_0 < z_1 < \cdots < z_l = \mu$.

$$K_{ijk} := [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k], \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,l}.$$

$$\operatorname{diam} K_{ijk} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2};$$

$$V(K_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})\cdot(z_k - z_{k-1}).$$

$V(K_{ijk})$ – запремина квадра K_{ijk}

Параметар поделе $\mathcal{P}$: $\lambda(\mathcal{P}) := \max\limits_{i,j,k} \operatorname{diam} K_{ijk}$

$\mathcal{A} = \{A_{ijk} \mid i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,l}\}$ т.д. $A_{ijk} \in K_{ijk} \Rightarrow (\mathcal{P},\mathcal{A})$ је подела са истакнутим тачкама

f реална фја деф. на K, $\quad \sigma(f,\mathcal{P},\mathcal{A}) := \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{l} f(A_{ijk})\cdot V(K_{ijk})$

интегрална сума фје f која одговара подели са истакнутим тачкама $(\mathcal{P},\mathcal{A})$

$$\underset{\in\mathbb{R}}{I} = \iiint\limits_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \overset{def}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(\mathcal{P},\mathcal{A}))\ \lambda(\mathcal{P})<\delta \Rightarrow |\sigma(f,\mathcal{P},\mathcal{A})-I|<\varepsilon$$

Овако дефинисан троструки интеграл по квадру има својства линеарности, монотоности...

Ако је f ограничена на K и A скуп свих њених тачака прекида у K, онда важи еквиваленција:

$$f \text{ је интеграбилна на } K \iff V(A)=0.$$

. . .

Скуп $T \subseteq \mathbb{R}^3$ је мерљив ако је ограничен и $V(\partial T)=0$.

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \iiint\limits_K f(x,y,z)\cdot\chi_T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$ где је K квадар т.д. $K\supseteq T$, а $\chi_T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ карактеристична фја скупа T.

. . .

T мерљив, $\quad V(T) := \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$

. . .

линеарност, монотоност, адитивност . . .

Задржаћемо се мало на Фубинијевој теореми за троструки интеграл. Формулисаћемо једну њену верзију која израчунавање троструког интеграла своди на израчунавање једног једноструког и једног двоструког интеграла (под условом да се скуп по коме се интеграли може записати у одговарајућем облику).

Теорема: (Фубини) Нека је $T \subset \mathbb{R}^3$ мерљив скуп дат у облику:

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\},$$

при чему је $D \subset \mathbb{R}^2$ такође мерљив (у $\mathbb{R}^2$). Ако је f интеграбилна на T, онда је

$$\boxed{\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.}$$

Напомена: Ако у овом запису скупа T нема неких зачкољица (ако је $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$ за све $(x,y) \in D$), онда је D заправо пројекција тела T на xOy раван. Наравно, теорема важи и ако се посматра пројекција на yOz или xOz раван, под условом да се T може записати у одговарајућем облику.

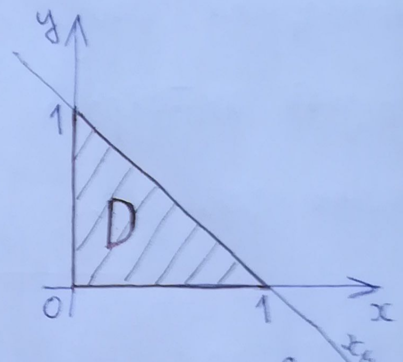
Пример: Одредити запремину тела

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\ x+y \leq 1,\ z \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\}.$$

Тело T можемо записати у облику:

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ 0 \le z \le x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\},$$

где је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \ge 0,\ x+y \le 1\}$.



$$V(T) = \iiint_T dx\,dy\,dz$$

Фубини

$$= \iint_D \left(\int_0^{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} dz \right) dx\,dy$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$

Фубинијева теорема за двоструки интеграл

$$= \iint_D (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})\, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}(1-x) + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right) dx = \cdots = \boxed{\frac{8}{35}}$$