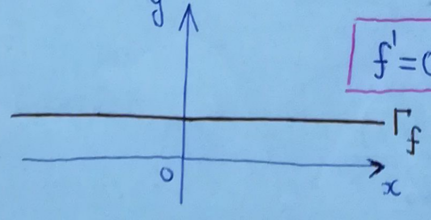
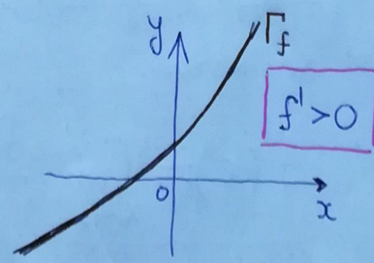
III. 3. Диференцијални рачун (калкулус)

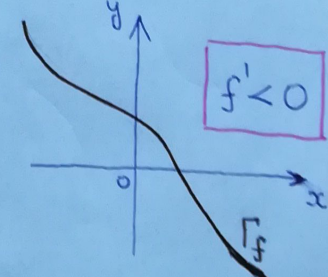
Извод функције, диференцијабилност

Пре него што строго дефинишемо извод функције даћемо неформалан опис тог појма и мотивацију за његово увођење.

Извод функције мери промену те функције. Ако нема промене, тј. ако је функција константна, онда је њен извод једнак нули. Ако функција расте (на неком интервалу), онда је њен извод позитиван (на том интервалу); и то, што брже фја расте (што је њен график стрмији), то је њен извод већи. Слично, извод строго опадајуће функције јесте негативан – негативнији што је опадање брже. (Извод фје f означава се са f'.)

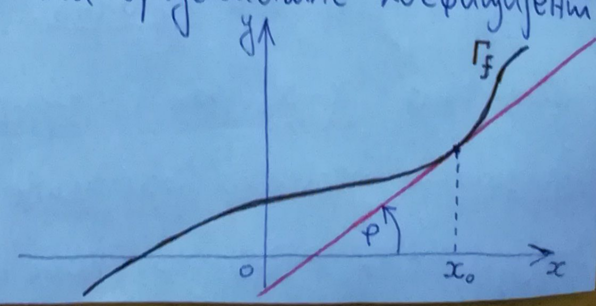




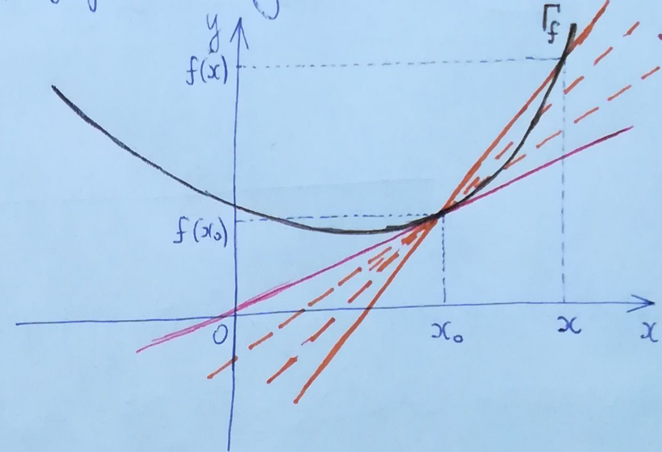


Заправо, извод функције у датој тачки представља коефицијент правца тангенте на график те фје у тој тачки:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi.$$



Шта је уопште тангента на график? Кад будемо формално дефинисали извод, даћемо и формалну дефиницију тангенте. Засад, као мотивацију за дефинисање извода, дајемо интуитивни опис тог појма.



Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини $U=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ тачке x_0 и нека је $x\in U$, $x\neq x_0$. Уочимо праву (сечицу графика) која пролази кроз тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$. Њен коефицијент правца је $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, а како x тежи ка x_0, ова сечица мења положај. Тај гранични положај сечице јесте у ствари тангента на график ф-је f у т. x_0.

Сад коначно дефинишемо извод ф-је у тачки, а на основу претходне приче, јасно је зашто га дефинишемо баш овако.

Дефиниција: Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини тачке x_0. Извод функције f у тачки x_0, у ознаци $f'(x_0)$, дефинишемо на сл. начин:

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},}$$

уколико ова гранична вредност постоји и уколико је она коначна.

Величина $x-x_0$ зове се прираштај независно променљиве, а $f(x)-f(x_0)$ прираштај зависно променљиве (или, функције f) који одговара прираштају $x-x_0$ независно променљиве.

Увођењем смене $h = x - x_0$ у лимес из дефиниције (лако се проверава да су испуњени услови Теореме о смени променљиве у лимесу), добијамо да је

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},}$$

ако постоји овај лимес и ако је коначан.

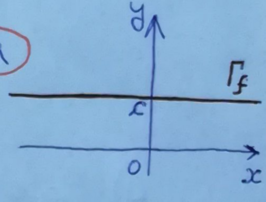
h – прираштај независно променљиве

$f(x_0+h) - f(x_0)$ – прираштај зависно променљиве који одговара прираштају h независно променљиве

Дефиниција: Нека фја f има извод у тачки x_0. Праву која пролази кроз тачку $(x_0, f(x_0))$, а чији је коефицијент правца $f'(x_0)$ (тј. праву $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$) зовемо тангентом на график фје f у тачки x_0 (или, у тачки $(x_0, f(x_0))$).

Примери: 1) $c \in \mathbb{R}$ фиксирана константа, $f(x) := c$ за све $x \in \mathbb{R}$.

константна фја



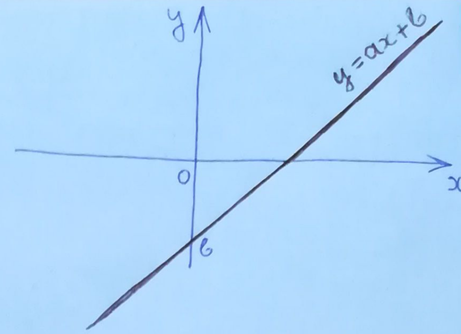
За све $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x+h)}^{=c} - \overbrace{f(x)}^{=c}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$

2) $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$

За све $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(\cancel{x}+h) \cancel{+b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a.$$

Овај други пример (а и први, као његов специјалан случај) геометријски можемо овако протумачити: тангента на праву у било којој њеној тачки јесте сама та права.



3) $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(x):=x^{\alpha}$, $x\in(0,+\infty)$

степена фја

За све $x>0$: $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x^{\alpha}\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{h}{x}}=x^{\alpha-1}\lim_{h\to0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{h}{x}}$$

Ово је лимес по h, $x^{\alpha-1}$ не зависи од h, па излази испред.

$$=x^{\alpha-1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}}_{=\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

смена: $t=\frac{h}{x}\to0$ кад $h\to0$.

Напомена: Ова рачуница пролази и за $x<0$ под условом, наравно, да је степена фја f дефинисана на $(-\infty,0)$, а то је случај кад је α облика $\frac{k}{n}$ за неко $k\in\mathbb{Z}$ и неко непарно $n\in\mathbb{N}$.

4) $$(e^{x})'=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=\lim_{h\to0}e^{x}\underbrace{\frac{(e^{h}-1)}{h}}_{\to1}=e^{x}\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

5) $$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$x+\frac{h}{2}\to x$ кад $h\to0$, а косинус је непрекидна фја.

$$=\lim_{h\to0}\underbrace{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\to\cos x}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to1}=\cos x\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

На сличан начин се може доказати да важе и остале једнакости у наредној таблици извода основних елементарних функција.

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (за оне вредности α за које једнакост има смисла, она важи и за $x<0$ и за $x=0$)

2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$.

   Специјално, за $a=e$: $(e^x)' = e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $x>0$, $a>0,\ a\neq 1$.

   Специјално, за $a=e$: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x>0$.

4. $(\sin x)' = \cos x$, $x\in\mathbb{R}$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$, $x\in\mathbb{R}$.

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Дефиниција: Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини тачке x_0. Кажемо да је ф-ја f диференцијабилна у тачки x_0 ако постоји $a \in \mathbb{R}$ т. д. је

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + o(h), \quad h \to 0. \qquad (1)$$

Функција је диференцијабилна на неком скупу ако је диференцијабилна у свим тачкама тог скупа.

Функција f је диференцијабилна ако је диференцијабилна на D_f.

Пресликавање $h \longmapsto ah$ (које броју $h \in \mathbb{R}$ придружује број $ah \in \mathbb{R}$), где је a број из дефиниције, јесте једно линеарно пресликавање $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Оно се назива диференцијалом функције f у тачки x_0 и означава се са $df(x_0)$. Дакле, $df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df(x_0)(h) = ah$. Штавише, свако линеарно пресликавање $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ јесте облика $L(h) = ah$ за неко $a \in \mathbb{R}$. Зато се претходна дефиниција може и овако исказати: f је диференцијабилна у т. x_0 ако постоји линеарно пресликавање $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ т. д. је

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Ако је f диференцијабилна у т. x_0, тј. ако постоји $a \in \mathbb{R}$ т. д. важи (1), онда из (1) добијамо:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = ah + o(h), \ h \to 0 \quad /:h \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a + o(1), \ h \to 0$$

Кад на последњу једнакост применимо $\lim\limits_{h\to 0}$, добијамо:

$$f'(x_0)=a. \quad (*)$$

Дакле, извод ф-је f у тачки x_0 постоји и једнак је баш броју a.

Обрнуто, ако постоји извод ф-је f у т. x_0, онда из $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ закључујемо:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+o(1),\ h\to 0 \quad /\cdot h \implies f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h),\ h\to 0$$

Дакле, f је диференцијабилна у т. x_0.

Овим је доказан наредни став.

Став: Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини тачке x_0. Тада је f диференцијабилна у т. x_0 акко има извод у тој тачки.

Напомена 1: Кад већ важи еквиваленција из овог става, поставља се питање зашто уопште уводимо (нови) појам диференцијабилности на начин из претходне дефиниције. Другим речима, зашто овај став није дефиниција диференцијабилности: кажемо да је функција диференцијабилна у датој тачки ако има извод у тој тачки? Одговор на ово питање добијамо у Анализи 3. За функције више променљивих ($f: D_f\to\mathbb{R}$, $D_f\subset\mathbb{R}^m$, $m\geq 2$) диференцијабилност није еквивалентна постојању (тзв. парцијалних) извода, него је диференцијабилност јачи услов.

<u>Напомена 2:</u> Ако је, дакле, f диференцијабилна у т. x_0, из једнакости (*) видимо да за њен диференцијал $df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h. \qquad (**)$$

У специјалном случају кад је $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ идентичка ф-ја на $\mathbb{R}$ ($\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) = x$ за све $x \in \mathbb{R}$), једнакост (**) је

$$d(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(x_0)(h) = h, \qquad (и)$$

јер је $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}'(x) = x' = 1$ (в. таблицу извода под $\boxed{1.}$ за $\alpha = 1$ или пример 2) на стр. $\boxed{3}$ $(a=1, b=0)$). Дакле, важи да је $d(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(x_0) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ за све $x_0 \in \mathbb{R}$. За идентичку ф-ју зависно променљива је једнака независно променљивој, па се $d(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(x_0)$ означава са dx и назива се <u>диференцијалом независно променљиве x</u>.

Нека је сад f опет произвољна диференцијабилна функција и означимо зависно променљиву са y. Дакле, $y = f(x)$ и из (**) онда имамо:

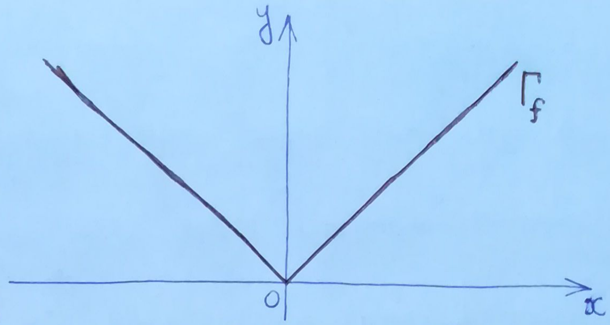
$$dy(x_0)(h) = y'(x_0) h \overset{(и)}{=} y'(x_0) \cdot dx(h) \quad \text{за све } x_0 \text{ и све } h \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad dy(x_0) = y'(x_0) \cdot dx \quad \text{за све } x_0$$

једнакост два линеарна пресликавања $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Зато се пише $\boxed{dy = y'\,dx}$, односно $\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$, и каже се да је извод количник диференцијала зависно променљиве и диференцијала независно променљиве.

Пример: $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$



$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} \overset{\text{јер је } h>0}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} \overset{\text{јер је } h<0}{=} \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

$\Longrightarrow$ Не постоји $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, па f није диференцијабилна у тачки 0.

Приметимо да ова фја јесте непрекидна (и у тачки 0):

$f(0) = 0$;

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} |x| = \lim\limits_{x\to 0+} x = 0$;

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0-} (-x) = 0$. ✓

Дефиниција: Нека је фја f дефинисана на некој околини тачке x_0. Леви извод функције f у тачки x_0, у ознаци $f'_-(x_0)$, дефинишемо на сл. начин:

$$\boxed{f'_-(x_0) := \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},}$$

ако постоји ова гранична вредност и ако је коначна.

Слично дефинишемо десни извод фје f у т. x_0:

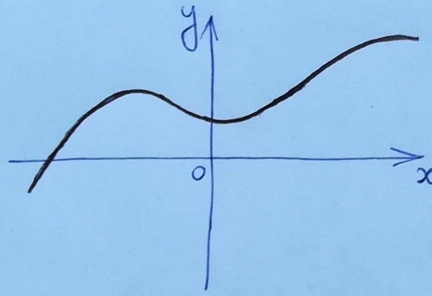
$$\boxed{f'_+(x_0) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},}$$

ако овај лимес постоји и ако је коначан.

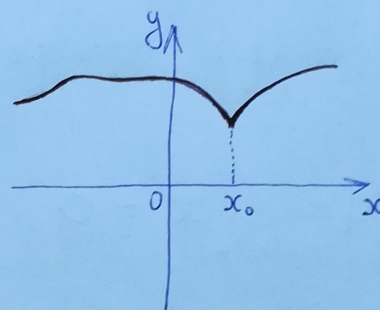
У претходном примеру, дакле, имали смо $f'_+(0)=1$ и $f'_-(0)=-1$, па та ф-ја није била диференцијабилна у нули.

Уопште можемо рећи (сад кад имамо ову дефиницију) да је ф-ја f диференцијабилна у тачки x_0 акко постоје $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и поклапају се. (У том случају важи и $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.)

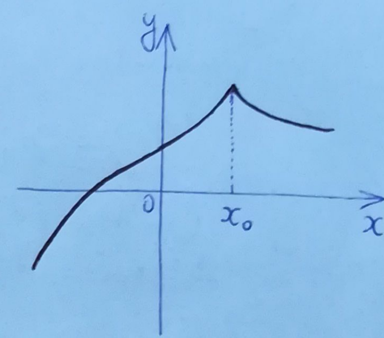
Зато се графички диференцијабилна функција препознаје по томе што јој је график гладак – нема „шпицева", тј. наглих промена правца кретања.



диференцијабилна
(гладак график)



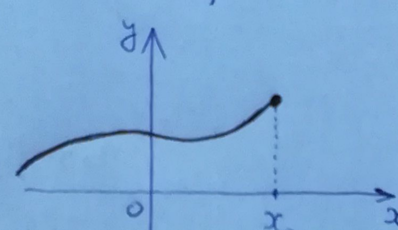
није диференцијабилна
(има шпиц; $f'_-(x_0)<f'_+(x_0)$)



није диференцијабилна
(има шпиц; $f'_-(x_0)>f'_+(x_0)$)

С тим у вези, ако је ф-ја f дефинисана у т. x_0 и „само лево" од те тачке (прецизније, ако постоји $\delta>0$ т.д. је $(x_0-\delta,x_0]\subseteq D_f$ и $(x_0,x_0+\delta)\cap D_f=\emptyset$), онда $f'(x_0)$ дефинишемо као и пре:

$$f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$



али сад је овај лимес исто што и леви лимес, па имамо $f'(x_0)=f'_-(x_0)$ (ако лимес постоји и ако је коначан).

Слично дефинишемо $f'(x_0)$ ако је f дефинисана „само десно" од т. $x_0\in D_f$. Тада имамо да је $f'(x_0)=f'_+(x_0)$.

Теорема: Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0, онда је f и непрекидна у тој тачки.

Δ: Ако у једнакости (1) из дефиниције диференцијабилности (стр. 6) прођемо лимесом кад $h \to 0$, добијамо

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0),$$

тј. (ако још уведемо смену $x = x_0 + h$)

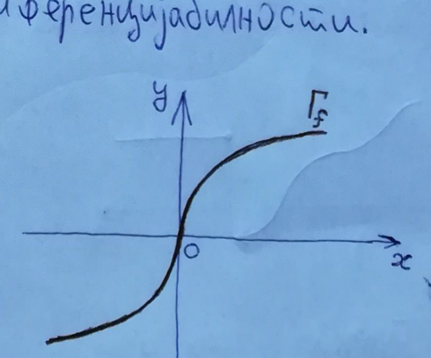
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

а ово баш значи да је f непрекидна у тачки x_0. ■

Напомена: Обрнуто не важи! Непрекидна фја не мора бити диференцијабилна! Малопре (на стр. 9) имали смо пример непрекидне фје $\left(f(x) = |x|\right)$ која није диференцијабилна.

Из ове теореме закључујемо да, ако функција има прекид у некој тачку она не може бити диференцијабилна у тој тачки. Дакле, поред шпицева и прекиди су знак да фја није диференцијабилна. Поред ове две, постоји још једна ствар која указује на одсуство диференцијабилности.

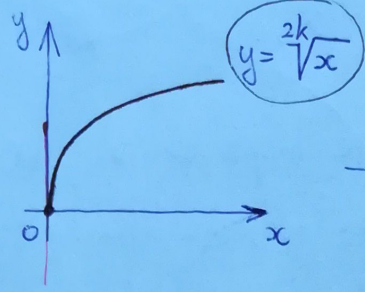
Пример: $f(x) := \sqrt[3]{x}$, $x \in R$

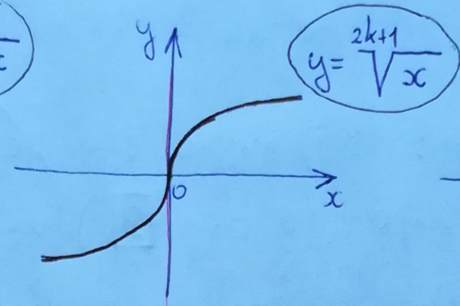


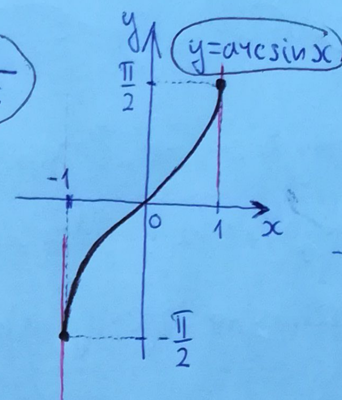
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

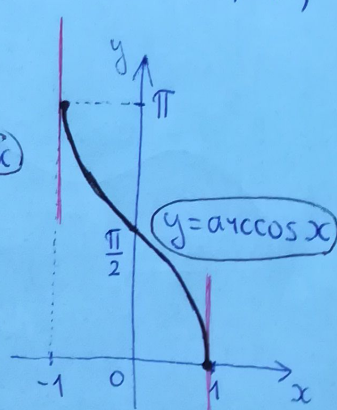
Лимес, дакле, постоји, али је бесконачан, па фја f није диференцијабилна у нули. Неформално речено, тангента на график у т. 0 постоји, али је вертикална („коефицијент правца јој је бесконачан"). Та тангента овде је управо y-оса.

На сличан начин се можемо уверити и да ниједна од корених функција $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\geq 2)$ није диференцијабилна у нули, док arcsin и arccos нису диференцијабилне у крајњим тачкама домена (у тачкама -1 и 1). Наиме, у свим поменутим тачкама имамо „вертикалне тангенте". (Приметимо да у таблици извода на стр. $\boxed{5}$, под редним бројевима $\boxed{8.}$ и $\boxed{9.}$ стоји да формуле важе за $x\in(-1,1)$, док је $D_{\arcsin}=D_{\arccos}=[-1,1]$.)



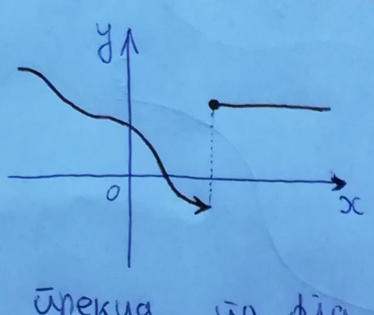




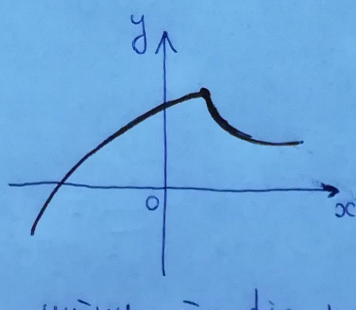


Ове функције јесу диференцијабилне у свим осталим тачкама својих домена.

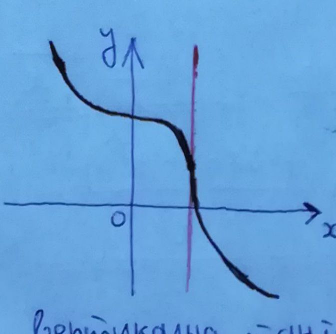
Да резимирамо: кад имамо график функције, постоје три знака да функција није диференцијабилна у датој тачки: прекид, шпиц и „вертикална тангента".



прекид, па ф-ја није диференцијабилна



шпиц, па ф-ја није диференцијабилна (иако јесте непрекидна)



вертикална тангента, па ф-ја није диференцијабилна (иако јесте непрекидна)

Размотримо сад питање како се извод слаже са основним рачунским операцијама.

Став: Нека су функције u и v диференцијабилне у тачки x_0. Тада су и ф-је $u+v$, $u-v$ и $u\cdot v$ диференцијабилне у тој тачки и важе једнакости:

$$\boxed{(u\pm v)'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0);}$$

$$\boxed{(u\cdot v)'(x_0)=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0).}$$

Ако је још и $v(x_0)\neq 0$, онда је и ф-ја $\frac{u}{v}$ диференцијабилна у т. x_0 и важи да је

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0)=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{(v(x_0))^2}}.$$

Δ: За бисмо доказали прву формулу (заправо, то су две формуле), треба да утврдимо да је
$$\lim_{h\to 0}\frac{(u\pm v)(x_0+h)-(u\pm v)(x_0)}{h}\overset{?}{=}u'(x_0)\pm v'(x_0).$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{u(x_0+h)\pm v(x_0+h)}^{(u\pm v)(x_0+h)}-\overbrace{(u(x_0)\pm v(x_0))}^{(u\pm v)(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\pm\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$

$$=u'(x_0)\pm v'(x_0).\ \checkmark$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u\cdot v)(x_0+h)-(u\cdot v)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\,v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0+h) + u(x_0)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\overbrace{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}}^{\to u'(x_0)} \cdot \underbrace{v(x_0+h)}_{\to v(x_0)} + u(x_0)\cdot \overbrace{\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}^{\to v'(x_0)} \right)$$

v је непрекидна у т. x_0 (јер је диференцијабилна у тој тачки)

$$= u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad (u\cdot v)'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0).$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{u}{v}(x_0+h) - \frac{u}{v}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{h\cdot v(x_0+h)\cdot v(x_0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\,v(x_0) - u(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,v(x_0+h)}{h\,v(x_0+h)\,v(x_0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}}^{\to u'(x_0)}\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot \overbrace{\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}^{\to v'(x_0)}}{\underbrace{v(x_0+h)}_{\to v(x_0)}\cdot v(x_0)}$$

ако је $v(x_0) \neq 0$

$$= \frac{u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,v'(x_0)}{(v(x_0))^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,v'(x_0)}{(v(x_0))^2}$$

Последица: Ако је функција v диференцијабилна у тачки x_0 и ако је $c\in\mathbb{R}$ константа, онда је и ф-ја $c\cdot v$ диференцијабилна у т. x_0 и важи:

$$\boxed{(c\cdot v)'(x_0) = c\cdot v'(x_0).}$$

Д: Применимо другу једнакост из претходног става (формулу за извод производа) при чему за фју u узимамо константну функцију: $u(x) = c$ за све $x \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ $u'(x) = 0$ за све $x \in \mathbb{R}$).

$$(c\,v)'(x_0) = \underbrace{u'(x_0)}_{=0}\,v(x_0) + \underbrace{u(x_0)}_{=c}\,v'(x_0) = c \cdot v'(x_0). \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Формуле из претходног става и претходне последице краће се записују овако:

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}\,, \quad \boxed{(u \cdot v)' = u'v + u\,v'}\,,$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\cdot v'}{v^2}}\,, \quad \boxed{(c\,v)' = c \cdot v'}.$$

Пример: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Као што смо навели код таблице извода (стр. $\boxed{5}$), ова једнакост се може и директно установити (користећи нпр. адициону формулу $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$).

За бисмо били у стању да израчунамо извод произвољне елементарне функције (у тачкама у којима је она диференцијабилна) треба још да утврдимо како се извод слаже с композицијом. О томе говори наредни став.

Став: (извод сложене ф-је (композиције))

Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0 и функција g диференцијабилна у тачки $f(x_0)$, онда је $g\circ f$ диференцијабилна у т. x_0 и важи:

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).}$$

Δ: Став ћемо доказати уз додатну претпоставку да

$$\boxed{(\exists W\in\mathcal{N}(x_0))\ (\forall x\in W\setminus\{x_0\})\quad f(x)\neq f(x_0)},\ \text{тј.}$$

$$\boxed{(\exists U\in\mathcal{N}(0))\ (\forall h\in U\setminus\{0\})\quad f(x_0+h)\neq f(x_0).}\quad \underline{\underline{(\text{ПП})}}$$

Став важи и без ове претпоставке, али је онда доказ сложенији.

Иначе, ова претпоставка није превише рестриктивна. На пример, ако је f основна елементарна ф-ја која није константна, онда је услов (ПП) испуњен за било које $x_0\in D_f$. (Наравно, ако је f константна, онда је $f'=0$, а и $g\circ f$ је константна, па је горња једнакост свакако тачна: $0=0$ ✓.)

Треба, дакле, да докажемо да је $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

$$\lim_{h\to0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} \overset{(\text{ПП})}{=} \lim_{h\to0}\frac{g\big(f(x_0)+f(x_0+h)-f(x_0)\big)-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{g\big(f(x_0)+f(x_0+h)-f(x_0)\big)-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{=f'(x_0)}$$

смена: $\underline{k=f(x_0+h)-f(x_0)}\to 0$ кад $h\to0$

f непрек. у т. x_0

Услов (ПП) обезбеђује да је испуњен услов (2) из теореме о смени променљиве у лимесу (в. стр. $\boxed{10}$, $\underline{1.\ \text{IV}}$).

$$= \lim_{k\to0}\frac{g(f(x_0)+k)-g(f(x_0))}{k}\cdot f'(x_0)$$

$$= \underline{\underline{g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}}\quad ✓$$

Примери: 1) $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{matrix} f(x) = 3x, & g(y) = e^y \\ f'(x) = 3, & g'(y) = e^y \end{matrix}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2) $\left(\cos\frac{1}{x}\right)' = -\sin\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Прошли пут смо утврдили да су све елементарне функције непрекидне. Међутим, нису све елементарне функције диференцијабилне! Бар не у свим тачкама својих домена. Наиме, имамо да су збир, разлика, производ, количник и композиција диференцијабилних функција опет диференцијабилне функције, али проблем је што нису све основне елементарне функције диференцијабилне. Видели смо да arcsin и arccos нису диференцијабилне у тачкама -1 и 1, као и да поједине степене фје (за одређене вредности α) нису диференцијабилне у нули.