8. IV 2020.

Асимптотске релације, асимптоте

Дефиниција: Нека су f и g две функције и $a \in (D_f \cap D_g)'$.
Кажемо да је f бесконачна мала у односу на g кад $x \to a$, и пишемо

$$\boxed{f(x) = o(g(x)), \quad x \to a,} \quad (*)$$

ако постоји околина $U \in \mathcal{N}(a)$ и фја α (дефинисана на $D_f \cap D_g \cap U \setminus \{a\}$) тако да је

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = \alpha(x) g(x) \text{ за све } x \in D_f \cap D_g \cap U \setminus \{a\}$$

Исказ $(*)$ читамо „$f(x)$ је мало о од $g(x)$ кад $x \to a$". Просто, речено, то значи да је $f(x)$ једнако нешто што тежи нули кад $x \to a$ пута $g(x)$.

Ако је $g \neq 0$ на некој околини тачке a (прецизније, ако постоји $V \in \mathcal{N}(a)$ т. д. је $g(x) \neq 0$ за све $x \in D_g \cap V \setminus \{a\}$), приметимо да онда важи еквиваленција:

$$\boxed{f(x) = o(g(x)), x \to a \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.}$$

Наиме, у том случају је $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (за све $x \in D_f \cap D_g \cap U \cap V \setminus \{a\}$).

Посебно, $\boxed{f(x) = o(1), x \to a \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0.}$

Функције f за које важи $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ (тј. $f(x)=o(1)$, $x\to a$) називамо <u>бесконачно малим</u> <u>кад $x\to a$</u>.

<u>Примери:</u> 1) $x^3=o(x^2)$, $x\to 0$ (јер је $x^3=\underbrace{x}_{\to 0}\cdot x^2$)

2) $x^2=o(x^3)$, $x\to+\infty$ (јер је $x^2=\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\cdot x^3$)

3) $\frac{\sin x}{x}-1=o(1)$, $x\to 0$ (јер је $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=0$)

4) $\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}=o(1)$, $x\to+\infty$ (јер је $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right)=0$)

Радићемо и са оваквим једнакостима:

$$\boxed{o(x^4)=o(x^2),\ x\to 0.} \quad (1)$$

Шта сад ово значи? Ову „једнакост", као и уопште сваку „једнакост" у којој фигурише мало o, нећемо третирати као једнакост у правом смислу речи, већ као импликацију: „ако је нека функција облика $o(x^4)$ кад $x\to 0$, онда је та фја облика $o(x^2)$ кад $x\to 0$". И уопште (за произвољну „једнакост" с малим o): „ако је нека функција облика на левој страни те „једнакости", онда је та функција облика на десној страни. Докажимо да важи (1):

Претпоставимо да је $f(x)=o(x^4)$, $x\to 0$. То значи да је $f(x)=\alpha(x)\cdot x^4$, при чему је $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$. Међутим, онда је $f(x)=\underbrace{\alpha(x)\cdot x^2}_{\to 0}\cdot x^2$, па је $f(x)=o(x^2)$, $x\to 0$.

Да (1) није једнакост у правом смислу речи најбоље се види по томе што не можемо да заменимо места левој и десној страни. Заправо, реч је о томе да не важи обрнута импликација:

$$o(x^2) \not\Leftarrow o(x^4), \; x \to 0.$$

На пример, за функцију $f(x) = x^3$ важи да је $x^3 = o(x^2), x \to 0$, али $x^3 \neq o(x^4), x \to 0$ (јер $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4} \neq 0$).

И уопште, у „једнакостима" с малим o морамо увек имати на уму да је реч заправо о импликацији. С тим у вези, сабирак који садржи мало o не смемо пребацивати с једне стране „једнакости" на другу. Ипак, сабирке који не садрже мало o можемо пребацивати с једне на другу страну. На пример, у примеру 3) на претходној страни имали смо $\frac{\sin x}{x} - 1 = o(1), x \to 0$. То је еквивалентно са $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1), x \to 0$, али $\frac{\sin x}{x} - 1 - o(1) \cancel{=} 0, \; x \to 0$!

Слично, пример 4) можемо и овако записати: $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + o(1), x \to +\infty$.

У следећем ставу доказујемо неке једнакости (заправо, импликације) с малим o.

$\boxed{\text{Став:}}$ (а) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x)), \; x \to a$;

(б) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)), \; x \to a$;

(в) $o(o(f(x))) = o(f(x)), \; x \to a$.

Д: (а) Ако нека ф-ја има облик на левој страни једнакости ($f(x)\cdot o(g(x))$), она се може записати у облику

$$f(x)\cdot\alpha(x)\cdot g(x), \quad \text{при чему је } \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Али,

$$f(x)\cdot\alpha(x)\cdot g(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\to 0}\cdot f(x)g(x) = o\big(f(x)g(x)\big),\ x\to a,$$

па одмах видимо да та ф-ја има облик на десној страни једнакости.

(б) $$\underbrace{\alpha(x)}_{\to 0}\cdot f(x) + \underbrace{\beta(x)}_{\to 0}\cdot f(x) = \underbrace{\big(\alpha(x)+\beta(x)\big)}_{\to 0}\cdot f(x) = o\big(f(x)\big),\ x\to a$$

(в) $$\underbrace{\alpha(x)}_{\to 0}\cdot\big(\underbrace{\beta(x)}_{\to 0}\cdot f(x)\big) = \underbrace{\big(\alpha(x)\cdot\beta(x)\big)}_{\to 0}\cdot f(x) = o\big(f(x)\big),\ x\to a.$$

Пример: На основу дела (а) овог става, кад једнакост $\frac{\sin x}{x} = 1+o(1), x\to 0$ помножимо са x, добијамо

$$\sin x = x + o(x),\ x\to 0.$$

Дефиниција: Нека су f и g две функције и $a\in(D_f\cap D_g)'$. Кажемо да је f асимптотски еквивалентна са g кад $x\to a$, и пишемо

$$\boxed{f(x)\sim g(x),\ x\to a,}$$

ако постоји околина $U\in\mathcal{N}(a)$ и ф-ја γ (дефинисана на $D_f\cap D_g\cap U\setminus\{a\}$) тако да је

$\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=1$ и $f(x)=\gamma(x)g(x)$ за све $x\in D_f\cap D_g\cap U\setminus\{a\}$.

Дакле, $f(x) \sim g(x),\ x \to a$ значи да је $f(x)$ облика нешто што тежи јединици кад $x \to a$ пута $g(x)$.

Ако је $g \neq 0$ на некој околини тачке a (прецизније, ако постоји $V \in \mathcal{N}(a)$ т. д. је $g(x) \neq 0$ за све $x \in D_g \cap V \setminus \{a\}$), онда важи еквиваленција:

$$\boxed{f(x) \sim g(x),\ x \to a \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}.$$

Примери:

1) $\sin x \sim x,\ x \to 0$ (јер је $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

2) $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$ (јер је $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)

3) $x^2 + x - 5 \sim x^2,\ x \to +\infty$ (јер је $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-5}{x^2} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = 1$)

Став: Асимптотска еквиваленција кад $x \to a$ јесте релација еквиваленције на скупу свих функција дефинисаних на некој околини тачке a (без саме те тачке).

Δ: Треба да докажемо да је ова релација рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Рефлексивност: ? $\boxed{f(x) \sim f(x),\ x \to a}$?

$$f(x) = 1 \cdot f(x) \implies f(x) \sim f(x),\ x \to a.$$

Симетричност: $\boxed{f(x) \sim g(x),\ x \to a \overset{?}{\implies} g(x) \sim f(x),\ x \to a}$

$$f(x) \sim g(x),\ x \to a \implies f(x) = \underbrace{\gamma(x)}_{\to 1} \cdot g(x) \implies g(x) = \frac{1}{\gamma(x)} f(x) \implies g(x) \sim f(x),\ x \to a$$

Транзитивност: $\boxed{f(x)\sim g(x),\ x\to a;\ g(x)\sim h(x),\ x\to a \overset{?}{\Longrightarrow} f(x)\sim h(x),\ x\to a}$

$$f(x)=\underbrace{\gamma(x)}_{\to 1}\cdot g(x)\ ,\quad g(x)=\underbrace{\delta(x)}_{\to 1}\cdot h(x) \Longrightarrow f(x)=\underbrace{\gamma(x)\delta(x)}_{\to 1}\,h(x)$$

$$\Longrightarrow f(x)\sim h(x),\ x\to a. \quad \blacksquare$$

У следећем ставу установљавамо основну везу између малог o и релације $\sim$.

Став: $\boxed{f(x)\sim g(x),\ x\to a \iff f(x)=g(x)+o(g(x)),\ x\to a.}$

Δ: $f(x)\sim g(x),\ x\to a \iff f(x)=\underbrace{\gamma(x)}_{\to 1}\cdot g(x)$

$\alpha(x):=\gamma(x)-1$

$\gamma(x):=1+\alpha(x)$

$$\iff f(x)=g(x)+\underbrace{\alpha(x)}_{\to 0}\cdot g(x)$$

$$\iff f(x)=g(x)+o(g(x)),\ x\to a. \quad \blacksquare$$

Примери: 1) Из примера 1) на претходном листу и овог става имамо да је

$$\sin x = x+o(x),\ x\to 0.$$

(Ову једнакост смо већ установили на страни $\boxed{4}$.)

2) Из примера 2) на претходном листу имамо $e^x-1=x+o(x)$, $x\to 0$, тј.

$$e^x=1+x+o(x),\ x\to 0.$$

3) Знамо и да је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, тј. $\ln(1+x)\sim x,\ x\to 0$, па је

$$\ln(1+x)=x+o(x),\ x\to 0.$$

4) Ако је $\alpha \in \mathbb{R}$, онда је

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \to 0.$$

Образложење (доказ) ове једнакости нек остане за домаћи. Кад лепо научите и разумете све асимптотске релације, овај доказ би требало да иде без потешкоћа.

Напоменимо још да се све асимптотске релације (мало o и $\sim$) на исти начин дефинишу и за једностране лимесе (кад $x \to a+$ или $x \to a-$). Сва тврђења која смо навели преносе се (са истим доказима) и на тај случај.

Дефиниција: Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини тачке $+\infty$ ($(M, +\infty) \subseteq D_f$ за неко $M \in \mathbb{R}$). Кажемо да је права $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) асимптота ф-је f кад $x \to +\infty$ ако је

$$\boxed{f(x) = ax + b + o(1), \quad x \to +\infty.}$$

У случају $a = 0$ реч је о хоризонталној асимптоти, а у случају $a \neq 0$ о косој асимптоти.

Слично се дефинише асимптота функције кад $x \to -\infty$.

Став: Права $y = ax + b$ је асимптота ф-је f кад $x \to +\infty$ (кад $x \to -\infty$) акко је

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \big(f(x) - ax\big) = b.$$

Δ: $\Rightarrow$) Претпоставимо, дакле, да је

$$f(x) = ax + b + o(1), \quad \begin{matrix} x \to +\infty \\ (x \to -\infty) \end{matrix} \quad \Big/ : x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = a + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}, \quad \begin{matrix} x \to +\infty \\ (x \to -\infty) \end{matrix} \quad \Big/ \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = a.$$

$$f(x) - ax = b + \underbrace{o(1)}_{\to 0}, \quad \begin{matrix} x \to +\infty \\ (x \to -\infty) \end{matrix} \quad \Big/ \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - ax\right) = b.$$

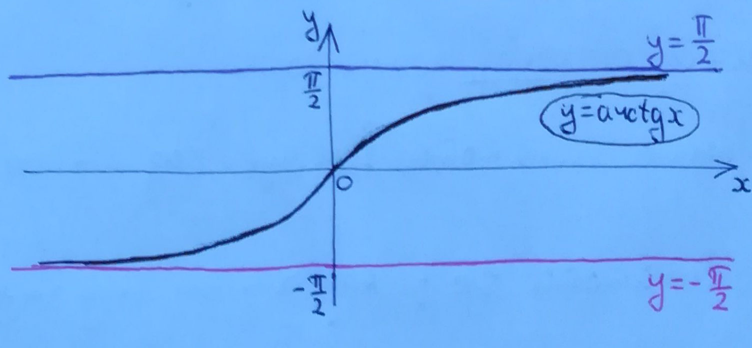
✓

$\Leftarrow$) Сад за претпоставку имамо да је $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - ax\right) = b$.

$$\Rightarrow \quad f(x) - ax = b + o(1), \quad \begin{matrix} x \to +\infty \\ (x \to -\infty) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(x) = ax + b + o(1), \quad \begin{matrix} x \to +\infty \\ (x \to -\infty) \end{matrix}$$

✓ ∎

Примери: 1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + o(1), \ x \to +\infty$ $\Rightarrow$ Права $y = \frac{\pi}{2}$ је хоризонтална асимптота фје arctg кад $x \to +\infty$.



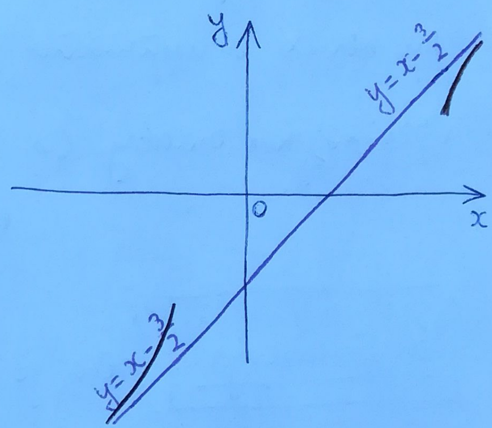
$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, тј. $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} + o(1), \ x \to -\infty$ $\Rightarrow$ Права $y = -\frac{\pi}{2}$ је хоризонтална асимптота фје arctg кад $x \to -\infty$.

2) $f(x)=\dfrac{2x^3-2x^2-3x-5}{2x^2+x}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-2x^2-3x-5}{2x^3+x^2}\begin{matrix}/:x^3\\/:x^3\end{matrix}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\underset{\to 0}{\frac{2}{x}}-\underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}-\underset{\to 0}{\frac{5}{x^3}}}{2+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}}=1$$

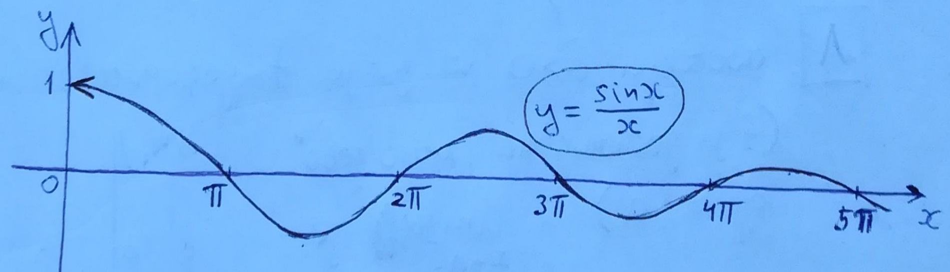
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{2x^3}-2x^2-3x-5-\cancel{2x^3}-x^2}{2x^2+x}=\dots=-\frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow$ Права $y=x-\frac{3}{2}$ jeсте $\overbrace{\text{асимптота}}^{\text{коса}}$ функције f и кад $x\to+\infty$ и кад $x\to-\infty$



3) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\cdot\underbrace{\sin x}_{\text{ограничена функција}}=0\quad,\ \text{тј. } \frac{\sin x}{x}=o(1),\ x\to+\infty$$

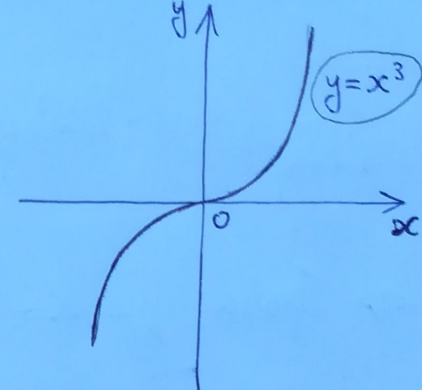
$\Rightarrow$ Права $y=0$ (x-оса) jeсте хоризонтална асимптота функције $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ кад $x\to+\infty$.



На исти начин се добија да је x-оса хоризонтална асимптота ове функције и кад $x\to-\infty$. То следи и из чињенице да је ова функција парна, па њен график поред овог дела који смо нацртали садржи и део симетричан овом у односу на y-осу.

У овом примеру видимо да график функције може сећи асимптоту – чак и у бесконачно много тачака!

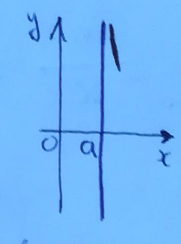
4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x}=+\infty$



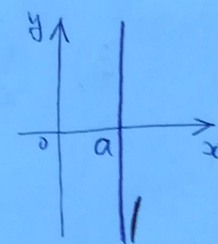
$\Longrightarrow$ Функција $f(x)=x^3$ нема ни хоризонталних ни косих асимптота (кад би имала, према претходном ставу би $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}$ био коначан).

Дефиниција: Нека је f функција и $a\in\mathbb{R}$. Ако важи бар један од наредна два услова:

$\boxed{Д}$ Постоји $\delta>0$ т.д. је f дефинисана на $(a,a+\delta)$ (f је дефинисана „мало десно" од т. a) и $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ је бесконачан;

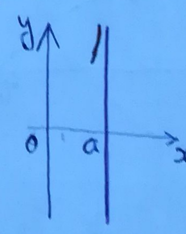


$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=+\infty$

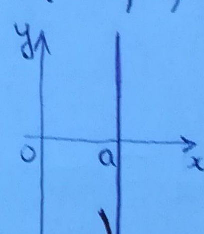


$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=-\infty$

$\boxed{Л}$ постоји $\delta>0$ т.д. је f дефинисана на $(a-\delta,a)$ (f је дефинисана „мало лево" од т. a) и $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ је бесконачан;



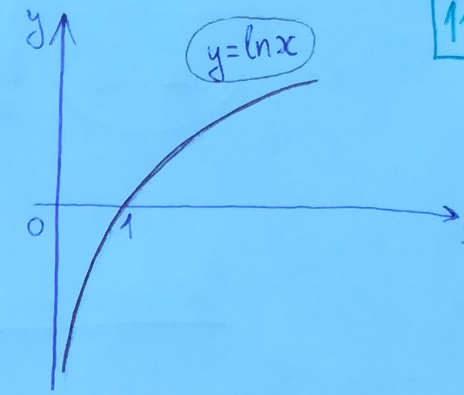
$\lim\limits_{x\to a-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a-} f(x)=-\infty$

онда се права $x=a$ назива **вертикалном асимптотом** фје f.

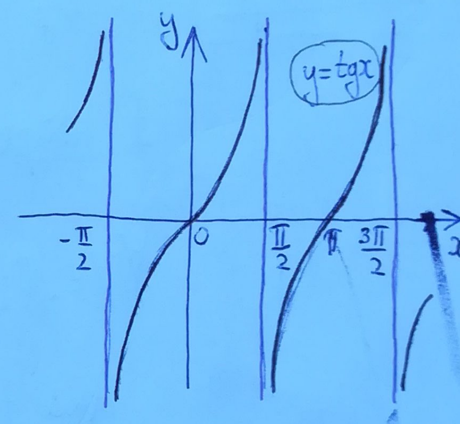
Примери: 1) $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$



$\Rightarrow$ Права $x=0$ (y-оса) јесте вертикална асимптота функције $\ln$.

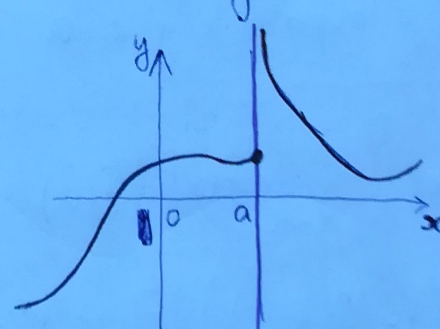
2) За свако $k\in\mathbb{Z}$, права $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ јесте вертикална асимптота функције tg. На пример, за $k=0$ имамо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \mathrm{tg}\, x = +\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \mathrm{tg}\, x = -\infty.$$



У овом примеру видимо да функција може имати и више вертикалних асимптота – чак и бесконачно много њих. Функција може имати највише једну асимптоту (хоризонталну или косу) кад $x\to+\infty$ и највише једну кад $x\to-\infty$. Зашто? Зашто, на пример, не може имати две косе асимптоте кад $x\to+\infty$?

Напоменимо још да график функције може имати заједничку тачку и са својом вертикалном асимптотом (један такав пример је дат на слици десно). Међутим,



за разлику од хоризонталне и косе, са датом својом вертикалном асимптотом график функције не може имати више од једне заједничке тачке. Зашто?

III.2. Непрекидност

Дефиниција непрекидности, тачке прекида

Дефиниција: $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Кажемо да је функција f **непрекидна у тачки a** ако

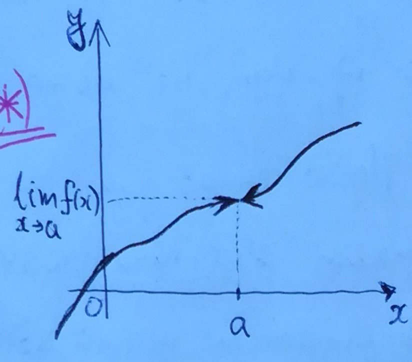
$$\big(\forall V \in \mathcal{N}(f(a))\big)\big(\exists U \in \mathcal{N}(a)\big)\ f(D_f \cap U) \subseteq V.$$

Ако f није непрекидна у тачки a, онда кажемо да је **прекидна у т. a** или да је a **тачка прекида ф-је f**.

Ф-ја f је **непрекидна** ако је непрекидна у свим тачкама свог домена D_f.

Ако је $a \in D_f \cap D_f'$, онда важи еквиваленција:

(*) $\boxed{f \text{ је непрекидна у т. } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$

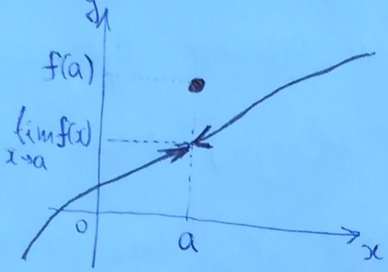


Наиме, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ значи да

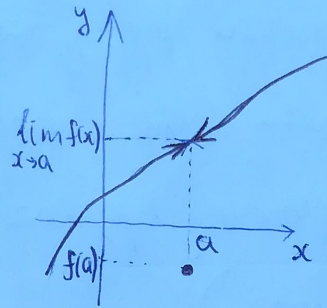
$$\big(\forall V \in \mathcal{N}(f(a))\big)\big(\exists U \in \mathcal{N}(a)\big)\ f(D_f \cap U \setminus \{a\}) \subseteq V.$$

Међутим, $f(a)$ свакако припада V (јер је V околина тачке $f(a)$), па је $f(D_f \cap U) \subseteq V$ еквивалентно са $f(D_f \cap U \setminus \{a\}) \subseteq V$. Знамо да $\lim_{x\to a} f(x)$ не зависи од вредности ф-је f у тачки a. Дакле, услов

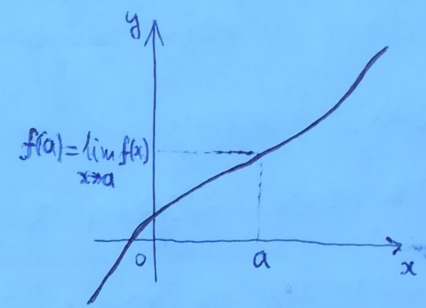
Непрекидност у тачки a јесте у ствари услов да се ове две вредности поклапају.



прекид у т. a

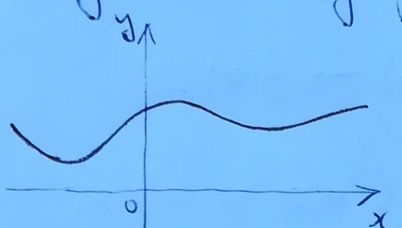


прекид у т. a

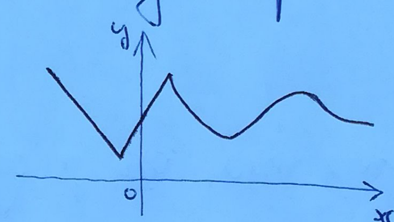


непрекидна

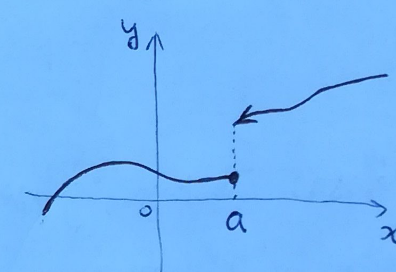
Зато можемо неформално окарактерисати непрекидност на следећи начин: ако је домен дате функције интервал (нпр. цео скуп $\mathbb{R}$), онда је она непрекидна ако се њен график може нацртати „у једном потезу" – без одвајања оловке од папира.



непрекидна



непрекидна



прекидна (у т. a)

Ако је $a \in D_f \setminus D_f'$, тј. ако је a из домена, али није тачка нагомилавања домена (тада се каже да је a изолована тачка скупа D_f), онда је f сигурно непрекидна у т. a. Наиме, тада постоји околина $U \in \mathcal{N}(a)$ таква да је $D_f \cap U = \{a\}$ (зашто?), па за произвољну околину $V \in \mathcal{N}(f(a))$ из дефиниције тражена околина тачке a може бити баш ова околина U.

У овом случају ($a \in D_f \setminus D_f'$) немамо еквиваленцију (*) (с претходне стране), јер $a \notin D_f'$, па нема смисла говорити о лимесу $\lim_{x\to a} f(x)$.

За непрекидност важи теорема аналогна Хајнеовој теореми за граничну вредност функције, па се и она зове Хајнеова. Она успоставља везу између непрекидности фје у тачки и граничне вредности низова. Доказује се на исти (чак и мало једноставнији) начин као и Хајнеова теорема за граничну вредност функције (коју смо доказали на последњем одржаном трочасу).

Теорема: (Хајне) $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_f \subseteq \mathbb{R}$.

f је непрекидна у тачки a $\Longleftrightarrow$ За сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елемената домена D_f ($x_n \in D_f$ за све $n \in \mathbb{N}$) т. д. $x_n \to a$ важи да $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

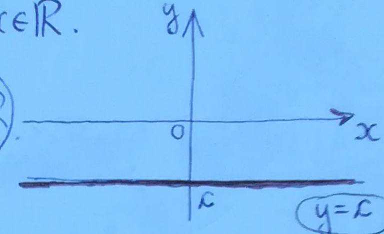
Доказ теореме, дакле, прескачемо, али је одлична вежба да се доказ поменуте теореме с последњег предавања модификује и да се добије доказ ове теореме.

Пре него што размотримо неке примере, напоменимо да се, слично као код граничне вредности, и у дефиницији непрекидности можемо ограничити на оне генеричке, симетричне околине, тј. на ε-околине тачке $f(a)$ и δ-околине тачке a:

f је непрекидна у т. a $\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)$ $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Примери: 1) Нека је $c\in\mathbb{R}$ фиксирана константа и $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ константна ф-ја, $f(x):=c$ за све $x\in\mathbb{R}$.

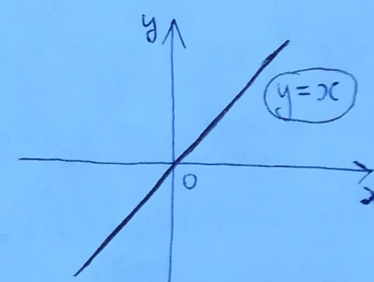
Докажимо да је f непрекидна (у т. $a\in\mathbb{R}$).



Ако је $\varepsilon>0$ произвољно за δ можемо узети било који позитиван број, нпр. $\delta:=1$.

$$|x-a|<1 \Rightarrow |f(x)-f(a)|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

2) Идентичка функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x$ за све $x\in\mathbb{R}$, јесте непрекидна.



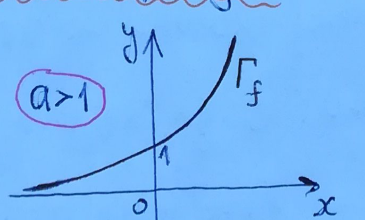
$a\in\mathbb{R}$ произв.

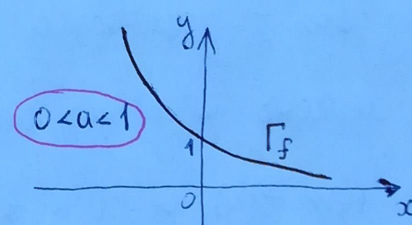
$\varepsilon>0$ произв.

$\delta:=\varepsilon$

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|=|x-a|<\delta=\varepsilon.$$

3) За $a>0$, $a\neq 1$, експоненцијална функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=a^x$, јесте непрекидна.



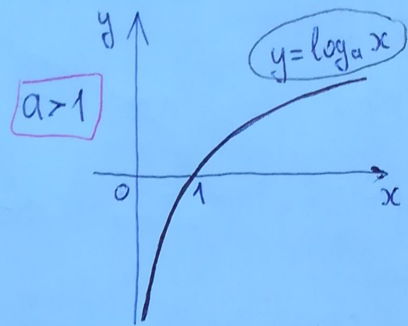


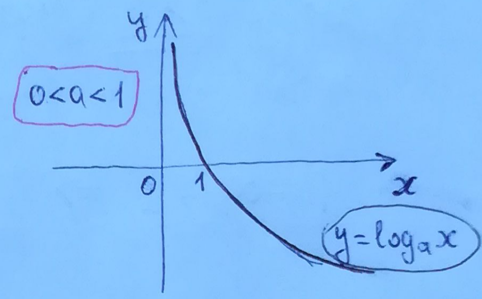
Наиме, пре две недеље (25. III), приликом увођења експоненцијалне функције, доказали смо да је за произвољно $x_0\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, односно $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, а на основу еквиваленције (*) то баш значи да је f непрекидна у т. x_0.

4) Такође, тада смо доказали и да за све $x_0 > 0$ важи

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

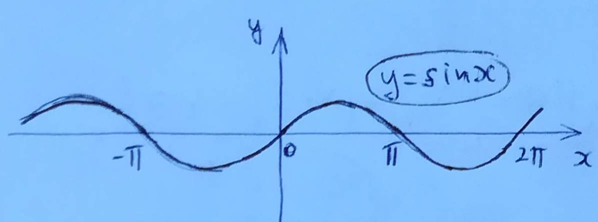
па закључујемо и да су све логаритамске функције непрекидне.

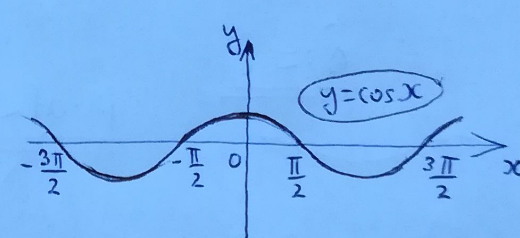




5) Прошли пут (1. IV) доказано је и да су синус и косинус непрекидне функције: за све $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \;, \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 .$$





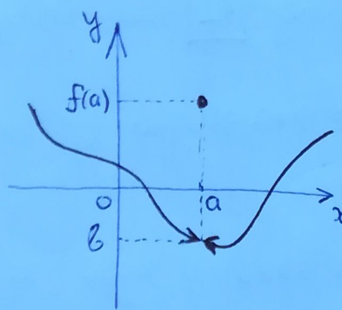
Нека је сад фја f дефинисана на некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$. Еквиваленцију (*) можемо и овако исказати: f је непрекидна у тачки a акко постоје $\lim_{x \to a-} f(x)$ и $\lim_{x \to a+} f(x)$ и важе једнакости:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

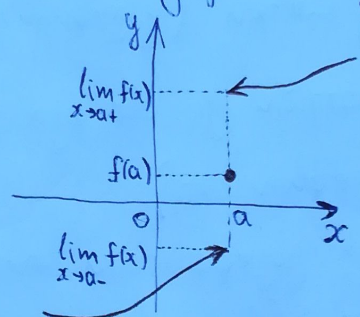
Дефиниција: Нека је ф-ја f дефинисана на некој околини тачке a и нека је a тачка прекида ф-је f.

Ако постоје коначни лимеси $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, онда се каже да f има прекид прве врсте у тачки a. Ако је још и $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, онда је у питању отклоњив прекид.

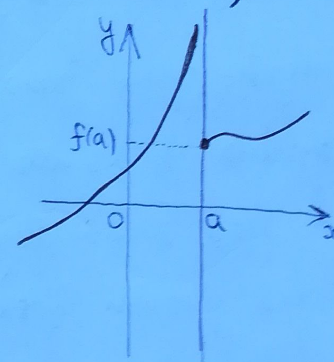
Прекид друге врсте је прекид који није прекид прве врсте (дакле, то је кад неки од лимеса $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ не постоји или кад је неки од њих бесконачан).



прекид прве врсте (отклоњив)



прекид прве врсте (неотклоњив)



прекид друге врсте

Зашто се отклоњив прекид (прве врсте) тако зове? Зато што се може „отклонити" просто тако што се промени вредност функције у тачки a. Прецизније, пошто је $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R}$, постоји коначан лимес $b := \lim\limits_{x\to a} f(x)$, па можемо да посматрамо (другу) ф-ју $\tilde{f} : D_f \to \mathbb{R}$ (са истим доменом D_f) дефинисану са:

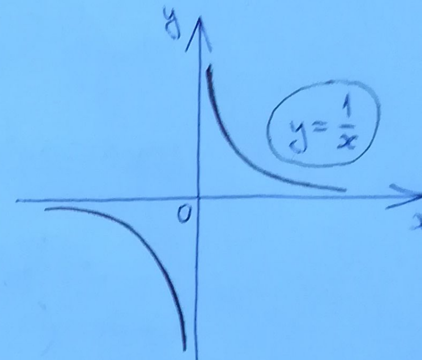
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D_f \setminus \{a\} \\ b, & x = a \end{cases}.$$

Дакле, $\tilde{F}$ се поклапа са f у свим тачкама осим у т. a. У тој тачки је, пак,

$$\tilde{F}(a) = b = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \tilde{F}(x),$$

па је $\tilde{F}$ непрекидна у т. a (прекид је „отклоњен").

Напомена 1: Нека је $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$.



0 није тачка прекида фје f !!!

Наиме, $0 \notin D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а да би фја имала прекид у некој тачки она мора бити дефинисана у тој тачки (у дефиницији на стр. $\boxed{12}$ стоји $a \in D_f$).

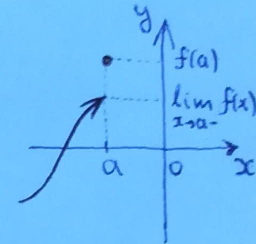
Следеће среде ћемо доказати да ова фја f јесте непрекидна (у свим тачкама у којима је дефинисана).

Ако бисмо ову фју додефинисали некако (ма како) у нули, ту бисмо добили прекид друге врсте.

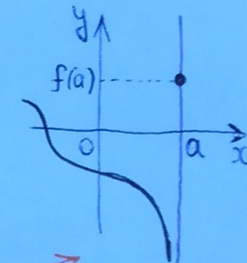
Како то да је ова фја непрекидна, а график се не може нацртати „у једном потезу" – без одвајања оловке од папира? Ствар је у томе што то важи ако је домен фје интервал, а $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ није интервал. Можемо рећи да се графички непрекидност види тако што се график рестрикције дате функције на било који интервал може нацртати „у једном потезу". На пример, график рестрикције фје $y = \frac{1}{x}$ на интервал $(-\infty, 0)$ јесте доњи део оне горе хиперболе, а на интервал $(0, +\infty)$ горњи део те хиперболе. А та два (дела) графика могу се нацртати „у једном потезу".

Напомена 2: Ако је $a \in D_f$ тачка прекида фје f, а f дефинисана „само лево" од тачке a (прецизније, постоји $\delta > 0$ т. д. је $(a-\delta, a] \subseteq D_f$ и $(a, a+\delta) \cap D_f = \emptyset$), онда се у претходној дефиницији (стр. 17) посматра само леви лимес:

прекид прве врсте (увек је отклоњив) $\iff$ $\exists$ коначан $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$



прекид друге врсте $\iff$ $\nexists \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$



Слично ако је f дефинисана „само десно" од тачке a.

Дефиниција: Кажемо да је фја f <u>непрекидна слева</u> <u>у тачки a</u> ако је

$$\boxed{\lim_{x \to a-} f(x) = f(a),}$$

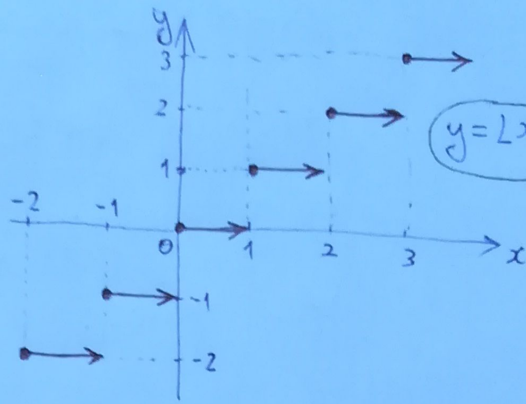
а да је <u>непрекидна здесна</u> у тој тачки ако је

$$\boxed{\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).}$$

Ако је f дефинисана на некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$, из ове дефиниције видимо да је f непрекидна у т. a акко је непрекидна и слева и здесна у тој тачки.

Примери: 1) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ (цели део броја x)

$k\in\mathbb{Z}$



$$\lim_{x\to k-}\lfloor x\rfloor = k-1\,,$$

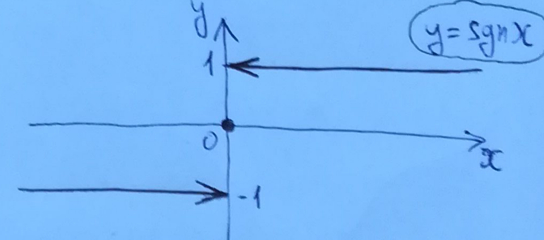
$$\lim_{x\to k+}\lfloor x\rfloor = k = \lfloor k\rfloor$$

$\Rightarrow$ У тачки k f има прекид прве врсте (неотклоњив), али f јесте непрекидна здесна у т. k.

f је непрекидна у свим тачкама из $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

2) $$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

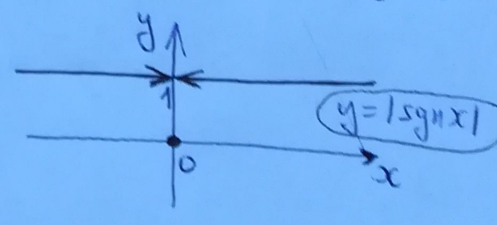
Ово се чита „сигнум" или „знак".



$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x = -1\,,\quad \operatorname{sgn} 0 = 0\,,\quad \lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x = 1$$

$\Rightarrow$ У нули ф-ја sgn има (неотклоњив) прекид прве врсте. sgn није непрекидна ни слева ни здесна у нули.

3) $$|\operatorname{sgn} x| = \begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



Ова функција у нули има отклоњив прекид (прве врсте), а такође није непрекидна ни слева ни здесна у тој тачки.