29. IV 2020.

Виши изводи

Дефиниција: Нека је функција f диференцијабилна на некој околини тачке $x_0 \in D_f$ (тада је f' функција дефинисана на тој околини). Други извод фје f у тачки x_0 дефинишемо на сл. начин:

$$\boxed{f''(x_0) := (f')'(x_0),}$$

ако постоји $(f')'(x_0)$.

Пример:

пример од прошли пут

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)'' = \left(\left(\cos\frac{1}{x}\right)'\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)'\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$= -\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Дакле, други извод функције је извод њеног извода. Јасно је онда како се дефинишу трећи, четврти и виши изводи. Сам извод фје зато се назива и првим изводом, а корисно је дефинисати и нулти извод као саму ту функцију. За изводе се користе ознаке:

$f, f', f'', f''', f^{IV}, f^{V}, \dots$; али и: $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, \dots$

Они се, дакле, дефинишу индуктивно:

$$f^{(0)} := f \quad ; \quad f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' \;, \; n \in \mathbb{N} .$$

n-ти извод фје f назива се још и изводом n-тог реда фје f.

Ако функција има n-ти извод на неком скупу, каже се да је она n пута диференцијабилна на том скупу. Ако има n-ти извод за свако $n \in \mathbb{N}$ (на неком скупу), каже се да је бесконачно диференцијабилна (на том скупу).

Тачке екстремума, Фермаова теорема

Дефинишемо најпре појмове глобалног и локалног екстремума.

Дефиниција: Нека је $f : D_f \to \mathbb{R}$ и $a \in D_f \subseteq \mathbb{R}$.

Тачка a је тачка глобалног максимума (односно, минимума) функције f ако је

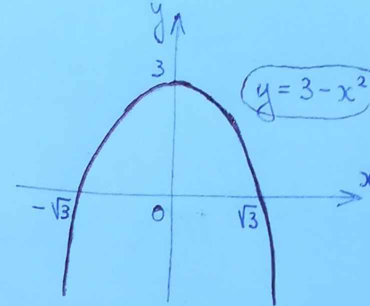
$$(\forall x \in D_f) \quad f(a) \geq f(x) \qquad (\text{односно, } f(a) \leq f(x)).$$

Тачка a је тачка строгог глобалног максимума (односно, минимума) функције f ако је

$$(\forall x \in D_f \setminus \{a\}) \quad f(a) > f(x) \qquad (\text{односно, } f(a) < f(x)).$$

Тада се сам број $f(a)$ назива (строгим) глобалним максимумом (односно, минимумом) функције f.

Примери: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x^2$



$f(0)=3$

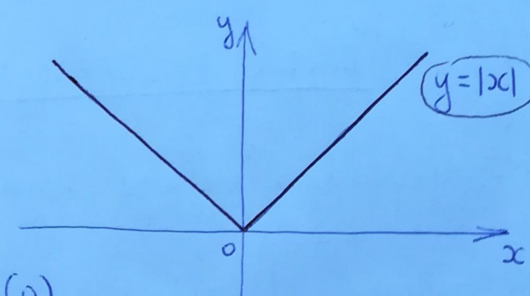
$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\ f(x)=3-\underbrace{x^2}_{>0}<3=f(0)$

$\Rightarrow$ 0 је тачка строгог глобалног максимума фје f,

3 је строги глобални максимум фје f.

Ова функција нема глобални минимум јер није ограничена одоздо.

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=|x|$



$g(0)=0$

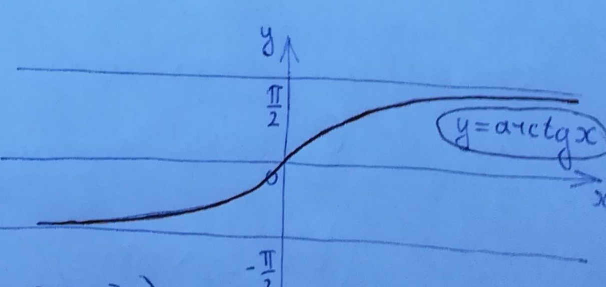
$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\ g(x)=|x|>0=g(0)$

$\Rightarrow$ 0 је тачка строгог глобалног минимума фје g,

0 је строги глобални минимум фје g.

Функција g нема глобални максимум јер није ограничена одозго.

3) Фја arctg нема ни глобални минимум ни глобални максимум, иако јесте ограничена (и одоздо и одозго).



То је зато што не достиже ни свој инфимум ($-\frac{\pi}{2}$) ни свој супремум ($\frac{\pi}{2}$).

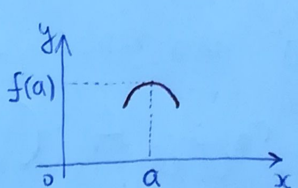
Дефиниција: Нека је $f : D_f \to \mathbb{R}$ и $a \in D_f \subseteq \mathbb{R}$.

Тачка a је <u>тачка локалног максимума</u> (односно, <u>минимума</u>) <u>функције f</u> ако постоји околина $U \in \mathcal{N}(a)$ т. д. је

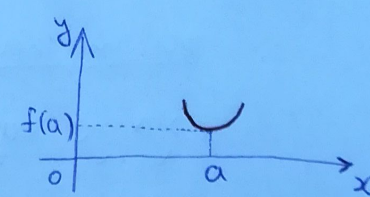
$$(\forall x \in U \cap D_f) \quad f(a) \geq f(x) \quad (\text{односно, } f(a) \leq f(x)).$$

Тачка a је <u>тачка строгог локалног максимума</u> (односно, <u>минимума</u>) <u>функције f</u> ако постоји околина $U \in \mathcal{N}(a)$ т. д. је

$$(\forall x \in U \cap D_f \setminus \{a\}) \quad f(a) > f(x) \quad (\text{односно, } f(a) < f(x)).$$



(строги) локални максимум



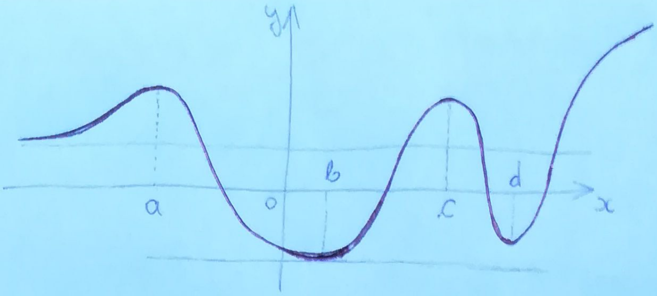
(строги) локални минимум

Тада се сам број $f(a)$ назива (<u>строгим</u>) <u>локалним максимумом</u> (односно, <u>минимумом</u>) <u>функције f</u>.

екстремум := максимум или минимум

Дакле, ако кажемо нпр. да је a тачка локалног екстремума фје f, то значи да је a тачка локалног максимума или тачка локалног минимума фје f.

Пример:



a, c – тачке (строгог) локалног максимума

b – тачка (строгог) и локалног и глобалног минимума

d – тачка (строгог) локалног минимума

Ова функција нема глобални максимум (јер није ограничена одозго).

Јасно је да важи импликација: ако је a тачка глобалног екстремума, онда је a тачка локалног екстремума (наиме, за тражену околину $U \in \mathcal{N}(a)$ можемо да узмемо нпр. цео скуп $\mathbb{R}$). Међутим, као што видимо из последњег примера, обрнуто не важи: тачка локалног екстремума не мора бити тачка глобалног екстремума.

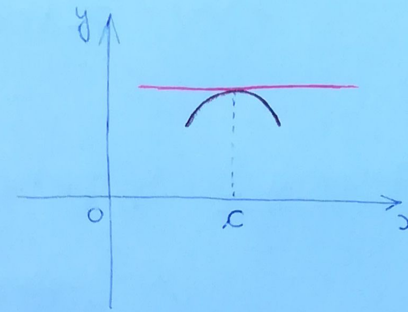
Дефиниција: Нека је $a \in A \subseteq \mathbb{R}$. Кажемо да је a унутрашња тачка скупа A ако постоји њена околина која је садржана у скупу A $((\exists U \in \mathcal{N}(a))\ U \subseteq A)$.

Скуп свих унутрашњих тачака скупа A означавамо са $\mathring{A}$ и називамо га унутрашњост скупа A.

Примери:
1) $A = [1,6] \implies \mathring{A} = (1,6)$
2) $B = (1,6] \implies \mathring{B} = (1,6)$
3) $I = [-3,+\infty) \implies \mathring{I} = (-3,+\infty)$
4) $J = (-\infty, 11) \implies \mathring{J} = (-\infty, 11)$
5) $C = (2,5) \cup [6,9) \cup [20,+\infty) \implies \mathring{C} = (2,5) \cup (6,9) \cup (20,+\infty)$

Теорема: (Ферма) Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини тачке $c \in D_f$ (тј. c је унутрашња тачка домена D_f) и нека је f диференцијабилна у тачки c. Ако f има локални екстремум у тачки c, онда је $f'(c)=0$.

(Другим речима, ако су испуњени услови теореме, онда тангента на график ф-је f у тачки c има водораван положај).



Δ: Ова синтагма „f има локални екстремум у тачки c" наравно значи да је c тачка локалног екстремума ф-је f. Претпоставићемо да је c нпр. тачка локалног максимума (доказ је потпуно аналоган у случају да је c тачка локалног минимума).

$(\exists U \in \mathcal{N}(c))$ $\quad f(c) \geq f(x)$ за све $x \in U$ (c је унутрашња тачка домена D_f, па можемо узети да је $U \subseteq D_f$).

За $x \in U$ и $x > c$ је онда $\dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{>0}} \leq 0$.

$$\Rightarrow \quad f'_+(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

смена: $x = c+h$

Слично, за $x \in U$ и $x < c$ је $\dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{<0}} \geq 0$.

$$\Rightarrow \quad f'_-(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Међутим, f је диференцијабилна у тачки c, па је

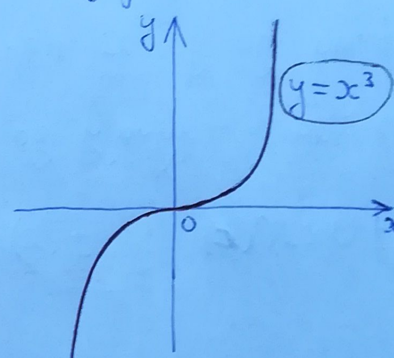
$$f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c).$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(c) = f'_+(c) \le 0, \\ f'(c) = f'_-(c) \ge 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = 0.$$

Напомена 1: Фермаова теорема, дакле, каже: За унутрашњу тачку c домена D_f, у којој је f диференцијабилна, важи импликација: ако је c тачка локалног екстремума ф-је f, онда је $f'(c)=0$. Обрнута импликација не важи!

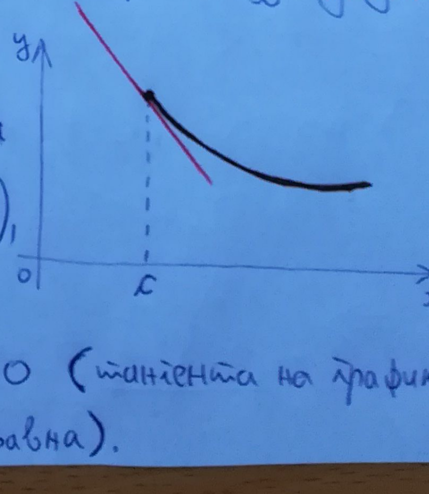
$f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

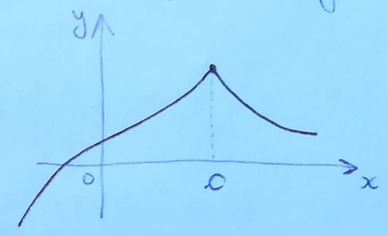


Али 0 није тачка локалног екстремума ф-је f. Наиме, $f(0)=0$, $f(x)<0$ за $x<0$, и $f(x)>0$ за $x>0$, па у свакој околини нуле f узима и позитивне и негативне вредности.

Напомена 2: Веома је важно да тачка c из теореме буде унутрашња тачка домена. (да би важио закључак теореме). Ако је c крајња тачка домена (нпр. ако је $D_f=[c,+\infty)$), и ако f има локални екстремум у т. c, онда не мора бити $f'(c)=0$ (тангента на график у т. $(c, f(c))$ не мора бити водоравна).



Напомена 3: Наравно, f може имати локални екстремум у унутрашњој тачки домена и кад није диференцијабилна у тој тачки (тад наравно не може бити $f'(c)=0$ јер не постоји $f'(c)$). Један такав пример је и функција $y=|x|$ и тачка 0 (в. стр. $\boxed{3}$).

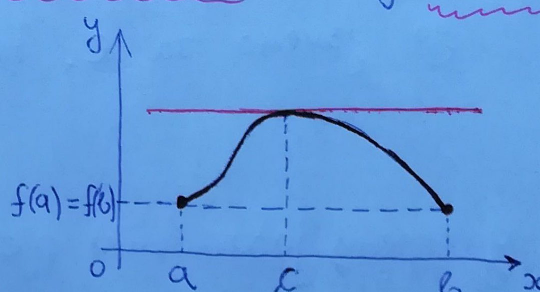


Теореме о средњој вредности диференцијалног рачуна

Сад ћемо формулисати и доказати три теореме – Ролову, Лагранжову и Кошијеву. Оне се зову теоремама о средњој вредности (диференцијалног рачуна), а зашто се тако зову објаснићемо након прве од њих (Ролове).

Теорема: (Рол) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција (на $[a,b]$) која је диференцијабилна на (a,b). Ако је $f(a)=f(b)$, онда постоји $c\in(a,b)$ т. д. је

$$\boxed{f'(c)=0.}$$



(Дакле, под условима теореме, у некој тачки $c\in(a,b)$ тангента на график ће бити водоравна – паралелна са x-осом.)

Δ: На основу Вајерштрасове теореме (в. стр. $\boxed{10}$ предавања од 15. IV) постоје $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ т.д.

$$(\forall x \in [a,b]) \quad f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}).$$

Ово баш значи да је x_{min} тачка глобалног (самим тим, и локалног) минимума ф-је f, а x_{max} тачка глобалног (самим тим, и локалног) максимума ф-је f. Разликујемо два случаја.

1° $f(x_{min}) = f(x_{max})$

$\Rightarrow$ f је константна $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ за све $x \in (a,b)$

(чак и за све $x \in [a,b]$)

Зато у овом случају за c можемо узети било коју тачку из (a,b). ✓

2° $f(x_{min}) < f(x_{max})$

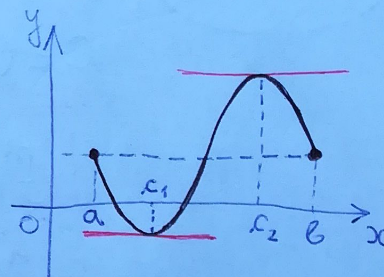
$\Rightarrow$ Бар једна од тачака x_{min} и x_{max} је унутрашња тачка, тј. припада (a,b), јер је $f(a) = f(b)$. Ту тачку можемо да узмемо за c. На основу Фермаове теореме, $f'(c) = 0$. ✓

■

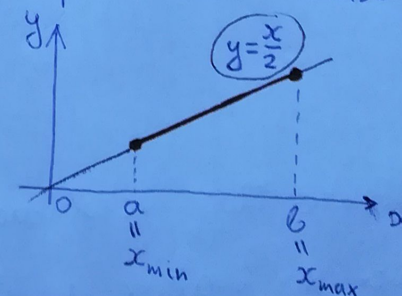
Из диференцијабилности ф-је f на (a,b) следи, наравно, њена непрекидност на том скупу. Али услов теореме јесте да је ф-ја непрекидна на $[a,b]$ (и у крајњим тачкама сегмента). Где смо у доказу користили ову претпоставку?

Напомена 1: Ролова теорема, као и Лагранжова и Кошијева којима ћемо се ускоро бавити, зову се теоремама о средњој вредности јер су њихови закључци облика „постоји c између a и b т. д. је $f'(c)$..." Дакле, c је негде у средини, па зато средња вредност – вредност у средњој тачки. То, наравно, не мора бити аритметичка или нека друга средина бројева a и b – тврђење је да постоји c негде између a и b. Често се ове теореме зову и теореме о међувредности.

Напомена 2: Тачка c из закључка Ролове (као и Лагранжове и Кошијеве) теореме не мора бити јединствена.



Напомена 3: Ако је функција диференцијабилна на неком скупу (на пример, на сегменту $[a,b]$), да ли њен извод мора бити једнак нули у некој тачки? Одговор на ово питање је, наравно, „Не"! Зашто би то било? Рецимо, извод ф-је $y=\frac{x}{2}$ једнак је $\frac{1}{2}$ у свим тачкама.

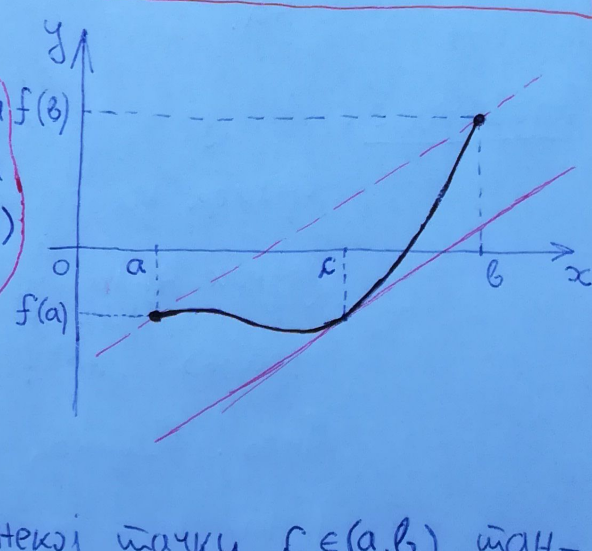


У Роловој теореми, пак, постоји додатна претпоставка $f(a)=f(b)$, која обезбеђује постојање тачке c у којој је извод једнак нули. Она нам је у доказу те теореме, у случају $f(x_{min}) < f(x_{max})$, омогућила да закључимо да бар једна од тачака x_{min} и x_{max} мора бити унутрашња. Без претпоставке $f(a)=f(b)$ могло би да се деси да нпр. буде $x_{min}=a$ и $x_{max}=b$ (као на претходном цртежу), па ни на једну од ове две тачке не бисмо могли да применимо Фермаову теорему.

Врло значајна теорема математичке анализе јесте следећа, Лагранжова теорема о средњој вредности.

Теорема: (Лагранж) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција која је диференцијабилна на (a,b). Тада постоји $c\in(a,b)$ т.д. је

$$\boxed{\underbrace{f'(c)}_{\text{коефицијент правца тангенте на график фје } f \text{ у тачки } c} = \frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{b-a}_{\text{коефицијент правца праве која пролази кроз тачке } (a,f(a)) \text{ и } (b,f(b))}}}, \quad \text{тј.} \quad \boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)}.$$



(Дакле, под условима теореме, у некој тачки $c\in(a,b)$ тангента на график је паралелна правој која пролази кроз тачке $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$.)

Д: Нека је $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ дефинисана са:

$$\boxed{\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x}, \quad x\in[a,b].$$

φ је непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b), као разлика таквих. Поред тога,

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a = \frac{b f(a) - \cancel{a f(a)} - a f(b) + \cancel{a f(a)}}{b-a}$$

$$= \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a},$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b = \frac{\cancel{b f(b)} - a f(b) - \cancel{b f(b)} + b f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}.$$

$$\xRightarrow{\text{Ролова теорема}} \ (\exists\, c\in(a,b))\ \varphi'(c)=0.$$

Али, $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ за све $x\in(a,b)$. $\Longrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

■

Пример: Докажимо да за све $x,y\in\mathbb{R}$ важи неједнакост:

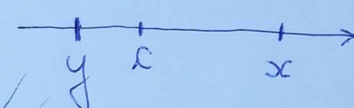
$$\boxed{|\sin x - \sin y| \le |x-y|.}$$

(Приметимо да је ова неједнакост уопштење неједнакости $|\sin x| \le |x|$, $x\in\mathbb{R}$, коју смо доказали на предавању 1.IV, стр. $\boxed{3}$.)

Неједнакост је очигледно тачна за $x = y$, а пошто је симетрична по x и y, можемо без губитка општости претпоставити да је $x > y$.

Применом Лагранжове теореме на (диференцијабилну) фју $\sin$ и на сегмент $[y, x]$ (прецизније, теорему примењујемо на рестрикцију $\sin|_{[y,x]} : [y,x] \to \mathbb{R}$), добијамо да је

$$\sin x - \sin y \underset{\sin' = \cos}{=} \cos c \cdot (x - y) \quad \text{за неко } c \in (y, x).$$



$$\Rightarrow \; |\sin x - \sin y| = \underbrace{|\cos c|}_{\le 1} \cdot |x - y| \le |x - y|.$$

Последица: Нека је функција f непрекидна на неком интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ и диференцијабилна на његовој унутрашњости $\mathring{I}$.

(а) Ако је $f'(x) = 0$ за све $x \in \mathring{I}$, онда је f константна на I.

(б) Ако је $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) за све $x \in \mathring{I}$, онда је f растућа (строго растућа) на I.

(в) Ако је $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) за све $x \in \mathring{I}$, онда је f опадајућа (строго опадајућа) на I.

Δ: Нека су $a, b \in I$ две произвољне тачке, при чему је $a < b$.

Треба да докажемо:
(а) $f(a) = f(b)$
(б) $f(a) \leq f(b)$ $\big(f(a) < f(b)\big)$
(в) $f(a) \geq f(b)$ $\big(f(a) > f(b)\big)$

Занима нас, дакле, знак разлике $f(b) - f(a)$ (ову разлику треба да упоредимо с нулом).

$$a, b \in I \Longrightarrow [a,b] \subseteq I \Longrightarrow f \text{ је непрекидна на } [a,b]$$

I је интервал.

$$(a,b) \subseteq \mathring{I} \Longrightarrow f \text{ је диференцијабилна на } (a,b)$$

$$\xRightarrow{\text{Лагранжова теорема}} \big(\exists c \in (a,b)\big) \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot \underbrace{(b-a)}_{>0}.$$

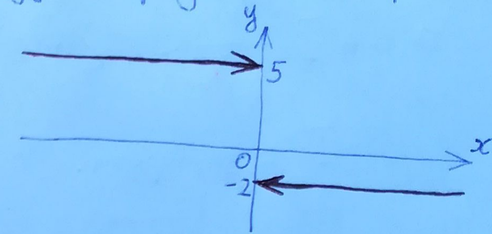
$\Longrightarrow$ Знак разлике $f(b) - f(a)$ је исти као знак извода $f'(c)$.

$\Longrightarrow$
(а) $f(b) - f(a) = 0$. ✓
(б) $f(b) - f(a) \geq 0$ $\big(f(b) - f(a) > 0\big)$. ✓
(в) $f(b) - f(a) \leq 0$ $\big(f(b) - f(a) < 0\big)$. ✓ ∎

Од пре знамо да је извод константне ф-је једнак нули у свим тачкама (в. прошло предавање, стр. $\boxed{3}$). Та чињеница није ни најмање корисна за доказ дела (а) ове последице. Наиме, то што смо прошли пут доказали јесте заправо импликација „ако је функција константна, онда је њен извод једнак нули", а део (а) ове последице јесте обрнута импликација: „ако је извод једнак нули, онда је функција константна". (То што знамо да је нека импликација $p \Longrightarrow q$ тачна, не говори нам ама баш ништа о евентуалној тачности импликације $q \Longrightarrow p$.)

Заправо, тврђење (а) ове последице тачно је под условом да је скуп I на коме се ради интервал (исто важи и за делове (б) и (в)). На скупу који није повезан (који није интервал) та импликација није тачна, као што показује наредни пример.

Пример: $$f(x) := \begin{cases} 5, & x<0 \\ -2, & x>0 \end{cases}$$



$$\Longrightarrow \quad f'(x)=0 \ \text{ за све } x\in D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty), \text{ али}$$

f очигледно није константна на D_f.

Може се доказати да важе и наредне две импликације (под условима претходне последице, тј. f је непрекидна на I и диференцијабилна на $\mathring{I}$):

$$f \text{ растућа на } I \Longrightarrow (\forall x\in \mathring{I})\ f'(x)\geq 0 \ ;$$

$$f \text{ опадајућа на } I \Longrightarrow (\forall x\in \mathring{I})\ f'(x)\leq 0 .$$

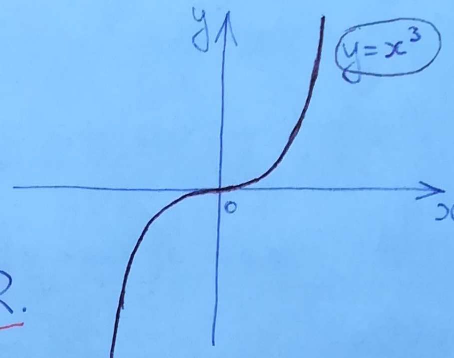
На пример, за прву од њих, покаже се да је, за $x\in\mathring{I}$, $f'_+(x)\geq 0$ (слично као у доказу Фермаове теореме), а $f'(x)=f'_+(x)$.

Међутим, наредне две импликације нису тачне:

f строго растућа на $I \not\Rightarrow (\forall x \in \mathring{I})\ f'(x) > 0$;

f строго опадајућа на $I \not\Rightarrow (\forall x \in \mathring{I})\ f'(x) < 0$.

Пример: $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$



f је строго растућа на $\mathbb{R}$,

али не важи $f'(x) > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$.

Наиме, $f'(x) = 3x^2$, па је $f'(0) = 0$.

Докажимо још и Кошијеву теорему о средњој вредности.

Теорема: (Коши) Нека су $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне функције које су диференцијабилне на (a,b). Ако је $g'(x) \neq 0$ за све $x \in (a,b)$, онда постоји $c \in (a,b)$ т.д. је

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}.$$

Пре доказа, приметимо да је Кошијева теорема уопштење Лагранжове (тј. Лагранжова је специјални случај Кошијеве). Наиме, за $g(x) := x$, $x \in [a,b]$ (тада је $g'(x) = 1$ за све x), лако се види да се Кошијева теорема своди на Лагранжову.

Δ: Приметимо прво да је $g(a)\neq g(b)$ (па $g(b)-g(a)$ може да буде именилац разломка), јер ако би било $g(a)=g(b)$, онда би по Роловој теореми важило $g'(x_0)=0$ за неко $x_0\in(a,b)$, а ово није тачно по претпоставци.

И доказ Кошијеве теореме је уопштење доказа Лагранжове:

$$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}\,,\quad \boxed{\varphi(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x)}\,,\quad x\in[a,b].$$

φ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b), као разлика таквих.

$$\varphi(a)=\dots=\frac{g(b)f(a)-g(a)f(b)}{g(b)-g(a)}=\dots=\varphi(b)$$

$$\xRightarrow{\text{Ролова теорема}}\ (\exists c\in(a,b))\ \ \varphi'(c)=0$$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x) \text{ за све } x\in(a,b) \implies f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

✓ ■