25. III 2020.

Последње што смо урадили на часу био је став да се гранична вредност функције, попут граничне вредности низа, лепо слаже са четири основне алгебарске операције, под условом да су све граничне вредности са којима радимо коначне. Доказ става ослањао се на одговарајуће тврђење за низове, као и на везу између лимеса низа и лимеса функције – Хајнеову теорему. Помоћу те теореме можемо доказати још једну теорему за лимесе функција за коју знамо да важи за низове. Реч је о Теореми о два полицајца и лопову. Подсетимо се њене верзије за низове: ако су (a_n), (b_n) и (c_n) три низа реалних бројева т. д. почев од неког n важи $a_n \le b_n \le c_n$, ако (a_n) и (c_n) имају исту граничну вредност a, онда је и $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

$$\begin{array}{ccc} a_n \le & b_n & \le c_n \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & a & \end{array}$$

Синтагма „почев од неког n" у ствари значи „постоји околина тачке $+\infty$ т. д. за све n из те околине". Зато ће у верзији ове теореме за функције (и не само ове теореме, него и других тврђења) стајати услов „постоји околина U тачке a таква да за све $x \in U \setminus \{a\}$". Из околине U се избацује тачка a јер $\lim_{x\to a} f(x)$ не зависи од вредности ф-је f у т. a; штавише, f не мора ни бити дефинисана у т. a. Ако је $a=+\infty$ (или $a=-\infty$), онда и иначе $a \notin U$, па нема потребе за избацивањем.

Теорема: (о два полицајца и лопову)

Нека су функције f, g и h дефинисане на некој околини тачке $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ако постоји $U \in \mathcal{N}(a)$ т.д. за све $x \in U \setminus \{a\}$ важи

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

и ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, онда је и

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

$$\underset{x\to a}{\underbrace{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}_{b}}$$

Δ: Теорему доказујемо помоћу Хајнеове теореме.

Треба да докажемо да је $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Узмимо зато низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елемената скупа $D_g \setminus \{a\}$ т.д. $x_n \to a$ и докажимо да $g(x_n) \to b$.

Како је U околина т. a, то $x_n \in U$ почев од неког n. Такође је и $x_n \neq a$, па је по претпоставци теореме $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ почев од неког n. Међутим, пошто је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, то низови $f(x_n)$ и $h(x_n)$ теже ка b (на основу Хајнеове теореме), па из Теореме о два полицајца за низове имамо:

$$\underbrace{f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)}_{b}$$

■ знак за крај доказа

Слично као код низова, ако је $b=+\infty$, онда је ф-ја h сувишна, а ако је $b=-\infty$, онда је функција f сувишна.

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[dr, "x\to a"'] & \le & g(x) \arrow[dl, dashed] \\ & +\infty & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} g(x) \arrow[dr, dashed] & \le & h(x) \arrow[dl, "x\to a"] \\ & -\infty & \end{tikzcd}$$

Код низова смо имали и следеће чињенице: Нека су (a_n) и (b_n) конвергентни низови, $a:=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b:=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Важе наредне две импликације:

$$\boxed{a<b \implies a_n<b_n \text{ почев од неког } n;} \quad \text{I}$$

$$\boxed{a_n\le b_n \text{ почев од неког } n \implies a\le b.} \quad \text{II}$$

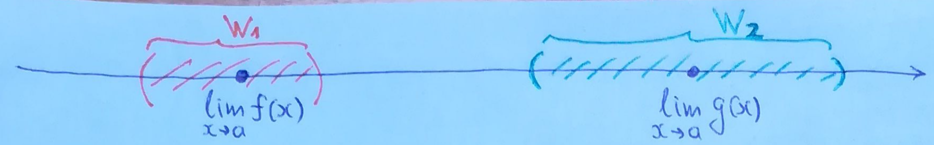
Друга импликација је последица прве, а ни на једном месту не важи обрнута импликација.

И код функција важе одговарајуће импликације: Ако су функције f и g дефинисане на некој околини тачке $a\in\overline{\mathbb{R}}$ и ако постоје $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, онда важе импликације:

$$\text{I} \quad \boxed{\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x) \implies f(x)<g(x) \text{ за све } x\in U\setminus\{a\}, \text{ где је } U \text{ нека околина т. } a}$$

$$\text{II} \quad \boxed{f(x)\le g(x) \text{ за све } x\in U\setminus\{a\}, \text{ где је } U \text{ нека околина т. } a \implies \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).}$$

Оне се доказују на исти начин као код низова. Наиме, кад је у питању импликација I имамо следећу ситуацију:



Можемо наћи две дисјунктне околине W_1 и W_2 тачака $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$. По дефиницији лимеса постоји $U_1 \in \mathcal{N}(a)$ таква да за све $x \in U_1 \setminus \{a\}$ важи $f(x) \in W_1$; и слично, постоји $U_2 \in \mathcal{N}(a)$ таква да за све $x \in U_2 \setminus \{a\}$ важи $g(x) \in W_2$. Онда је тражена околина $U := U_1 \cap U_2$ (пресек две околине је околина).

Опет је импликација (II) последица импликације (I) (зашто?).

Наведимо још (без доказа) тзв. Кошијев критеријум за постојање коначног лимеса, који је уопштење Кошијевог критеријума за низове (низ је функција чији је домен $\mathbb{N}$). Код низова смо имали да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан (постоји коначан $\lim_{n\to\infty} x_n$) акко је Кошијев, тј. акко

$$(\forall \varepsilon > 0)\underbrace{(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})\ m,n \geq n_0 \implies}\ |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\exists U \in \mathcal{N}(+\infty))(\forall m,n \in \mathbb{N} \cap U)\quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Теорема: (Кошијев критеријум)

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D_f'$.

Постоји коначан $\lim_{x\to a} f(x)$ акко

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{N}(a))(\forall x,y \in D_f \cap U \setminus \{a\})\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

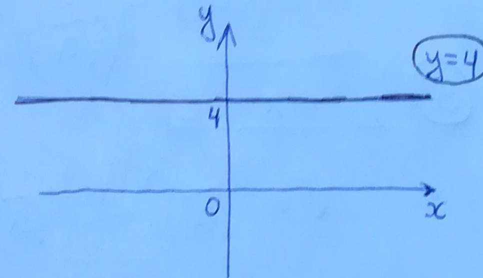
Елементарне функције

У овој лекцији уводимо најпре тзв. основне елементарне функције (константне, експоненцијалне, логаритамске, степене, тригонометријске и инверзне тригонометријске). Добар део овог градива јесте средњошколско градиво, али биће и нових ствари. Ово представља нешто што би студент морао да зна и разуме да би положио Анализу 1. Ако неко нпр. на усменом не зна да нацрта график неке основне елементарне функције, ту се испит завршава.

– константна функција

Знамо шта је то: $c\in\mathbb{R}$ фикс. константа

$f(x)=c$ за све $x\in\mathbb{R}$



На слици десно скициран је график константне функције за $c=4$.

– експоненцијална функција

Нека је најпре $\boxed{a>1}$. Имамо дефинисан степен a^p за $p\in\mathbb{Q}$.

Желимо да проширимо ову дефиницију на a^x за $x\in\mathbb{R}$.

Знамо, дакле, шта је $\sqrt[n]{a}$ за $n\in\mathbb{N}$ и знамо да је $\boxed{\sqrt[n]{a}>1}$,

па је зато $\boxed{0<\frac{1}{\sqrt[n]{a}}<1}$ (2) $\Longrightarrow 0<\dots<\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^3<\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^2<\frac{1}{\sqrt[n]{a}}<1$

$\Downarrow$ (1)

$1<\sqrt[n]{a}<\left(\sqrt[n]{a}\right)^2<\left(\sqrt[n]{a}\right)^3<\cdots$

Докажимо следећу чињеницу: за $p,q\in\mathbb{Q}$

$$\boxed{p<q \implies a^p<a^q} \quad (*)$$

Δ: Можемо представити рационалне бројеве p и q са истим имениоцем: $\boxed{p=\frac{k}{n}}$, $\boxed{q=\frac{l}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$, $k,l\in\mathbb{Z}$, $k<l$

јер је $p<q$

1° $\boxed{k<l<0}$

$\Rightarrow k=-|k|$, $l=-|l|$, $|k|>|l|$

$$a^p=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{|k|}\underset{(2)}{<}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{|l|}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^l=a^q \quad ✓$$

2° $\boxed{k<0\le l}$

$$a^p=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{|k|}\overset{(2)}{<}1\overset{(1)}{\le}\left(\sqrt[n]{a}\right)^l=a^q \quad ✓$$

3° $\boxed{0\le k<l}$

$$a^p=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\overset{(1)}{<}\left(\sqrt[n]{a}\right)^l=a^q. \quad ✓$$

∎

Помоћу чињенице (*) сад можемо да докажемо овај став.

Став: Ако је $r_0\in\mathbb{Q}$, онда је $\boxed{\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to r_0} a^r=a^{r_0}}$.

Δ: Приметимо најпре да можемо да радимо искључиво са рационалним степенима од a, јер реалан степен још нисмо дефинисали — то је и циљ овога што радимо: да дефинишемо реалан степен од a.

Прво ћемо доказати став у специјалном случају $r_0=0$, а онда ћемо то користити за доказ произвољног случаја ($r_0\in\mathbb{Q}$).

1° $\boxed{r_0=0}$ Треба доказати: $\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to 0} a^r=a^0=1$.

Нека је $\varepsilon>0$. Знамо да низ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ тежи ка 1 $(a^{\frac{1}{n}}\to 1)$, и слично $a^{-\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1$.

$$\Longrightarrow (\exists n_0\in\mathbb{N})\quad 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}\overset{(*)}{<}a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon$$

$\delta:=\frac{1}{n_0}>0$, $\quad(-\delta,\delta)\in\mathcal{N}(0)$

Нека је $r\in\mathbb{Q}\cap(-\delta,\delta)$ $\Longrightarrow$ $-\frac{1}{n_0}<r<\frac{1}{n_0}$

(тј. $r\in\mathbb{Q}$ и $|r|<\delta$)

$$\Longrightarrow 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}\overset{(*)}{<}a^{r}\overset{(*)}{<}a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow |a^{r}-1|<\varepsilon.$$

Дакле, за произвољно $\varepsilon>0$ нашли смо $\delta>0$ тако да за све $r\in\mathbb{Q}$ за које је $|r|<\delta$ важи $|a^{r}-1|<\varepsilon$, а то баш значи да је

$$\boxed{\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to 0}a^{r}=1.}$$

2° $\boxed{r_0\in\mathbb{Q}\text{ произвољно}}$

$\varepsilon>0$ произв., 1° $\Rightarrow(\exists\delta>0)(\forall s\in\mathbb{Q})\ |s|<\delta\Rightarrow|a^{s}-1|<\frac{\varepsilon}{a^{r_0}}$

$$r\in\mathbb{Q},\ |r-r_0|<\delta\Rightarrow|a^{r}-a^{r_0}|=a^{r_0}\,|a^{r-r_0}-1|<a^{r_0}\cdot\frac{\varepsilon}{a^{r_0}}=\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\boxed{\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to r_0}a^{r}=a^{r_0}.}\qquad\blacksquare$$

Нека је сад $x \in \mathbb{R}$. Желимо да дефинишемо a^x.

$$A := \{ a^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r \le x \} \quad , \quad B := \{ a^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r \ge x \}$$

(*) $\Longrightarrow$ Сваки елемент скупа B јесте горње ограничење скупа A, и сваки елемент скупа A јесте доње ограничење скупа B.

Како су ови скупови непразни (зашто?), то је A ограничен одозго, а B ограничен одоздо.

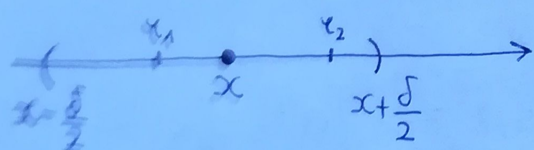
$$s := \sup A \ , \ i := \inf B \Longrightarrow s \le i \ , \text{ тј. } i - s \ge 0$$

Ако докажемо да је $i - s < \varepsilon$ за све $\varepsilon > 0$, доказали смо да је $i - s = 0$, тј. $s = i$.

$\varepsilon > 0$ произв.

$\boxed{\text{Претходни став, случај } 1^\circ} \Longrightarrow (\exists \delta > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\ |r| < \delta \Rightarrow |a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{s}$

(сви елементи скупа A су позитивни бројеви, па је и $s > 0$)



Између свака два броја постоји рационалан број, па постоје $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ т. д. је
$$x - \frac{\delta}{2} < r_1 < x < r_2 < x + \frac{\delta}{2} .$$
$|r_2 - r_1| < \delta$

$$\Longrightarrow i - s \le \underset{\in B}{a^{r_2}} - \underset{\in A}{a^{r_1}} = \underset{\in A}{a^{r_1}} (\overbrace{a^{r_2 - r_1} - 1}^{1^\circ}) \le s \cdot (a^{r_2 - r_1} - 1) < \cancel{s} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{s}} = \varepsilon .$$

Коначно дефинишемо: $\boxed{a^x := s = i}$.

Ако је $x\in\mathbb{Q}$, онда одраније дефинисано a^x припада и скупу A и скупу B. Штавише, тада је $s = a^x = i$, па је ова дефиниција заиста проширење претходне.

Сад, дакле, имамо дефинисану функцију $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$. Њу називамо <u>експоненцијалном функцијом са основом a</u>.

Теорема: (основне особине експоненцијалне функције за основу $a>1$)

Нека је $a>1$.

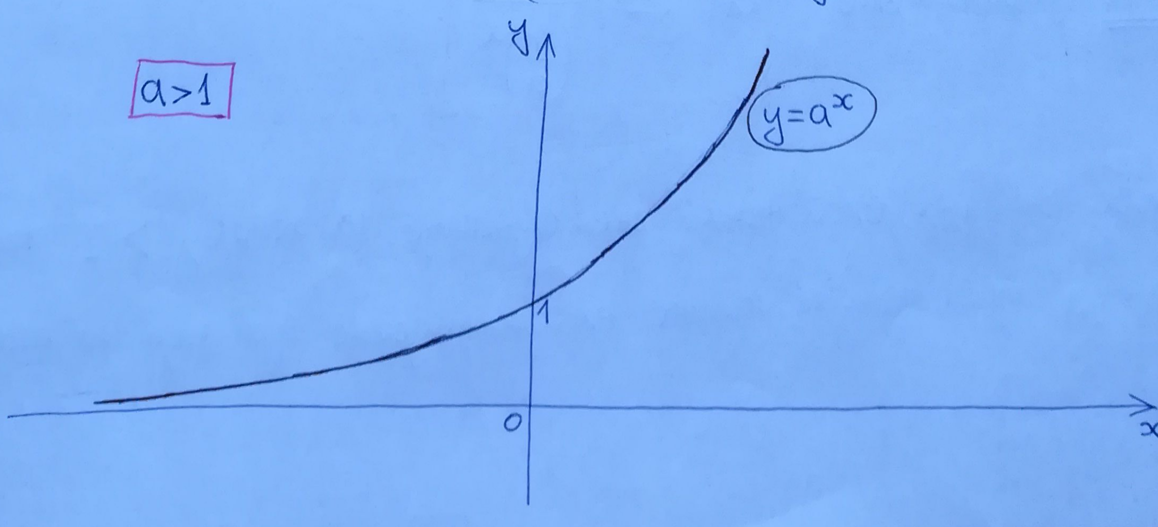
(а) $(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})\quad a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$; $\left(a^{x_1}\right)^{x_2}=a^{x_1x_2}$

(б) $(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})\quad x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$. [монотоност]

(в) $(\forall x_0\in\mathbb{R})\quad \lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. [непрекидност]

(г) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

(д) $(\forall y>0)(\exists x\in\mathbb{R})\quad a^x=y$.



Докажимо део (б) ове теореме: Између свака два броја постоји рационалан број, па постоје $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ т. д. је

$$x_1 < r_1 < r_2 < x_2.$$

$$\Longrightarrow \quad a^{x_1} \leq a^{r_1} \overset{(*)}{<} a^{r_2} \leq a^{x_2}.$$

$\boxed{a^{r_1} \in B \text{ за } x = x_1,}$ $\boxed{a^{x_1} = \inf B}$

$\boxed{a^{r_2} \in A \text{ за } x = x_2,}$ $\boxed{a^{x_2} = \sup A}$

Део (в) се доказује буквално исто као став (са стране $\boxed{6}$), само се уместо (*) користи део (б) ове теореме.

Делове (а), (г) и (д) нећемо доказивати, али је важно да делове (г) и (д) знамо да интерпретирамо графички – да их „видимо" са графика функције.

Нека је сад $\boxed{0 < a < 1}$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} > 1 \quad \Longrightarrow$$ имамо дефинисан степен $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ за произвољно $x \in \mathbb{R}$.

За $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$ дефинишемо $\boxed{a^x := \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}}$.

На основу особина експоненцијалне функције за основу > 1, лако се добијају одговарајуће особине експоненцијалне функције за основу $a \in (0,1)$.

Теорема: (основне особине експоненцијалне функције за основу $a\in(0,1)$)

Нека је $0<a<1$.

(a) $(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})\ a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2};\ \left(a^{x_1}\right)^{x_2}=a^{x_1x_2}$.

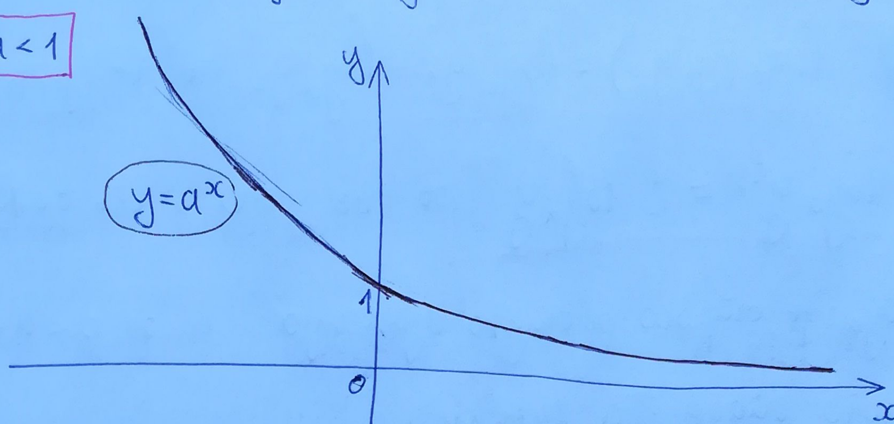
(б) $(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})\ x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$ [монотоност]

(в) $(\forall x_0\in\mathbb{R})\ \lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$ [непрекидност]

(г) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.

(д) $(\forall y>0)(\exists x\in\mathbb{R})\ a^x=y$.

$\boxed{0<a<1}$



– логаритамска функција

$a>0$, $a\neq1$ $\qquad f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x):=a^x$.

На основу делова (д) претходне две теореме, f је „на", а на основу делова (б) те две теореме, f је „1-1". Дакле, f је бијекција.

Инверзну функцију $f^{-1}:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ функцији f називамо логаритамском функцијом са основом a и означавамо је са $\log_a$. Логаритам са основом e називамо природним логаритмом и означавамо са $\ln := \log_e$.

Дакле, за $y>0$ и $x\in\mathbb{R}$ важи:

$$\boxed{x = \log_a y \iff y = a^x.}$$

Из одговарајућих особина експоненцијалне функције лако се изводе наредне особине логаритамске функције:

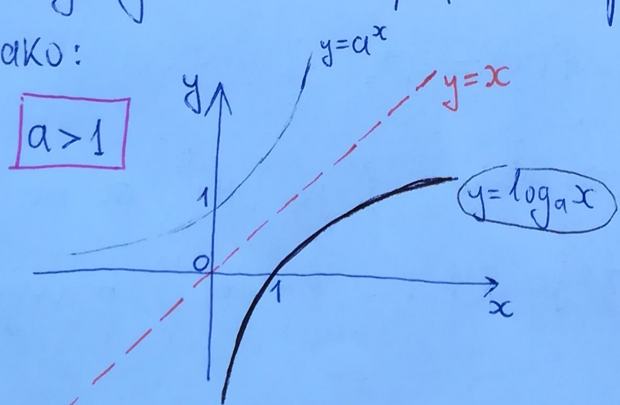
$\boxed{1.}$ $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$.

$\boxed{2.}$ $\log_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ за све $y_1, y_2 > 0$;

$\log_a (y^t) = t \cdot \log_a y$ за све $y>0$ и све $t\in\mathbb{R}$.

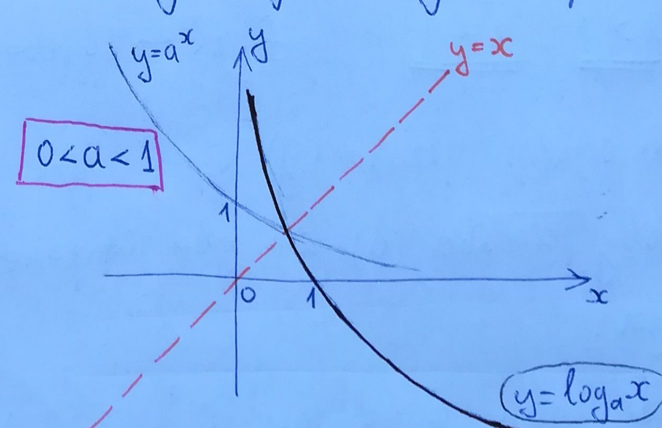
$\boxed{3.}$ За $a>1$ $\log_a$ је строго растућа функција, а за $0<a<1$ $\log_a$ је строго опадајућа функција.

График инверзне функције је симетричан графику функције у односу на праву $y=x$, па график логаритамске функције изгледа отприлике овако:



$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \lim_{x\to 0+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Став: (непрекидност логаритамске функције)

$$(\forall x_0>0)\ \lim_{x\to x_0}\log_a x = \log_a x_0 .$$

Δ: Доказаћемо став за случај $\boxed{a>1}$. Доказ за случај $0<a<1$ је сличан.

$$V\in\mathcal{N}(\log_a x_0) \Longrightarrow (\exists\varepsilon>0)\ (\log_a x_0-\varepsilon,\ \log_a x_0+\varepsilon)\subseteq V$$

$$a^\varepsilon>1 \Longrightarrow \frac{x_0}{a^\varepsilon}<x_0<x_0\cdot a^\varepsilon \text{ , тј. } \left(\frac{x_0}{a^\varepsilon},\ x_0\cdot a^\varepsilon\right)\in\mathcal{N}(x_0)$$

Нека је $x\in\left(\frac{x_0}{a^\varepsilon},\ x_0\cdot a^\varepsilon\right)$, тј. $\frac{x_0}{a^\varepsilon}<x<x_0\cdot a^\varepsilon$.

$\log_a\uparrow$

$$\Longrightarrow \log_a x_0-\underbrace{\log_a a^\varepsilon}_{=\varepsilon} \overset{\boxed{2.}}{=} \log_a\frac{x_0}{a^\varepsilon} < \log_a x < \log_a(x_0\cdot a^\varepsilon) \overset{\boxed{2.}}{=}$$

$$= \log_a x_0+\underbrace{\log_a a^\varepsilon}_{=\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \log_a x\in V. \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Наравно, ми још увек помало неформално говоримо о непрекидности, али ускоро ћемо видети да је непрекидност (онаква какву ћемо је дефинисати) баш ово.

– степена функција

Код експоненцијалне функције фиксирали смо основу, а степен посматрали као функцију изложиоца. Код степене функције изложилац ће бити фиксиран, а основа ће се мењати:

$$\alpha \text{ фиксирано}, \qquad x \longmapsto x^\alpha.$$

При увођењу експоненцијалне функције дефинисали смо степен x^α за све $\alpha \in \mathbb{R}$ и све $x > 0$, $x \neq 1$. Сад дефинишемо и $1^\alpha := 1$ за све $\alpha \in \mathbb{R}$, па за фиксирано $\alpha \in \mathbb{R}$ имамо степену функцију $f(x) = x^\alpha$ која је сигурно дефинисана за $x > 0$ ($(0, +\infty) \subseteq D_f$). Кад можемо дефинисати x^α и за $x \leq 0$?

За $\alpha > 0$ дефинишемо $0^\alpha := 0$, али не дефинишемо 0^α за $\alpha < 0$ (нпр. $0^{-1} = \frac{1}{0}$???).

За све $x \in \mathbb{R}$ (па и за $x \leq 0$) имамо дефинисан природан степен:

$$n \in \mathbb{N}, \qquad x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}.$$

Такође, за све $x \in \mathbb{R}$ смо дефинисали и $x^0 := 1$.

За $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имамо дефинисан и цео степен: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Знамо и шта је $\sqrt[n]{x}$ за $x \geq 0$, а ако је n непаран, онда дефинишемо и $\sqrt[n]{x}$ за $x < 0$:

$$\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{|x|}.$$

Тада је заиста и за $x<0$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(-\sqrt[n]{|x|}\right)^n = (-1)^n\cdot|x| \overset{n \text{ непаран}}{=\!=} -|x| = x.$$

Зато, ако је $\alpha = \frac{k}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ непаран, НЗД$(k,n)=1$, дефинишемо

$$\boxed{x^{\alpha} := \left(\sqrt[n]{x}\right)^k}$$

за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (ако је $\alpha\geq 0$, тј. $k\geq 0$, онда $x\in\mathbb{R}$)

Дакле, да резимирамо: за свако (фиксирано) $\alpha\in\mathbb{R}$ имамо степену функцију $f(x)=x^{\alpha}$.

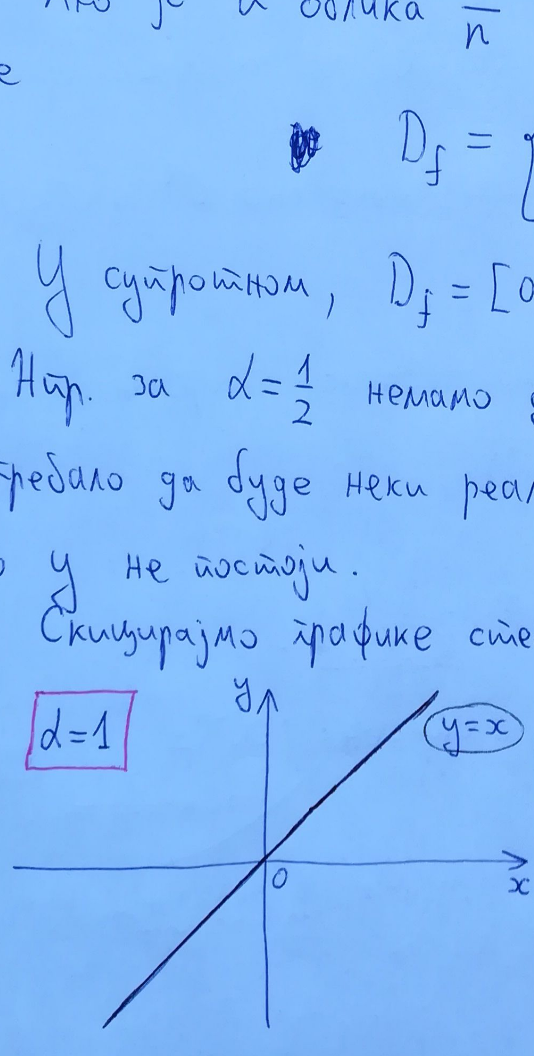
Ако је α облика $\frac{k}{n}$ за неко $k\in\mathbb{Z}$ и неко непарно $n\in\mathbb{N}$, онда је

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & k\geq 0 \\ \mathbb{R}\setminus\{0\}, & k<0 \end{cases}.$$

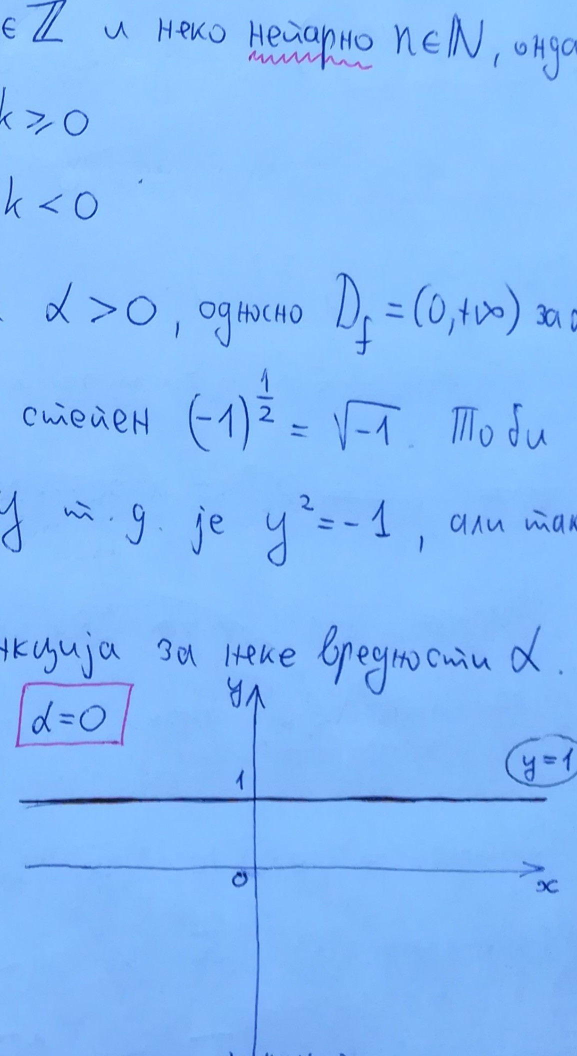
У супротном, $D_f=[0,+\infty)$ за $\alpha>0$, односно $D_f=(0,+\infty)$ за $\alpha<0$.

Нпр. за $\alpha=\frac{1}{2}$ немамо дефинисан степен $(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$. То би требало да буде неки реалан број y т.д. је $y^2=-1$, али такво y не постоји.

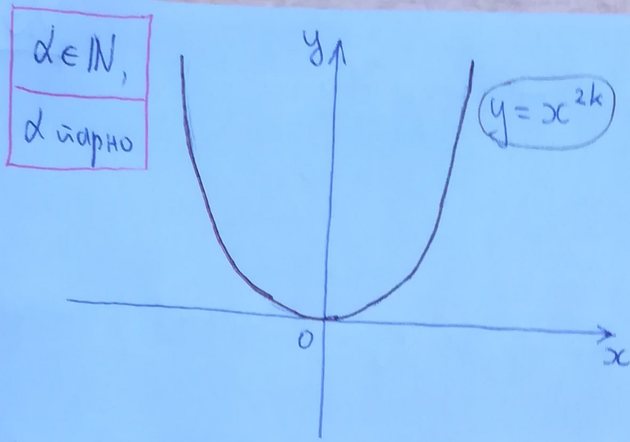
Скицирајмо графике степених функција за неке вредности α.



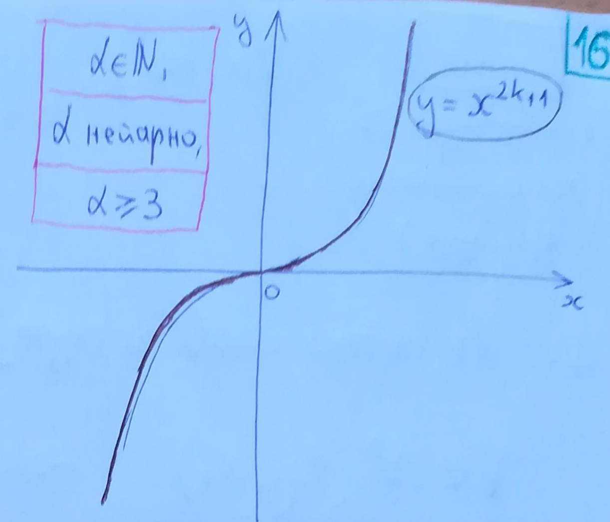
непарна функција



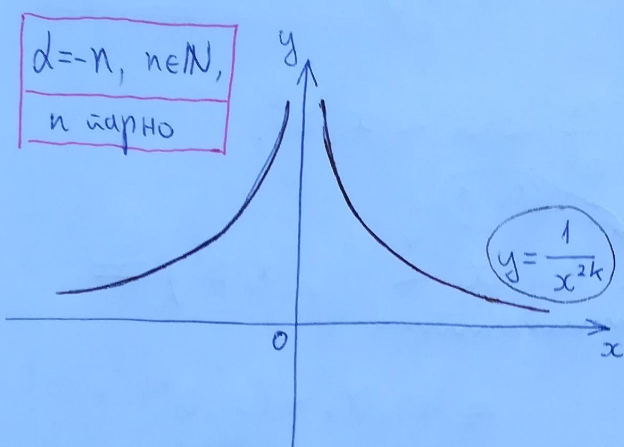
парна функција



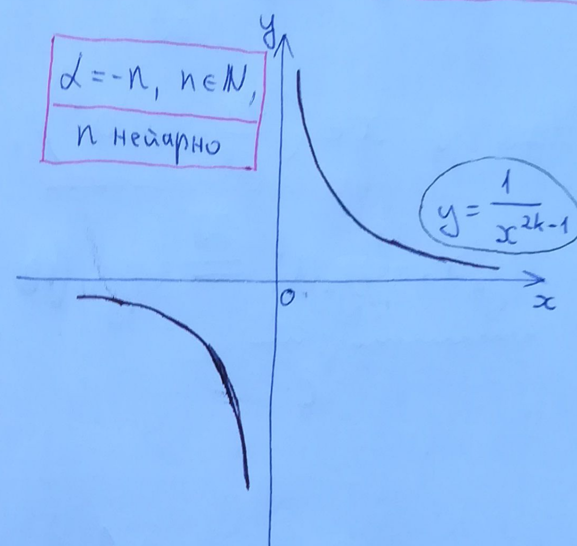
парна функција



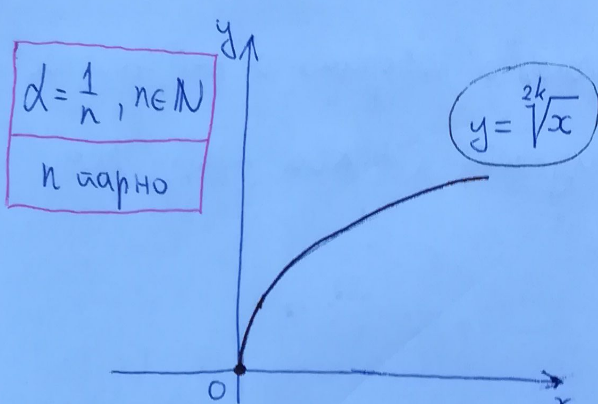
непарна функција



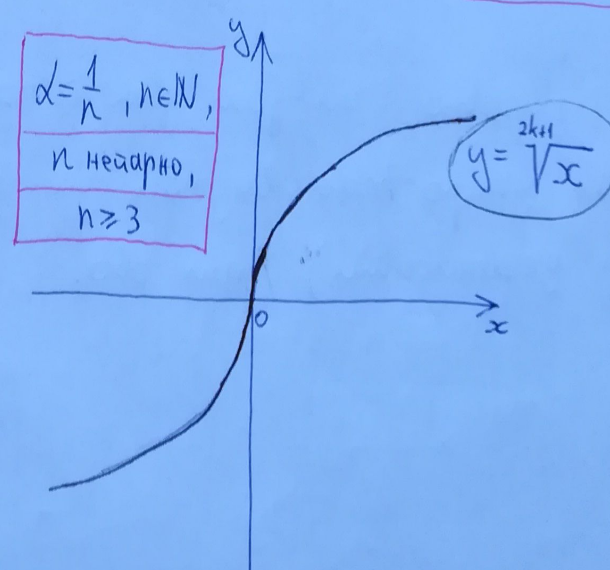
парна функција



непарна функција



ни парна ни непарна!



непарна функција