6. V 2020.

# Лопиталова правила

Грубо речено, Лопиталова правила служе за рачунање лимеса количника, при чему бројилац и именилац оба теже нули или оба теже бесконачности. Тврђење је да је тада $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ако постоји лимес на десној страни.

$\boxed{\text{Став 1:}}$ Нека су функције $f$ и $g$ непрекидне на интервалу $[a,b)$ и диференцијабилне на $(a,b)$, при чему је $g'(x)\neq 0$ за све $x\in(a,b)$ и $f(a)=g(a)=0$. Ако постоји (коначан или бесконачан) $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда постоји и $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важи једнакост

$$\boxed{\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

$\Delta$: Приметимо најпре да је $g(x)\neq 0$ за све $x\in(a,b)$ (па има смисла разматрати $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$). Наиме, ако би било $g(x_0)=0$ за неко $x_0\in(a,b)$, онда би, због чињенице $g(a)=0$, по Роловој теореми било $g'(x)=0$ за неко $x\in(a,x_0)$, што је у супротности с претпоставком $g'(x)\neq 0$ за све $x\in(a,b)$.

$$d := \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,\qquad \lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} d$$

$V\in\mathcal{N}(d)$ произвољна околина т. $d$

Треба доказати да $\big(\exists U\in\mathcal{N}(a)\big)\big(\forall x\in U\cap(a,+\infty)\big)\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\in V$,

тј. да $(\exists\delta>0)\big(\forall x\in(a,a+\delta)\big)\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\in V$.

$$(\exists\delta>0)\ \forall y\in(a,a+\delta)\ \ \frac{f'(y)}{g'(y)}\in V$$

За $x\in(a,a+\delta)$ имамо:

По Кошијевој теореми о средњој вредности: $\exists c\in(a,x)$ т.д.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{f(a)=g(a)=0}{=} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\in V$$

$a<c<x<a+\delta$

✓ ■

На потпуно аналоган начин се доказује и следећи став.

**Став 2:** Нека су фје $f$ и $g$ непрекидне на $(b,a]$ и диференцијабилне на $(b,a)$, при чему је $g'(x)\neq 0$ за све $x\in(a,b)$ и $f(a)=g(a)=0$. Ако постоји (коначан или бесконачан) $\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда постоји и $\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важи једнакост

$$\boxed{\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Из ова два става о једностраним лимесима можемо да изведемо одговарајуће тврђење за (двострани) лимес:

Ако је $a \in \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{N}(a)$, ако су функције $f$ и $g$ диференцијабилне на $U \setminus \{a\}$ (дакле, са обе стране тачке $a$) и ако је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, онда евентуалном променом вредности или додефинисањем $f(a) = g(a) := 0$ постижемо да $f$ и $g$ буду непрекидне и у тачки $a$ (па, дакле, на целој околини $U$), при чему та интервенција не утиче на $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ни на $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Зато, ако још имамо да је $g'(x) \neq 0$ за све $x \in U \setminus \{a\}$ и да постоји $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда из претходних ставова добијамо да постоји и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и да је $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$. Наиме, ако са $d$ означимо $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда је

$$d = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \begin{array}{l} \xRightarrow{\text{став 1}} \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = d \\ \xRightarrow{\text{став 2}} \lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = d \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.}$$

Овим је доказана наредна теорема у случају $a\in\mathbb{R}$. Она важи и ако је $a=-\infty$ или $a=+\infty$, али доказ за те случајеве изостављамо.

**Теорема:** (Лопитал $\frac{0}{0}$) Нека је $a\in\overline{\mathbb{R}}$ и нека постоји околина $U\in\mathcal{N}(a)$ таква да су функције $f$ и $g$ диференцијабилне на $U\setminus\{a\}$ и $g'(x)\neq 0$ за све $x\in U\setminus\{a\}$.

Претпоставимо још да је $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Ако постоји (коначан или бесконачан) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда постоји и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важи једнакост

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

**Пример:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 0}{\sin 8x}}{\underset{\to 0}{e^{2x}-1}} \overset{\text{Лоп. }\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{8\overset{\to 1}{\cos 8x}}{2\underset{\to 1}{e^{2x}}}=4.$$

Да ли је и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{e^{2x}-3}=4$? Ако није, чему је једнак овај лимес?

Важи и одговарајућа теорема у „ситуацији $\frac{\infty}{\infty}$". Наводимо је без доказа.

**Теорема:** (Лопитал $\frac{\infty}{\infty}$) Нека је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и нека постоји околина $U \in \mathcal{N}(a)$ таква да су функције $f$ и $g$ диференцијабилне на $U \setminus \{a\}$ и $g'(x) \neq 0$ за све $x \in U \setminus \{a\}$. Претпоставимо још да су оба лимеса $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ бесконачна (први од њих је једнак $+\infty$ или $-\infty$ и други је једнак $+\infty$ или $-\infty$). Ако постоји $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (коначан или бесконачан), онда постоји и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи једнакост

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

**Напомена:** Као и у „ситуацији $\frac{0}{0}$" и ова теорема важи и за једностране лимесе. Тада је уместо околине $U$ довољно претпоставити постојање „леве", односно „десне" околине тачке $a$ са одговарајућим својствима. Прецизније, услов је да постоји $\delta > 0$ т.д. су $f$ и $g$ диференцијабилне и $g' \neq 0$ на $(a-\delta, a)$ у случају левог лимеса, односно на $(a, a+\delta)$ у случају десног лимеса.

Примери: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \overset{\text{Лоп.}\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} \overset{\text{Лоп.}\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$

$x^2 \to +\infty$, $e^x \to +\infty$, $2x \to +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Лоп.}\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\ln x \to -\infty$, $\frac{1}{x} \to +\infty$

$= -\lim\limits_{x\to0+} x = 0.$

# Тејлорова формула

Нека је функција $f$ дефинисана на некој околини тачке $a\in\mathbb{R}$ $((\exists U\in N(a))\ U\subseteq D_f)$. Желимо да апроксимирамо фју $f$ у околини тачке $a$ неком што једноставнијом функцијом. Најједноставније функције су полиноми (полиномијалне функције). Пошто нас занима понашање функције у околини тачке $a$, посматраћемо полиноме у следећем облику:

$$P(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n.$$

Ако је $a_n\neq0$, онда је $n$ степен овог полинома $P$. Који полином степена $0$ је најбоља апроксимација фје $f$ у околини тачке $a$? Полином степена $0$ је константна функција, па за такву апроксимацију узимамо, наравно, полином идентички једнак броју (константи) $f(a)$:

$$\boxed{T_0(a)(x) := f(a).}$$

(Овде је $T_0(a)$ ознака за тај полином, а $T_0(a)(x)$ је његова вредност у тачки $x \in \mathbb{R}$.) Дакле, специјално важи да је $\underbrace{T_0(a)(a)}_{\text{вредност полинома } T_0(a) \text{ у тачки } a} = f(a)$.

Ако функцију $f$ у околини тачке $a$ желимо да апроксимирамо полиномом степена $1$, онда је природно да захтевамо не само да важи $T_1(a)(a) = f(a)$, него и $T_1(a)'(a) = f'(a)$ ако је $f$ диференцијабилна у тачки $a$ (овде је $T_1(a)$ ознака за тај полином).

Зато узимамо:

$$\boxed{T_1(a)(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a).}$$

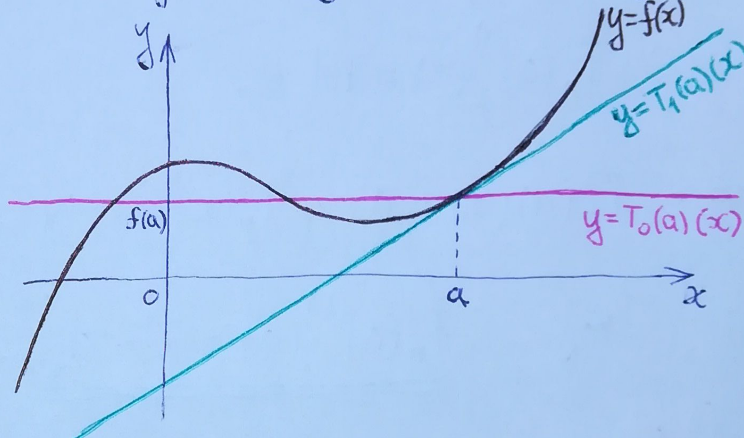


График функције $T_1(a)$ јесте права која пролази кроз тачку $(a, f(a))$ и чији је коефицијент правца $f'(a)$ — дакле, то је тангента на график ф-је $f$ у тачки $a$.

Јасно је да полином $T_1(a)$ боље апроксимира (диференцијабилну) функцију $f$ у околини тачке $a$ него полином $T_0(a)$. Ако је $f$ $n$ пута диференцијабилна ($n \geq 2$) још боља апроксимација је полином

$$T_n(a)(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

за који важи:

$$T_n(a)(a) = f(a), \quad T_n(a)'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad T_n(a)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Одредимо тај полином $T_n(a)$:

ИЗВ

$$T_n(a)(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

$$T_n(a)'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + n\,a_n(x-a)^{n-1}$$

$$T_n(a)''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)\,a_n(x-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$T_n(a)^{(k)}(x) = \underbrace{k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2}_{=k!}\,a_k + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n(x-a)^{n-k}$$

$$\vdots$$

$$T_n(a)^{(n)}(x) = n!\cdot a_n$$

$\Longrightarrow$ $T_n(a)(a) = a_0$, $T_n(a)'(a) = a_1$, $T_n(a)''(a) = 2a_2$, $\ldots$, $T_n(a)^{(n)}(a) = n!\,a_n$,

тј. $T_n(a)^{(k)}(a) = k!\cdot a_k$ за све $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

$\xRightarrow{(\text{изв})}$ $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ за све $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

$$\Longrightarrow \boxed{T_n(a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n},$$

или, краће записано: $\boxed{T_n(a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$.

(Сетимо се да је $f^{(0)} = f$, као и да је $0! = 1$ и $(x-a)^0 = 1$.)

**Дефиниција:** Ако је функција $f$ $n$ пута диференцијабилна у тачки $a$, онда полином $T_n(a)$ називамо Тејлоровим полиномом (степена $n$) функције $f$ у тачки $a$.

Напомена: Полином $T_n(a)$ заправо не мора бити степена $n$. Ако је $f^{(n)}(a)=0$, онда је његов степен мањи од $n$. То је, наравно, секундарна ствар – реч је о терминологији – али ето: каже се да је $T_n(a)$ степена $n$, а има се у виду да заправо може бити и мањег степена.

Као што смо видели у разматрању које је претходило дефиницији, основна карактеристика Тејлоровог полинома $T_n(a)$ јесте да он задовољава једнакости (ИЗВ) на стр. 7.

Дефиниција: Маклоренов полином ф-је $f$ је Тејлоров полином те функције у тачки 0:

$$M_n := T_n(0).$$

ознака за Маклоренов полином (степена $n$)

Дакле,
$$M_n(x) = T_n(0)(x) \overset{\boxed{a=0}}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Примери: 1) $\boxed{f(x)=e^x} \Rightarrow f^{(k)}(x)=e^x$ за све $k\in\mathbb{N}_0$

$\Rightarrow f^{(k)}(0)=1$ за све $k\in\mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \quad M_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2) $\boxed{f(x) = \sin x}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$,

$$f^{IV}(x) = \sin x, \quad f^{V}(x) = \cos x, \dots$$

$$\Rightarrow \quad f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \text{за све } k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad M_{2n-1}(x) = M_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3) $\boxed{g(x) = \cos x}$

$g(x) = f'(x)$ $\Rightarrow$ $g^{(2k-1)}(x) = f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \quad k \in \mathbb{N}$

из претходног примера

$$g^{(2k)}(x) = f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad g^{(2k-1)}(0) = 0, \quad g^{(2k)}(0) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \quad M_{2n}(x) = M_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4) $\alpha \in \mathbb{R}$ фиксирана константа, $\boxed{f(x) = (1+x)^{\alpha}}$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad \text{за све } k\in\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \quad \text{за све } k\in\mathbb{N}$$

Дефинишимо биномни коефицијент $\displaystyle\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$

Знамо одраније да за $\alpha\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ и $\alpha \geq k$ имамо:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha!}{k!\,(\alpha-k)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

има смисла за све $\alpha\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{N}$

има смисла само за $\alpha, k\in\mathbb{N}_0$ т.д. је $\alpha \geq k$

Али овде је $\alpha\in\mathbb{R}$, па је зато ово нов појам.

$$\Longrightarrow \quad M_n(x) = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

$f(0)=1$

У специјалном случају $\alpha=-1$ имамо: $\displaystyle\binom{-1}{k} = \frac{-1\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)}{k!} = (-1)^k.$

$\Longrightarrow$ Маклоренов полином ф-је $g(x) = (1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x}$ јесте

$$M_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k .$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \quad \Longrightarrow \quad g^{(k)}(0) = (-1)^k \cdot k! \quad \text{за све } k \in \mathbb{N}_0$$

коефицијент уз $x^k$ у Маклореновом полиному

5) $\boxed{f(x) = \ln(1+x)}$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = g(x)$

$$\Longrightarrow f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \quad \text{за све } k \in \mathbb{N},$$

$$f(0) = 0$$

Коефицијент уз $x^k$ је $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(-1)^{k-1} \cdot \cancel{(k-1)!}}{\cancel{k!}}$.

$$\Longrightarrow M_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} .$$

---

Пошто Тејлоров полином представља апроксимацију дате функције $f$ (у околини дате тачке $a$) природно је разматрати питање колика је грешка при тој апроксимацији. Ту грешку (разлику између $f(x)$ и $T_n(a)(x)$) означавамо са $R_n(a)(x)$ и називамо је <u>остатком у Тејлоровој формули</u>, а сама <u>Тејлорова формула</u> јесте наредна једнакост (наравно, у случају $a=0$ називамо је <u>Маклореновом формулом</u>):

$$\boxed{f(x) = T_n(a)(x) + R_n(a)(x)}$$

Остатак у Тејлоровој формули

Приметимо да је остатак, наравно, функција од $x$. Очекујемо да он буде све мањи како се $x$ приближава тачки $a$ ($T_n(a)$ је апроксимација за $f$ у околини тачке $a$). Наравно, остатак зависи и од $n$, и све је мањи како $n$ расте (што је већи степен полинома, боља је апроксимација). Е сад, колико $n$ може да расте — то зависи од тога колико је пута фја $f$ диференцијабилна. На пример, све функције које смо разматрали у претходних пет примера јесу бесконачно диференцијабилне у околини нуле, па ту $n$ може бити произвољно велико.

Постоје различити облици остатка $R_n(a)(x)$ у Тејлоровој формули. Ми ћемо разматрати два — Лагранжов и Пеанов облик остатка. Данас ћемо урадити Лагранжов, а следеће среде Пеанов.

**Теорема:** (Лагранжов облик остатка) Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и нека је функција $f$ $n+1$ пута диференцијабилна на некој околини $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ тачке $a$. Тада за све $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ важи да је

$$\boxed{R_n(a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

за неко $\xi$ између $a$ и $x$.

$\Delta$: Ако је $x=a$, онда је $R_n(a)(a) = f(a) - T_n(a)(a) = 0$, а наравно, важи и $(a-a)^{n+1} = 0$, па је јасно да важи тврђење (у овом случају $\xi$ мора бити $= a = x$).

Докажимо тврђење у случају $x > a$, а доказ за случај $x<a$ је потпуно аналоган.

Уводимо две помоћне функције $\varphi, \psi : [a,x] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) := f(x) - \left( f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right),$$

$$\psi(t) := (x-t)^{n+1}.$$

(Овде је, дакле, $x$, као и $a$, фиксирана константа, а $\varphi$ и $\psi$ су функције од $t \in [a,x]$.)

$f$ је $n+1$ пута диференц. на $[a,x]$ $\Longrightarrow$ $\varphi$ је диференцијабилна на $[a,x]$

$\psi$ је такође диференцијабилна на $[a,x]$, $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n \neq 0$ за $t \in (a,x)$

$$\xrightarrow{\text{Кошијева теорема о средњој вредности}} \left( \exists\, \xi \in (a,x) \right) \quad \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)}.$$

$\varphi(x) = \psi(x) = 0$ ; $\varphi(a) = f(x) - T_n(a)(x) = R_n(a)(x)$ ; $\psi(a) = (x-a)^{n+1}$.

$$\varphi'(t) = -\Big( \cancel{f'(t)} + \underbrace{f''(t)\cdot(x-t) - \cancel{f'(t)}}_{=(f'(t)\cdot(x-t))'} + \underbrace{\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cancel{f''(t)(x-t)}}_{=\left(\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2\right)'} + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \cancel{\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}} \Big) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$$\Longrightarrow \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cancel{(x-\xi)^n}}{-(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}} = \frac{-R_n(a)(x)}{-(x-a)^{n+1}} \Longrightarrow \boxed{R_n(a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.}$$

$\blacksquare$