13. V 2020.

Прошли пут смо разматрали Тејлорову формулу:

$$\boxed{f(x) = T_n(a)(x) + R_n(a)(x).}$$

Тачније, навели смо један, Лагранжов облик остатка $R_n(a)(x)$, а сад наводимо још један – Пеанов. Њега ћемо лако добити из наредне леме.

Лема: Ако је функција φ n пута диференцијабилна у тачки a и ако је $\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0$, онда је

$$\boxed{\varphi(x) = o\left((x-a)^n\right), \quad x \to a.}$$

Δ: Доказ је индукцијом по n.

База индукције: $n=1$

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} \underset{\varphi(a)=0}{=} \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a) = 0 \implies \varphi(x) = o(x-a),\ x\to a$$

✓

Индуктивни корак: $n \geq 2$, прет. да је тврђење тачно за $n-1$

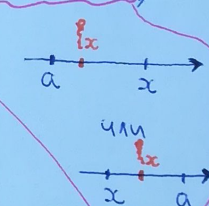
Индуктивну хипотезу примењујемо на фју φ'. То можемо јер је

$$\varphi'(a) = (\varphi')'(a) = \dots = (\varphi')^{(n-1)}(a) = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi'(x) = o\left((x-a)^{n-1}\right),\ x \to a, \ \text{тј.} \ \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Треба да докажемо да је $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Како је φ n пута диференцијабилна у т. a, то постоји околина $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ тачке a на којој је дефинисан $\varphi^{(n-1)}$. Фиксирајмо (привремено) једно $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $x \neq a$. На основу Лагранжове теореме о средњој вредности, можемо одабрати ξ_x строго између a и x ($\xi_x \in (a,x)$ ако је $x>a$, односно $\xi_x \in (x,a)$ ако је $x<a$) тако да важи $\varphi(x)-\varphi(a) = \varphi'(\xi_x)(x-a)$.



$$\Longrightarrow \quad \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} \underset{\varphi(a)=0}{=} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi'(\xi_x)(x-a)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi'(\xi_x)}{(x-a)^{n-1}} \qquad (*)$$

$$0 \le \left|\frac{\varphi'(\xi_x)}{(x-a)^{n-1}}\right| = \frac{|\varphi'(\xi_x)|}{|x-a|^{n-1}} \le \frac{|\varphi'(\xi_x)|}{|\xi_x-a|^{n-1}} = \left|\frac{\varphi'(\xi_x)}{(\xi_x-a)^{n-1}}\right|$$

$\to 0$ $(x \to a)$

$$\boxed{0 < |\xi_x - a| < |x-a|} \quad \to 0 \ (x \to a)$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(\xi_x)}{(\xi_x-a)^{n-1}} = \lim_{t \to a} \frac{\varphi'(t)}{(t-a)^{n-1}} = 0}$$

смена: $t = \xi_x \longrightarrow a$ кад $x \to a$

Теореме о смени променљиве у лимесу (в. стр. $\boxed{10}$)

Како је $\xi_x \neq a$ за све $x \neq a$, испуњен је услов (2) из предавања од 1.IV).

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(\xi_x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \quad ✓ \quad ■$$

Теорема: (Пеанов облик остатка) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је функција f n пута диференцијабилна у тачки a. Тада је

$$\boxed{R_n(a)(x) = o\left((x-a)^n\right),\ x \to a.}$$

Δ: $R_n(a)(x) = f(x) - T_n(a)(x)$, тј. $R_n(a) = f - T_n(a)$

n пута диференцијабилна у тачки a

бесконачно диференцијабилна у свим тачкама из $\mathbb{R}$ (јер је то полином)

$\Longrightarrow$ $R_n(a)$ је n пута диференц. у т. a,

$R_n(a)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - T_n(a)^{(k)}(a) = 0$ за све $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

в. (ИЗВ) на стр. $\boxed{7}$ прошлог предавања

$$\xRightarrow{\text{лема}} \quad R_n(a)(x) = o\left((x-a)^n\right),\ x \to a. \quad ✓ \quad ■$$

Да би Тејлоров полином $T_n(a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ био дефинисан, функција f мора бити n пута диференцијабилна у тачки a. Дакле, остатак у Тејлоровој формули увек можемо записати у овом Пеановом облику. Да би се остатак, пак, могао записати у Лагранжовом облику потребан нам је мало јачи услов – да је f $n+1$ пута диференцијабилна на некој околини тачке a.

$$\underline{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x\to a}$$

Тејлорова формула са остатком у Пеановом облику

Кад је $a=0$ добијамо:

$$\underline{f(x) = \overbrace{f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}^{=M_n(x)} + o(x^n),\ x\to 0.}$$

Маклоренова формула са остатком у Пеановом облику

Све функције које смо разматрали у оних пет примера од прошли пут (на стр. $\boxed{9}$ – $\boxed{12}$) јесу бесконачно диференцијабилне у нули, па имамо да наредне Маклоренове формуле са остацима у Пеановом облику важе за све $n\in\mathbb{N}$:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x\to 0;$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),\ x\to 0;$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x\to 0;$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n),\ x\to 0;$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x\to 0.$

Сетимо се да смо формуле 1), 4) и 5) за $n=1$ већ установили (на стр. $\boxed{6}$ и $\boxed{7}$ предавања од 8. IV). Тамо смо имали и формулу $\sin x = x + o(x),\ x\to 0$, али сад из формуле 2) за

$n=1$ видимо да важи и $\sin x = x + o(x^2)$, $x \to 0$, што је боља процена грешке (остатка).

$o((8x)^2) = o(64x^2) = o(x^2),\ x\to 0$

Примери: 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \underbrace{8x}_{\to 0}}{e^{\overbrace{2x}^{\to 0}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{8x + o(x^2)}{\cancel{1} + 2x - \cancel{1} + o(x)} \quad \begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix}$$

развоји (формуле) 1) и 2)

$\boxed{\text{за } n=1}$

$o(2x) = o(x),\ x\to 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8 + \underbrace{o(x)}_{\to 0}}{2 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}} = 4.$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^{\alpha} x}{\ln(1 + \underbrace{x^2}_{\to 0})} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \Big(1 \overbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^3)}^{\to 0}\Big)^{\alpha}}{x^2 + o(x^2)}$$

развоји 3) и 5)

$\boxed{\text{за } n=1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \Big(1 + \alpha \cdot \big(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\big) + o\big(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\big)\Big)}{x^2 + o(x^2)}$$

развој 4) (биномни развој)

$\boxed{\text{за } n=1}$

сви остали сабирци су $o(x^2)$

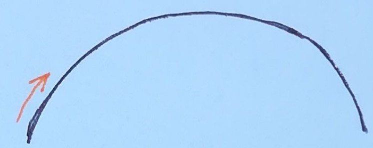
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\alpha}{2} x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \quad \begin{matrix} /:x^2 \\ /:x^2 \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\alpha}{2} + \underbrace{o(1)}_{\to 0}}{1 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}} = \frac{\alpha}{2}.$$

Конвексност и конкавност функција

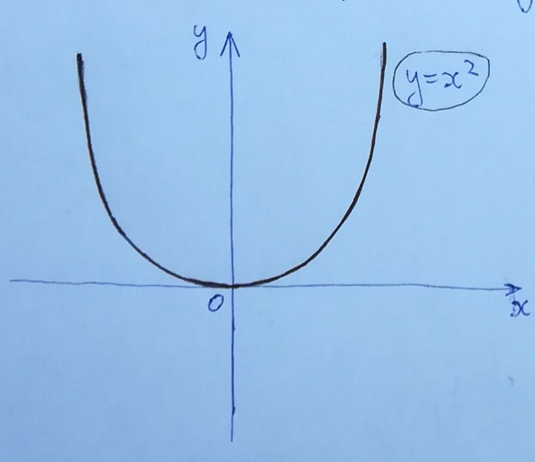
Пре формалне дефиниције конвексности и конкавности дајемо један неформалан опис ових појмова. Замислимо да возимо бицикл по путањи у равни одређеној графиком дате функције. Ако све време скрећемо улево, та функција је конвексна (подразумевамо да се крећемо у смеру слева на десно).

конвексна

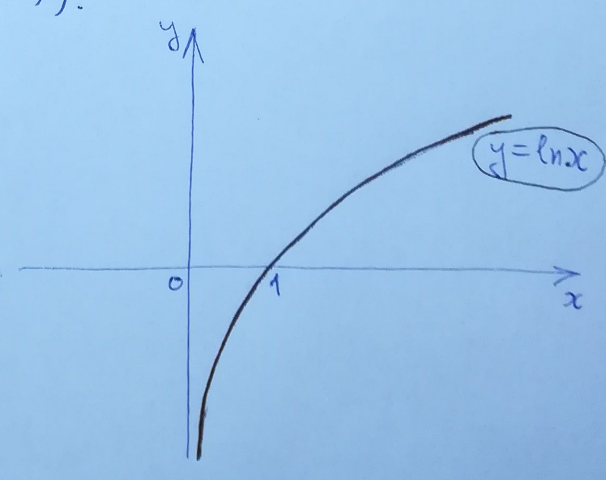


конкавна

Ако, пак, све време скрећемо удесно, функција је конкавна. На пример, функција $y = x^2$ јесте конвексна (на свом домену $\mathbb{R}$), док је функција $y = \ln x$ конкавна (на свом домену $(0, +\infty)$).



конвексна



конкавна

Ево и строге, формалне дефиниције ових појмова.

Дефиниција: Нека је функција f дефинисана на интервалу I $(I \subseteq D_f)$.

- f је <u>конвексна</u> <u>на I</u> ако за сваке две тачке $a, b \in I$ т. д. је $a < b$ и свако $t \in (0,1)$ важи

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b);$$

- f је <u>строго конвексна</u> <u>на I</u> ако — || —

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + t f(b);$$

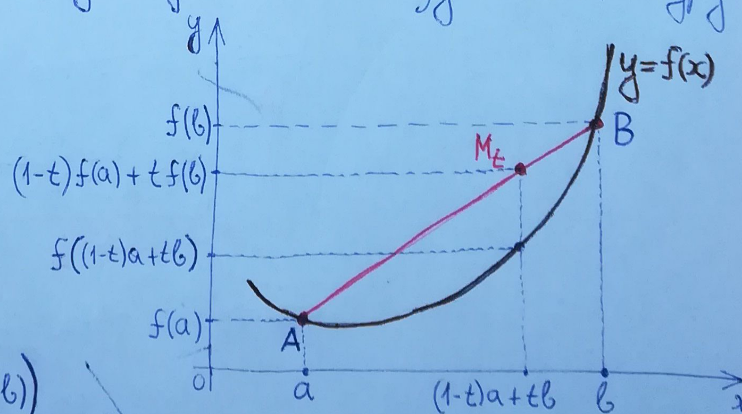
- f је <u>конкавна</u> <u>на I</u> ако — || —

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + t f(b);$$

- f је <u>строго конкавна</u> <u>на I</u> ако — || —

$$f((1-t)a + tb) > (1-t)f(a) + t f(b).$$

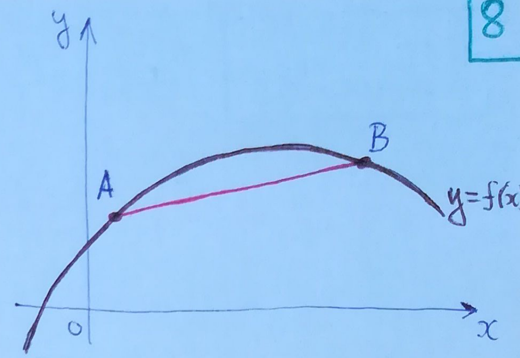
Како t иде од 0 ка 1, тачка $(1-t)a + tb$ иде од a ка b, па је $f((1-t)a + tb)$ вредност фје f у тој тачки између a и b. С друге стране, $(1-t)f(a) + t f(b)$ јесте одговарајућа тачка (на y-оси) између $f(a)$ и $f(b)$, па како t иде од 0 ка 1, тачка $M_t((1-t)a + tb, (1-t)f(a) + t f(b))$ креће се по дужи од тачке $A(a, f(a))$



(строго) конвексна функција

до тачке $B(b, f(b))$. Зато услов (строге) конвексности у ствари каже да се график фје f између тачака A и B налази испод дужи AB.

Слично, услов (строге) конкавности значи да се за сваке две тачке A и B са графика функције део тог графика између те две тачке налази изнад дужи AB.



(строго) конкавна функција

Сваком броју $t \in (0,1)$ одговара, дакле, (јединствена) тачка $x = (1-t)a + tb \in (a,b)$. Али и обратно, свакој тачки $x \in (a,b)$ одговара (јединствен) број $\frac{x-a}{b-a} \in (0,1)$, при чему је

$$\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a}b = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b = x.$$

Зато важи прва у наредном низу еквиваленција:

f је конвексна на I $\iff$ За сваке две тачке $a,b \in I$ т.д. је $a<b$ и свако $x \in (a,b)$ важи

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

$\iff$ За сваке три тачке $a,x,b \in I$ т.д. је $a<x<b$:

$$\underbrace{\left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a}\right)}_{1} f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

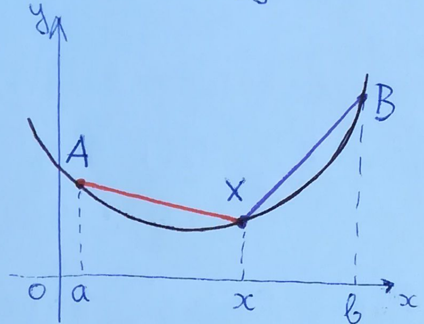
$\iff$ За сваке три тачке $a,x,b \in I$ т.д. је $a<x<b$:

$$\frac{b-x}{b-a}\left(f(x)-f(a)\right) \leq \frac{x-a}{b-a}\left(f(b)-f(x)\right). \quad / \cdot \frac{b-a}{(x-a)(b-x)}$$

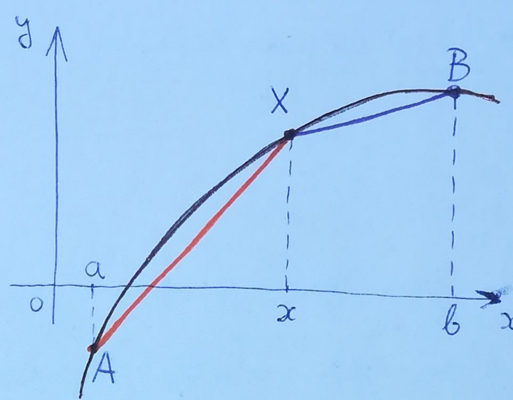
$\iff$ За сваке три тачке $a,x,b \in I$ т.д. је $a<x<b$:

$$\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}}$$

Међутим, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ јесте коефицијент правца (нагиб) праве која пролази кроз тачке $A(a, f(a))$ и $X(x, f(x))$, док је $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$ коефицијент правца (нагиб) праве кроз тачке $X(x, f(x))$ и $B(b, f(b))$. Претходни низ еквиваленција нам онда даје још једну графичку интерпретацију конвексности.



конвексност
(нагиб дужи AX је мањи од нагиба дужи XB)



конкавност
(нагиб дужи AX је већи од нагиба дужи XB)

Наравно, постоји и одговарајућа интерпретација конкавности. У наредној леми све то лепо формулишемо. Прва еквиваленција у леми је доказана на претходној страни, а преостале три се доказују на буквално исти начин (само се знак неједнакости $\leq$ на сва четири места на претходној страни замени са $<$, $\geq$, односно $>$).

Лема: Нека је функција f дефинисана на интервалу I. Тада:

- f је конвексна на I $\iff$ за сваке три тачке $a, x, b \in I$ т.д. је $a < x < b$ важи

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \, ;$$

- f је строго конвексна на I $\iff$ — || —

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x};$$

- f је конкавна на I $\iff$ — || —

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x};$$

- f је строго конкавна на I $\iff$ — || —

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Помоћу ове леме можемо доказати наредну важну теорему, која успоставља везу између другог извода дате функције и њене конвексности/конкавности.

Теорема: Нека је функција f непрекидна на интервалу I и два пута диференцијабилна на његовој унутрашњости $\mathring{I}$.

(а) Ако је $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) > 0)$ за све $x \in \mathring{I}$, онда је f конвексна (строго конвексна) на I.

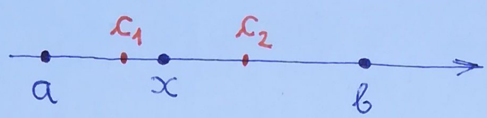
(б) Ако је $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) < 0)$ за све $x \in \mathring{I}$, онда је f конкавна (строго конкавна) на I.

Δ: Нека су $a, x, b \in I$ т.д. је $a < x < b$. На основу леме, довољно је да докажемо да у овој кућици стоји одговарајући знак неједнакости.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \boxed{?} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

Према Лагранжовој теореми о средњој вредности, постоје $c_1 \in (a,x)$ и $c_2 \in (x,b)$ такви да је

$$f'(c_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{и} \quad f'(c_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \qquad (**)$$



$\Rightarrow \; c_1 < c_2$

Треба, дакле, да упоредимо $f'(c_1)$ и $f'(c_2)$.

(а) $(\forall x \in \mathring{I})\ (f')'(x) \geq 0$ $(>)$ $\Longrightarrow$ f' је растућа функција на $\mathring{I}$ (строго растућа)

$\Longrightarrow f'(c_1) \leq f'(c_2)$ $(<)$

$\xRightarrow[(**)]{\text{лема}}$ f је конвексна на I. (строго конвексна)

последица на стр. $\boxed{13}$ предавања од 29. IV

(б) $(\forall x \in \mathring{I})\ (f')'(x) \leq 0$ $(<)$ $\Longrightarrow$ f' је опадајућа ф-ја на $\mathring{I}$ (строго опадајућа)

$\Longrightarrow f'(c_1) \geq f'(c_2)$ $(>)$

$\xRightarrow[(**)]{\text{лема}}$ f је конкавна на I. (строго конкавна)

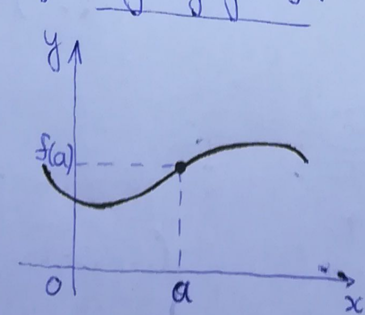
<u>Примери</u>: Доказимо сад формално да је фја $f(x)=x^2$ конвексна на $D_f=\mathbb{R}$, односно, да је фја $g(x)=\ln x$ конкавна на $D_g=(0,+\infty)$ (в. стр. $\boxed{6}$):

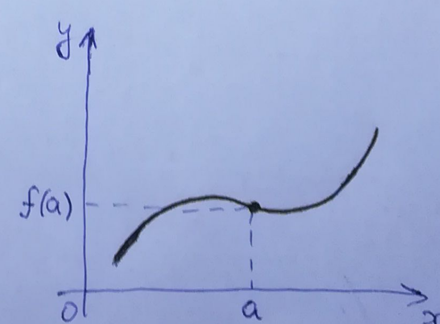
$f'(x)=2x$, $f''(x)=2>0$ за све $x\in\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f је строго конвексна на $\mathbb{R}$. ✓✓

$g'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ за све $x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ g је строго конкавна на $(0,+\infty)$. ✓✓

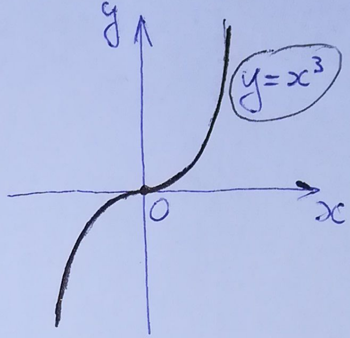
Наравно, једна иста функција може бити конвексна на једном интервалу, а конкавна на неком другом. У вези с тим је и појам који уводимо наредном дефиницијом.

Дефиниција: Нека је функција f дефинисана на околини $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ тачке a и нека важи да је f непрекидна у тачки a. Ако је f строго конвексна на $(a-\varepsilon, a)$, а строго конкавна на $(a, a+\varepsilon)$, или обрнуто, онда се тачка a (тачка $(a, f(a))$) назива <u>превојном тачком</u> (<u>графика</u>) <u>функције f</u>.





У оној причи о вожњи бицикла, овде је ситуација да нпр. скрећемо улево, онда полако исправљамо волан, па почињемо да скрећемо удесно. У моменту кад волан стоји право налазимо се у превојној тачки.



Пример: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$

$f''(x)<0$ за $x\in(-\infty,0)$ $\Rightarrow$ f је строго конкавна на $(-\infty,0)$

$f''(x)>0$ за $x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ f је строго конвексна на $(0,+\infty)$

Знамо да је f непрекидна (у свим тачкама), па је непрекидна и у нули.

$\Rightarrow$ 0 је превојна тачка ове функције.