15. IV 2020.

Прошли пут смо увели појам непрекидности – један од најважнијих појмова математичке анализе. Сад ћемо доказати да је збир, разлика, производ, као и количник две непрекидне функције такође непрекидна функција. Ту ћемо користити наредну чињеницу (коју смо такође прошле среде установили): ако је $a \in D_f \cap D_f'$, онда важи еквиваленција:

$$\boxed{f \text{ је непрекидна у т. } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).} \quad (*)$$

Став: Нека су f и g функције и нека је $a \in D_f \cap D_g$. Ако су f и g непрекидне у т. a, онда су и $f+g$, $f-g$ и $f \cdot g$ непрекидне у тачки a. Ако је још и $g(a) \neq 0$, онда је и функција $\frac{f}{g}$ непрекидна у т. a.

Δ: Знамо да је $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$, док је $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

Ако је a изолована тачка домена, онда је одговарајућа ф-ја свакако непрекидна у т. a. ✓

Ако је a тачка нагомилавања домена, онда је a тачка нагомилавања и скупова D_f и D_g. (Зашто?) На основу непрекидности ф-ја f и g у т. a и еквиваленције $(*)$ имамо да је

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Како је, наравно, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ и $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, то из чињенице да се лимес лепо слаже са основним рачунским операцијама (последњи став који смо доказали на правим предавањима 11. III 2020.) закључујемо:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

ако је $g(a) \neq 0$

(*) $\Longrightarrow$ $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и $\frac{f}{g}$ (ако је $g(a)\neq 0$) јесу непрек. у т. a. ✓

■

Примери: 1) Сваки полином, тј. полиномијална функција

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

јесте непрекидна функција (на $D_p = \mathbb{R}$), јер се добија као збир и производ константних и идентичке функције, а за ове знамо да су непрекидне.

2) Свака рационална фја $\frac{p(x)}{q(x)}$ (количник два полинома) јесте непрекидна (у свим тачкама свог домена $\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq 0\}$). Специјално, фја $y = \frac{1}{x}$ (коју смо прошли пут разматрали) јесте непрекидна (на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

3) Знамо да су синус и косинус непрекидне ф-је, па сад на основу овог става можемо да закључимо и да су тангенс и котангенс непрекидне функције (у свим тачкама својих домена):

$$tg = \frac{\sin}{\cos} \quad , \quad ctg = \frac{\cos}{\sin} .$$

Докажимо сад и да је композиција непрекидних непрекидна. У том доказу ћемо користити Хајнеову теорему, коју смо прошли пут формулисали и која каже да за $a \in D_f$ важи следећа еквиваленција:

f је непрекидна у тачки a	$\Longleftrightarrow$	За сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елемената домена D_f т.д. $x_n \to a$ важи да $f(x_n) \to f(a)$.

$\boxed{\text{Став:}}$ Нека су f и g функције и нека је $a \in D_f$ т.д. $f(a) \in D_g$. Ако је f непрекидна у т. a и g непрекидна у т. $f(a)$, онда је $g \circ f$ непрекидна у тачки a.

Δ: Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ елемената скупа $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ такав да $x_n \to a$. По Хајнеовој теореми, довољно је да утврдимо да $g(f(x_n)) \to g(f(a))$.

$$x_n \in D_{g\circ f} \subseteq D_f \xRightarrow[\text{Хајнеова теор.}]{f \text{ нетр. у т. } a} \underbrace{f(x_n)}_{\in D_g} \to f(a) \xRightarrow{g \text{ нетр. у т. } f(a)} g(f(x_n)) \to g(f(a))$$

✓ ■

Пример: Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ фиксирана константа. Степена функција $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, јесте непрекидна. Наиме, она се може представити као композиција три непрекидне функције:

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

$$\begin{tikzcd}
(0,+\infty) \arrow[r, "\ln"] \arrow[drr, dashed, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "y \mapsto \alpha y"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
& & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

експоненцијална функција, $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{R}$

Ако је $\alpha > 0$, одговарајућа степена фја је дефинисана и у нули. Докажимо да је непрекидна и у тој тачки:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha = \lim_{x \to 0+} e^{\alpha \ln x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 = 0^\alpha \quad (*)$$

смена: $\boxed{t = \alpha \underbrace{\ln x}_{-\infty}} \to -\infty$ кад $x \to 0+$ јер је $\alpha > 0$

Ако је $\alpha = \frac{k}{n}$ за неко $k \in \mathbb{Z}$ и неко непарно $n \in \mathbb{N}$, онда је x^α дефинисано и за $x \in (-\infty, 0)$. Међутим, тада је одговарајућа степена фја парна (ако је k парно) или непарна (ако је k непарно), па се одатле и из непрекидности на $(0,+\infty)$ може доказати њена непрекидност и на $(-\infty, 0)$.

Дакле, све степене функције су непрекидне (на својим доменима).

По дефиницији непрекидности ф-је f у тачки $a \in D_f$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји околина $U \in \mathcal{N}(a)$ таква да је

$$\boxed{f(D_f \cap U) \subseteq \underbrace{(f(a)-\varepsilon,\ f(a)+\varepsilon)}_{\in \mathcal{N}(f(a))}} \qquad (1)$$

Из ове чињенице лако следи наредни став.

$\boxed{\text{Став:}}$ Нека је функција f непрекидна у тачки a. Тада:

(а) f је ограничена на некој околини тачке a;

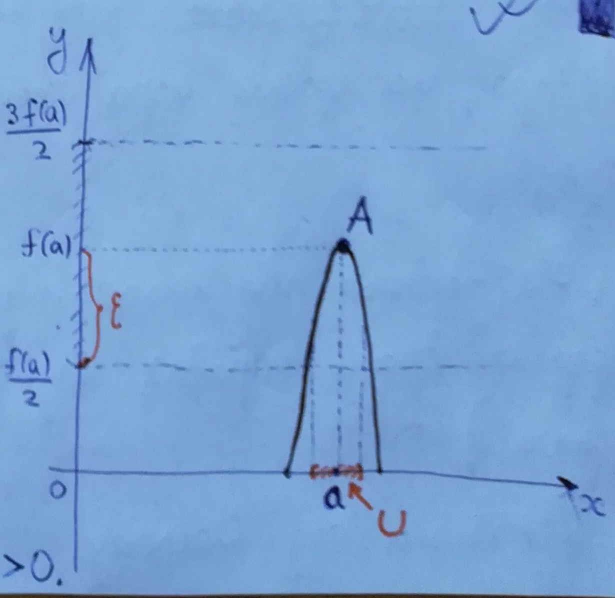
(б) ако је још $f(a) \neq 0$, онда је $f \neq 0$ на некој околини т. a.

Δ: (а) Искористимо (1) за било које $\varepsilon > 0$, нпр. за $\varepsilon := 1$. Тада је $f(D_f \cap U) \subseteq (f(a)-1,\ f(a)+1)$ за неку околину $U \in \mathcal{N}(a)$.

$\Rightarrow$ $f(D_f \cap U)$ је ограничен скуп $\Rightarrow$ f је ограничена на U. ✓

(б) Применимо (1) за $\varepsilon := \dfrac{|f(a)|}{2} > 0$. Како $0 \notin (f(a)-\varepsilon,\ f(a)+\varepsilon)$, то је $f \neq 0$ на одговарајућој околини U (тј. на $D_f \cap U$). ✓

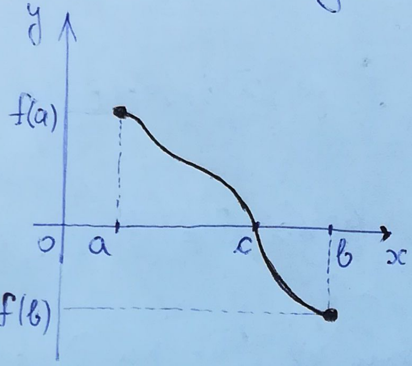
Графичка интерпретација дела (б) овог става је следећа: ако је $f(a) \neq 0$ (нпр. $f(a) > 0$), онда график ф-је f пролази кроз тачку $A(a, f(a))$, која је изнад x-осе, па је потребно одређено време да би се он спустио до x-осе (и с леве и с десне стране) – због непрекидности нема одвајања оловке од папира. Тако се појави околина тачке a на којој је $f > 0$.

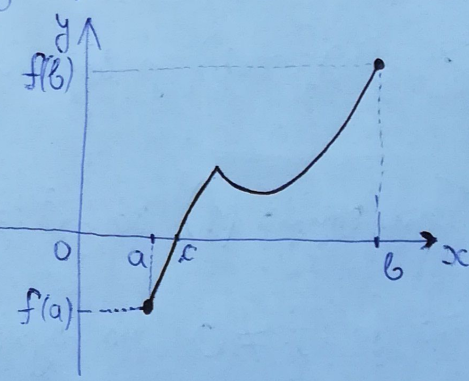


Болцано-Кошијева теорема

Теорема: (Болцано-Коши) Нека је $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција т.д. је $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тада постоји $c \in (a,b)$ т.д. је $f(c)=0$.

Пре доказа објаснимо формулацију Болцано-Кошијеве теореме. Услов $f(a)\cdot f(b)<0$ каже да фја f у крајевима овог сегмента узима вредности различитог знака ($f(a)>0$, $f(b)<0$ или $f(a)<0$, $f(b)>0$). То значи да график ове фје спаја тачку изнад x-осе са тачком испод x-осе (или обрнуто).





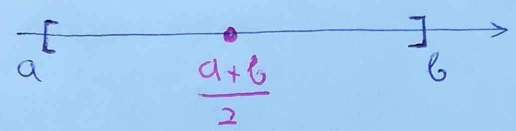
Због непрекидности, при том спајању нема одвајања оловке од папира, па график мора пресећи x-осу, тј. фја f мора имати нулу.

(Разумевање ове геометријске интерпретације Коши-Болцанове теореме вреди, наравно, неупоредиво више од напамет наученог доказа.)

Докажимо сад теорему.

Δ: Претпоставимо да је нпр. $f(a)<0$, а $f(b)>0$ (доказ за случај $f(a)>0$, $f(b)<0$ је аналоган).

Уочимо (аритметичку) средину сегмента $[a,b]$ – то је број $\frac{a+b}{2}$. Ако је $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, онда је ствар готова: имамо тачку $c:=\frac{a+b}{2}$ између a и b т.д. је $f(c)=0$.



У супротном (ако је $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ или $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$) нека је $[a_1,b_1]$ онај од сегмената $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ за који важи $f(a_1)<0$ и $f(b_1)>0$ (ако је $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, то је сегмент $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, а ако је $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, онда је то сегмент $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$).

Сад исти поступак поновимо за сегмент $[a_1,b_1]$ (уместо $[a,b]$): ако је $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, онда узмемо $c:=\frac{a_1+b_1}{2}$ и готово; а у супротном добијамо сегмент $[a_2,b_2]$, који је или прва или друга половина сегмента $[a_1,b_1]$, такав да је $f(a_2)<0$ и $f(b_2)>0$.

Поступак настављамо индуктивно. Може да се деси да у једном кораку вредност ф-је f у средишту сегмента буде једнака нули. У том случају имамо тражену тачку c. У супротном, добијамо низ непразних уметнутих сегмената:

$$\boxed{[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\dots\supset[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\supset\dots}$$

такав да за све $n\in\mathbb{N}$ важи: $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$.

$$\xRightarrow{\text{Коши–Канторов принцип}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\neq\emptyset.$$

$$\Longrightarrow \exists c\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\subset[a,b]$$

$$\Longrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ \boxed{a_n\leq c\leq b_n}$$

$$\Longrightarrow 0\leq c-a_n\leq b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n} \quad \text{за све } n\in\mathbb{N}$$

јер је $f(a_n)<0$ за све $n\in\mathbb{N}$

$$\Longrightarrow a_n\longrightarrow c \xRightarrow[\text{Хајнеова теорема}]{f \text{ непрек. у т. } c} f(c)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\leq 0$$

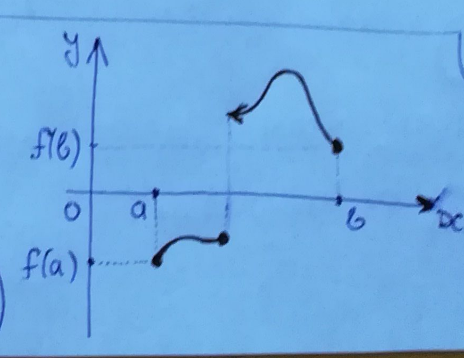
Слично, $$0\leq b_n-c\leq b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n} \quad \text{за све } n\in\mathbb{N}$$

јер је $f(b_n)>0$ за све $n\in\mathbb{N}$

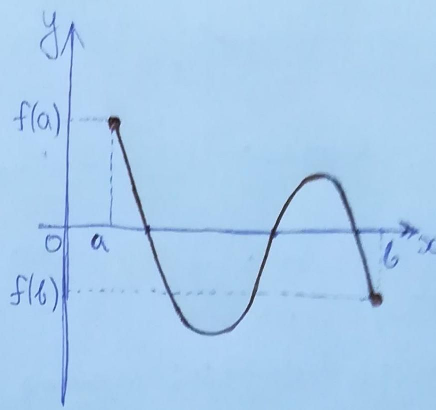
$$\Longrightarrow b_n\longrightarrow c \xRightarrow[f \text{ непрек. у т. } c]{} f(c)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\geq 0$$

Коначно закључујемо да је $f(c)=0$. Приметимо да $c\in(a,b)$ (не може бити $c=a$ нити $c=b$) јер је $f(c)=0$, а $f(a)\cdot f(b)<0$.

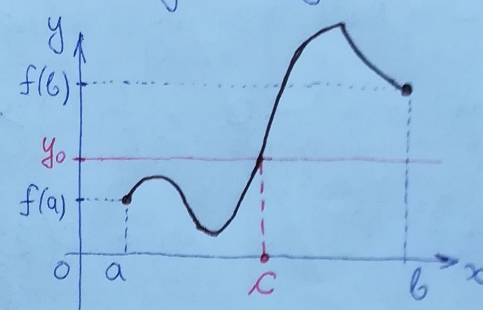
Напомена 1: Наравно, ако $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ није непрекидна, онда не мора постојати $c\in(a,b)$ т.д. је $f(c)=0$ (иако је $f(a)\cdot f(b)<0$). (На слици десно имамо пример.)



Напомена 2: Кад су испуњени услови Болцано-Кошијеве теореме тачка $c \in (a,b)$ са својством $f(c)=0$, наравно, не мора бити јединствена; тј. фја f може имати и више од једне нуле (в. слику десно).



Последица: Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $y_0 \in [f(a), f(b)]$ (ако је $f(a) \le f(b)$), односно $y_0 \in [f(b), f(a)]$ (ако је $f(a) \ge f(b)$). Тада постоји $c \in [a,b]$ т.д. је $f(c)=y_0$.



(Кратко речено, непрекидна фја на сегменту $[a,b]$ узима све вредности између $f(a)$ и $f(b)$.)

Δ: 1° Ако је $y_0=f(a)$ или $y_0=f(b)$, онда у првом случају можемо узети $c:=a$, а у другом $c:=b$.

2° Ако је $y_0 \in (f(a), f(b))$, односно $y_0 \in (f(b), f(a))$, онда посматрамо помоћну фју:

$$g:[a,b]\to\mathbb{R}, \quad g(x):=f(x)-y_0$$

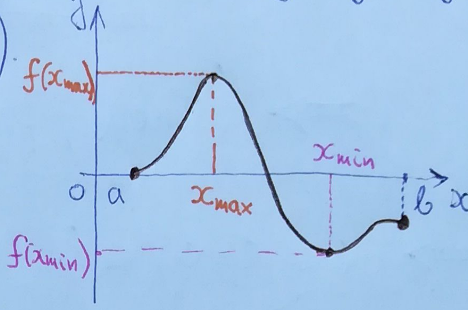
g је непрекидна као разлика две непрекидне (в. став на стр. $\boxed{1}$),

$$g(a)\cdot g(b)=(f(a)-y_0)\cdot(f(b)-y_0)<0$$

$$\xRightarrow{\text{Болцано-Коши}} (\exists c\in(a,b))\ \overset{f(c)-y_0}{g(c)}=0 \implies f(c)=y_0.$$

Вајерштрасова теорема

Теорема: (Вајерштрас) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је f ограничена (на $[a,b]$) и достиже своју најмању и највећу вредност (на $[a,b]$).



Другим речима, постоје $x_{min}, x_{max}\in[a,b]$ т. д. је

$$(\forall x\in[a,b])\ \ f(x_{min})\leq f(x)\leq f(x_{max}).$$

Δ: Докажимо најпре да је f ограничена, тј. да је скуп $f([a,b])$ ограничен.

Претпоставимо супротно: f није ограничена.

$\Longrightarrow$ За свако $n\in\mathbb{N}$ постоји $x_n\in[a,b]$ т. д. је $|f(x_n)|>n$ (јер скуп $f([a,b])$, будући неограничен, није садржан у сегменту $[-n,n]$).

$\Longrightarrow$ Имамо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, који је ограничен (сви чланови су му у сегменту $[a,b]$), па зато има конвергентан подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

$$c:=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\in[a,b]$$

$\overset{f \text{ непрекидна}}{\underset{\text{Хајнеова теорема}}{\Longrightarrow}}$ $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)$ $\Longrightarrow$ Низ $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ јесте ограничен (јер је конвергентан).

С друге стране, за свако $k\in\mathbb{N}$ постоји члан овог низа, и то баш $f(x_{n_k})$, са својством

$$|f(x_{n_k})|>n_k\geq k. \quad ⚡$$

Дакле, f је ограничена, па су

$$\underline{\underline{m := \inf f([a,b])}} \quad \text{и} \quad \underline{\underline{M := \sup f([a,b])}}$$

коначне вредности, тј. $\underline{\underline{m, M \in \mathbb{R}}}$!

Остаје да докажемо да постоје $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ такви да је $f(x_{min}) = m$ и $f(x_{max}) = M$. Докажимо постојање броја x_{min}, а слично се доказује постојање броја x_{max}.

ПТС: $(\forall x \in [a,b])\ f(x) > m$ (Не може бити $f(x) < m$ јер је $m = \inf f([a,b]) = \inf \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$.)

Уочимо (помоћну) фју $\underline{\underline{g : [a,b] \to \mathbb{R}}}$, $g(x) := \dfrac{1}{f(x) - m} > 0$ за све $x \in [a,b]$

g је непрекидна јер је f непрекидна (в. став на стр. $\boxed{1}$), па на основу првог дела овог доказа имамо да је g ограничена.

$$\underline{\underline{s := \sup g([a,b])}} > 0 \qquad (s \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow \quad m + \frac{1}{s} > m \quad \Longrightarrow \quad m + \frac{1}{s} \text{ није доње ограничење скупа } f([a,b])$$

(јер је m инфимум овог скупа)

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\exists x_0 \in [a,b]}} \quad f(x_0) < m + \frac{1}{s}$$

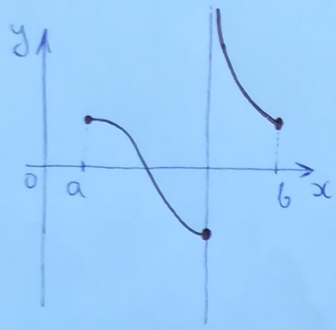
$$\Longrightarrow \quad \underbrace{f(x_0) - m}_{> 0} < \frac{1}{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{g(x_0)}} = \frac{1}{f(x_0) - m} \ \underline{\underline{>}}\ s \quad ↯$$

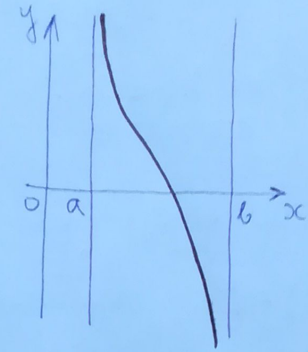
јер је $s = \sup \{ g(x) \mid x \in [a,b] \}$

✓ ■

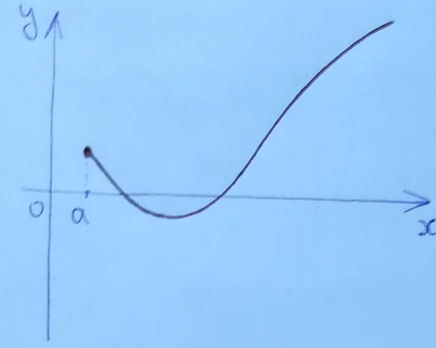
Напомена: Ако f није непрекидна или ако D_f није сегмент, онда, наравно, f не мора бити ограничена:



$D_f = [a,b]$, али f има прекид



f непрекидна, али $D_f = (a,b)$



f непрекидна, али $D_f = [a,+\infty)$.

Последица: Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција, онда је $f([a,b])$ сегмент. Штавише,

$$\boxed{f([a,b]) = [f(x_{min}), f(x_{max})]},$$

где су $x_{min}, x_{max}\in[a,b]$ тачке из (формулације) Вајерштрасове теореме (такве да је $f(x_{min})\le f(x)\le f(x_{max})$ за све $x\in[a,b]$).

Δ: Треба да докажемо једнакост два скупа. Доказаћемо да је први подскуп другог и да је други подскуп првог.

$\boxed{\subseteq:}$ Ово важи по дефиницији бројева x_{min} и x_{max}.

$\boxed{\supseteq:}$ Узмимо произвољно $y_0\in[f(x_{min}), f(x_{max})]$ и докажимо да $y_0\in f([a,b])$, тј. да је $y_0 = f(c)$ за неко $c\in[a,b]$. Применимо последицу Коши-Болцанове теореме (стр. $\boxed{9}$) на рестрикцију ф-је f на сегмент $[x_{min}, x_{max}]$ (ако је $x_{min}\le x_{max}$), односно $[x_{max}, x_{min}]$ (ако је $x_{min}\ge x_{max}$):

$\Longrightarrow \exists c$ између x_{min} и x_{max} (дакле, $c\in[a,b]$) т.д. је $f(c)=y_0$. $\blacksquare$

Непрекидност монотоне функције

Последица од малочас каже да, ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна, онда је $f([a,b])$ сегмент. За монотоне функције важи и обрнуто.

$\boxed{\text{Став:}}$ Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ монотона функција. f је непрекидна акко је $f([a,b])$ сегмент.

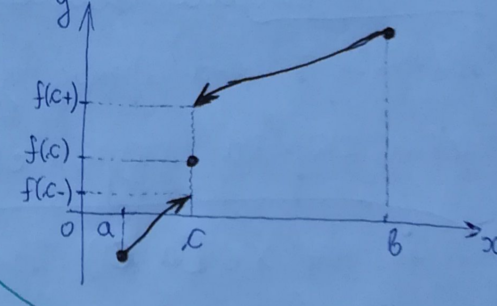
Δ: $\boxed{\Rightarrow)}$ ✓ ← последица с претходне стране (за овај смер нам не треба монотоност)

$\boxed{\Leftarrow)}$ Сад, дакле, претпостављамо да је $f([a,b])$ сегмент, а треба да докажемо да је f непрекидна.

ПпС: f има прекид у некој тачки $c\in[a,b]$.

Размотрићемо случај кад је f растућа (аналогно се разматра случај кад је f опадајућа).

① $c\in(a,b)$



Уведимо следеће ознаке:

$$f(c-):=\lim_{x\to c-}f(x)\ ,\quad f(c+):=\lim_{x\to c+}f(x).$$

Уочимо скуп $f([a,c))=\{f(x)\mid a\le x<c\}$ и докажимо да је $f(c-)=\sup f([a,c))$.

$(\forall x\in[a,c))\ f(x)\le f(c) \implies$ $f(c)$ је једно горње ограничење скупа $f([a,c))$.

$\Longrightarrow$ $\exists$ коначан $s := \sup f([a,c))$ и важи $s \le f(c)$.

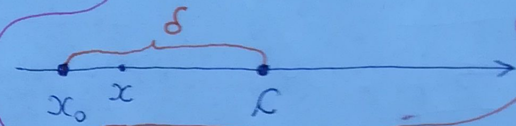
Да бисмо доказали да је $s = \lim\limits_{x \to c-} f(x)$ треба да утврдимо следеће:

? $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a,c))\ |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon$?

$\varepsilon > 0$ произв. $\Longrightarrow$ $s - \varepsilon$ није горње ограничење скупа $f([a,c))$

$\Longrightarrow (\exists x_0 \in [a,c))\ f(x_0) > s - \varepsilon$

$\delta := c - x_0 > 0$



$x_0 < x,\ f \nearrow$

$(\forall x \in [a,c))\ |x-c| < \delta \Rightarrow s - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le s$

$\Longrightarrow |f(x) - s| < \varepsilon$ ✓

Дакле, доказали смо да је $f(c-) = \sup f([a,c)) \in \mathbb{R}$, као и $f(c-) \le f(c)$

На сличан начин се показује и да је $f(c+) = \inf f((c,b]) \in \mathbb{R}$ и $f(c+) \ge f(c)$

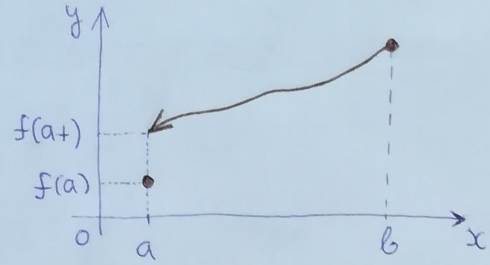
$$\Longrightarrow \quad f(a) \le f(c-) \le f(c) \le f(c+) \le f(b)$$

Пошто f има прекид у т. c на бар једном од ова два места мора бити строга неједнакост, тј. мора бити $f(c-) < f(c+)$.

За све $x \in [a,c)$ важи $f(x) \le f(c-)$ (јер је $f(c-) = \sup f([a,c))$), а за све $x \in (c,b]$ важи $f(x) \ge f(c+)$ (јер је $f(c+) = \inf f((c,b])$), па ниједна од тачака из интервала $(f(c-), f(c+))$, сем евентуално тачке $f(c)$, није у слици ф-је f.

$\Longrightarrow$ $f([a,b])$ није сегмент. ↯ ✓

2° $c=a$



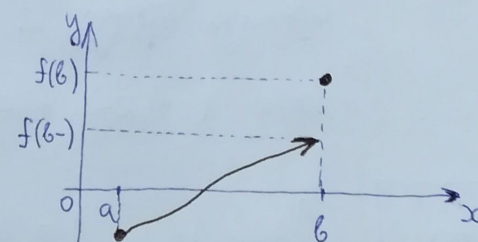
На исти начин као у првом случају добија се:

$$f(a) < f(a+) = \inf f((a,b]) \le f(b).$$

$\Rightarrow$ Ниједна тачка из интервала $(f(a), f(a+))$ није у $f([a,b])$.

$\Rightarrow$ $f([a,b])$ није сегмент (јер садржи тачке $f(a)$ и $f(b)$, а не садржи све између). ↯ ✓

3° $c=b$



... $f(a) \le \sup f([a,b)) = f(b-) < f(b)$.

... $f([a,b])$ није сегмент. ↯ ✓ ■

Напомена 1: Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција, из последице на стр. $\boxed{12}$ знамо да је $f([a,b]) = [f(x_{min}), f(x_{max})]$.

Ако је f још и растућа, онда је јасно да за x_{min} можемо узети a, а за x_{max} можемо узети b. У случају опадајуће фје, $x_{min} := b$, $x_{max} := a$.

Закључујемо да за монотоне, непрекидне фје f важи:

$$\boxed{f([a,b]) = \begin{cases} [f(a), f(b)] & , f\uparrow \\ [f(b), f(a)] & , f\downarrow \end{cases}}$$

Напомена 2: Приметимо да смо у доказу претходног става утврдили да за тачку прекида c монотоне фје $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ важи да $f(c-)$ и $f(c+)$ постоје и да су коначни, тј. да је c тачка прекида прве врсте.

Истим разматрањем као у том доказу показује се да монотона фја (чији је домен било који подскуп од $\mathbb{R}$ — не обавезно сегмент) може имати само прекиде прве врсте, и то њих највише пребројиво много (свакој тачки прекида c придружи се рационалан број из интервала $(f(c-), f(c+))$ ...).

Теорема: (Непрекидност инверзне функције)

Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ строго монотона, непрекидна фја. Тада:

(а) f је инјективна;

(б) $f:[a,b]\to f([a,b])=[c,d]$ јесте бијекција;

(в) $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ јесте такође монотона (и то исте врсте монотоније као и f);

(г) $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ јесте непрекидна.

Δ: (а) Нека су $x_1,x_2\in[a,b]$ две различите тачке, нпр. нека је $x_1<x_2$. Треба да докажемо да је $f(x_1)\neq f(x_2)$.

1° f строго растућа $\implies f(x_1)<f(x_2)$ ✓

2° f строго опадајућа $\implies f(x_1)>f(x_2)$ ✓

(б) Овде је кодомен фје f сужен на слику $f([a,b])$, за коју знамо да је сегмент (јер је f непрекидна), па је зато $f:[a,b]\to[c,d]$ сурјективна. Из дела (а) знамо и да је инјективна, па је, дакле, бијекција.

(в) $y_1, y_2 \in [c,d]$, $y_1 < y_2$

Треба да докажемо да је $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ако је f (строго) растућа, односно $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ ако је f (строго) опадајућа. Докажимо нпр. ово друго, а прво се доказује на аналоган начин.

Пс: $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$

$$\Rightarrow y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \overset{f\searrow}{\geq} f(f^{-1}(y_2)) = y_2 \quad ↯ \quad ✓$$

(г) Знамо да је $f^{-1}([c,d]) = [a,b]$, а из дела (в) знамо и да је f^{-1} монотона фја, па на основу става са стране $\boxed{13}$ закључујемо да је f^{-1} непрекидна. ✓

■

Примери: 1) $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ непрекидна, строго растућа фја

$$\Rightarrow \arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$ јесте непрекидна.

2) $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ непрекидна, строго опадајућа фја

$$\Rightarrow \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$ јесте непрекидна.

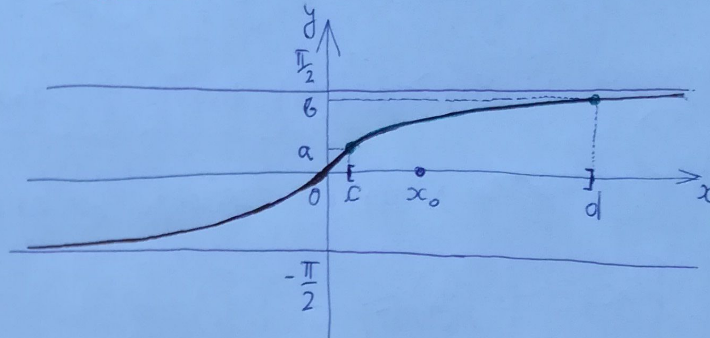
3) Докажимо и да је $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ непрекидна фја.

Ни домен ни кодомен овде нису сегменти, па не може као у претходна два примера. Овде ћемо доказати да је arctg непрекидна у свакој тачки домена.

$x_0 \in \mathbb{R}$? arctg је непрекидна у т. x_0 ?

Одаберимо (на произвољан начин) $c < x_0$ и $d > x_0$.

$a := \operatorname{arctg} c$, $b := \operatorname{arctg} d$



$\operatorname{tg}|_{[a,b]} : [a,b] \to [c,d]$

непрекидна, строго растућа фја

$\Longrightarrow \operatorname{arctg}|_{[c,d]} = \left(\operatorname{tg}|_{[a,b]}\right)^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ јесте непрекидна

$\Longrightarrow$ arctg је непрекидна у т. x_0.

4) На сличан начин се покаже и да је $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ непрекидна фја.

Прошле среде смо показали да су константне, експоненцијалне, логаритамске фје, као и синус и косинус, непрекидне, а данас смо то утврдили за тангенс, котангенс, за степене, а ево сад и за инверзне тригонометријске фје. Дакле, све основне елементарне фје јесу непрекидне. Данас смо још доказали и да су збир, разлика, производ, количник, као и композиција непрекидних такође непрекидни, па закључујемо да важи и сл. теорема.

$\boxed{\text{Теорема:}}$ Свака елементарна функција јесте непрекидна.