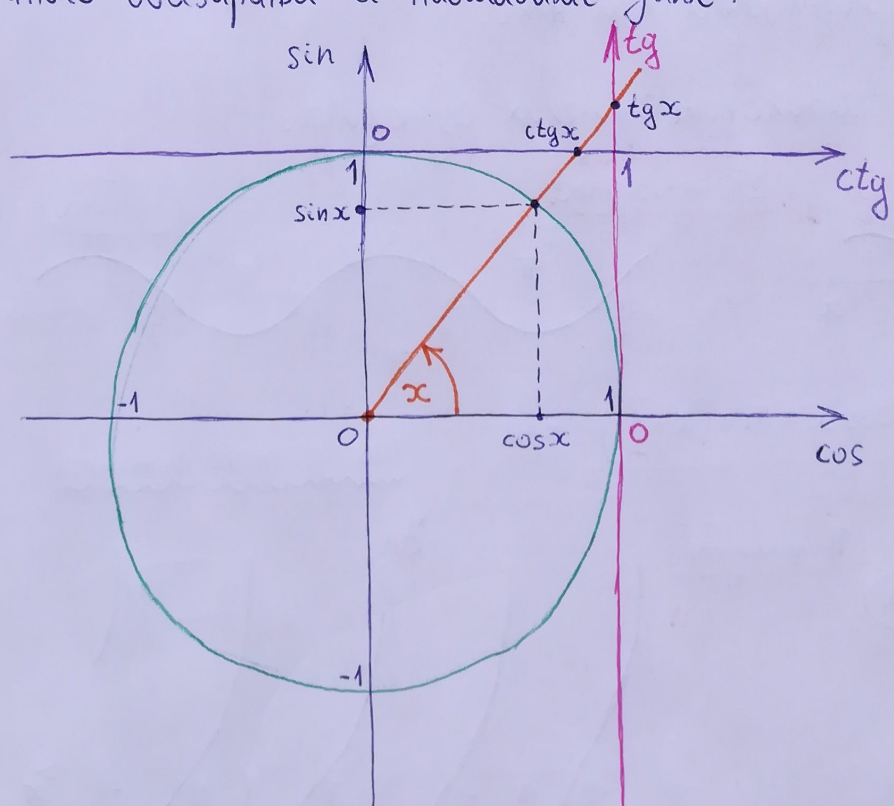
1. IV 2020.

— тригонометријске функције

Постоји више начина за увођење тригонометријских функција. Ми ћемо их овде увести преко тригонометријског круга, подразумевајући при том знање и разумевање средњошколског градива на ту тему. Да нагласим још једном. Ако сте заиста у средњој школи ово лепо научили и разумели, одлично. Али ако и нисте, то није ништа страшно. То само значи да сад треба да се вратите на то, да уложите потребан труд и научите то. Тешкоће настају (и почињу да се нагомилавају) ако нисте нешто разумели, а пређете преко тога без много обазирања и наставите даље.



$$D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$$

$$D_{tg} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D_{ctg} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Постоје многе везе између тригонометријских функција – то су тзв. тригонометријске идентичности. Основна тригонометријска идентичност је:

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1} \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}.$$

Такође је:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}} \quad \text{за све } x \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}};$$

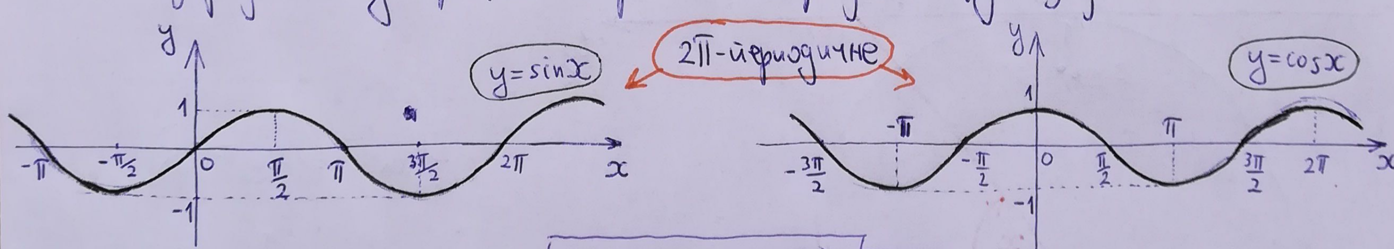
Ово је управо скуп свих нула функције cos.

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}} \quad \text{за све } x \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}};$$

скуп свих нула ф-је sin

а и у наставку ће се појављивати још неке.

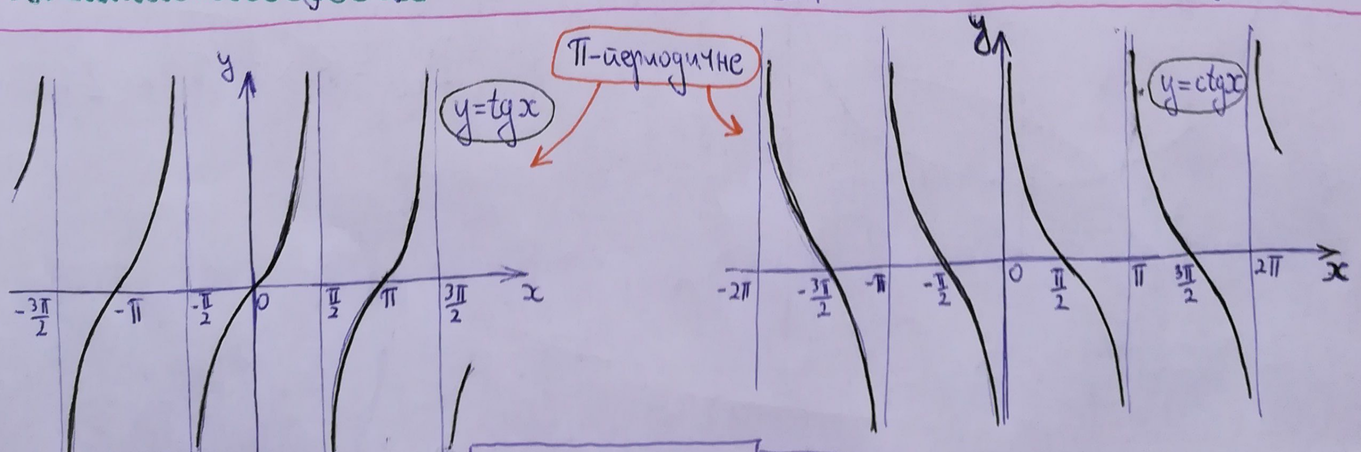
Скицирајмо сад графике тригонометријских функција.



sin је непарна функција

$$\boxed{\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}, \ x \in \mathbb{R}$$

cos је парна функција



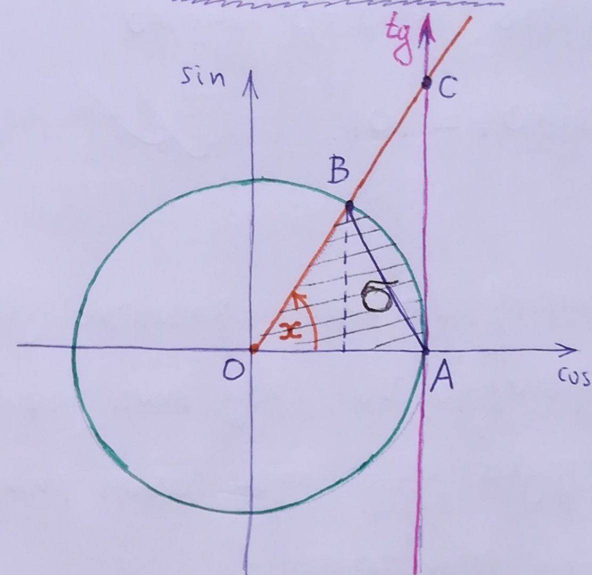
$$\boxed{\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}, \ x \in D_{ctg}$$

непарна

непарна

Лема: (а) $\left(\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\sin x < x < \operatorname{tg} x$;

(б) $(\forall x\in\mathbb{R})$ $|\sin x| \le |x|$, при чему једнакост важи само за $x=0$.



Δ: (а) $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

На тригонометријском кругу (слика десно) уочимо троуглове ΔOAB и ΔOAC, као и шрафирани кружни исечак, који ћемо означити са б.

Тада је:

$|OA|=1$, $|AC|=\operatorname{tg} x$, док је $\sin x$ заправо висина троугла ΔOAB која одговара страници OA.

$$\Longrightarrow \quad P_{\Delta OAB} = \frac{1\cdot\sin x}{2} = \frac{\sin x}{2},$$
$$P_{\Delta OAC} = \frac{1\cdot\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$
$$P(б) = \frac{1^2\pi\cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$

Видимо да је

$$P_{\Delta OAB} < P(б) < P_{\Delta OAC}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \quad /\cdot 2$$

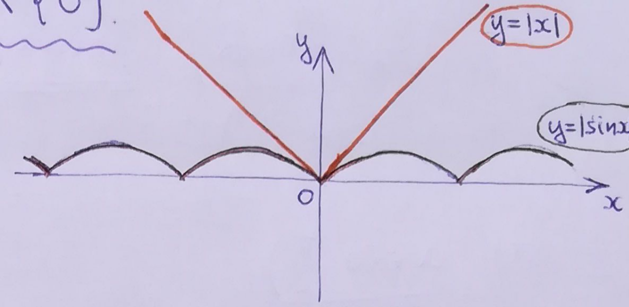
✓

(б) За $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $0<\sin x \overset{(а)}{<} x \Longrightarrow |\sin x| < |x|$.

За $x \geq \frac{\pi}{2}$: $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le x = |x|$. $\Longrightarrow \boxed{|\sin x| < |x|}$ за све $x>0$.

Како су и $|\sin x|$ и $|x|$ парне функције, то ова неједнакост важи и за негативне бројеве, па је

$$\boxed{|\sin x| < |x|}$$ за све $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Наравно, за $x=0$ имамо

$|\sin 0| = |0|$.

Помоћу ове леме доказаћемо два важна става. Први говори о непрекидности (коју ћемо дефинисати следеће среде) синуса и косинуса, а други даје један важан лимес. У доказу првог користићемо наредну еквиваленцију:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \iff \lim_{x\to a} |f(x)-b| = 0.} \quad (*)$$

Она непосредно следи из дефиниције граничне вредности, а већ смо је и спомињали код низова.

Став: (непрекидност синуса и косинуса)

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) \quad \lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Δ: Користићемо следеће две тригонометријске идентичности – трансформације збира (разлике) у производ:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2},$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

Став доказујемо помоћу теореме о два полицајца и лопову имајући у виду еквиваленцију (*):

$$0 \le |\sin x - \sin x_0| = 2\underbrace{\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|}_{\le 1} \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$$

лема (б)

$x \to x_0$

$$0 \to 0 \leftarrow 0$$

$$0 \le |\cos x - \cos x_0| = 2\underbrace{\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|}_{\le 1} \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$$

лема

$x \to x_0$

$$0$$

■

Став: $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Δ: За $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ на основу леме (под (а)) знамо да је

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad /:x$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$\Longrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$ за све $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\Longrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$ за све $x \in \underbrace{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}_{\text{околина тачке } 0} \setminus \{0\}$ (јер су све три функције парне)

претходни став $\Rightarrow$

$x \to 0$

$$\cos 0 = 1$$

■

– инверзне тригонометријске функције

Функција $f: X \to Y$ има инверзну фју $f^{-1}: Y \to X$ акко је f бијекција („1-1" и „на"). Ниједна од тригонометријских функција (sin, cos, tg и ctg) није бијекција – ниједна од њих није „1-1", јер су све периодичне. Па шта су онда инверзне тригонометријске функције (arcsin, arccos, arctg и arcctg)?

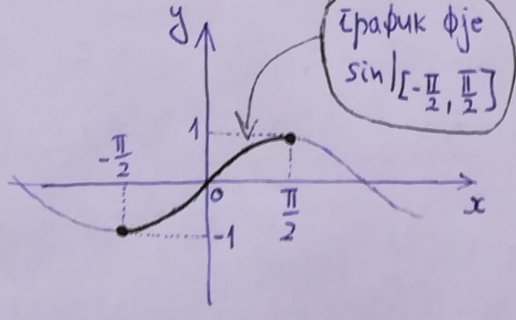
Кренимо од синуса. Он пресликава $\mathbb{R}$ на $[-1,1]$ (слика фје sin је $[-1,1]$). Зато ћемо најпре кодомен сузити на $[-1,1]$. Дакле,

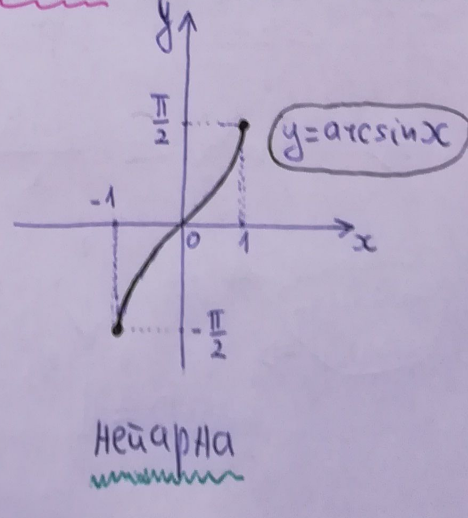
$$\sin: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1].$$

Сад имамо да је sin „на", али је и даље 2π-периодична, па није „1-1". Овај проблем превазилазимо тако што посматрамо рестрикцију фје sin на сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Та рестрикција јесте бијекција, па ће arcsin бити њој инверзна функција.

$$\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

$$\arcsin := \left(\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$





непарна

Дакле, за $x \in [-1,1]$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имамо:

$$\boxed{y = \arcsin x \iff \sin y = x.}$$

arcsin се чита „аркус синус". Реч „аркус" на грчком значи „угао", па се нпр. $\arcsin\frac{1}{2}$ може прочитати „угао чији је синус $\frac{1}{2}$". Постоји бесконачно много „углова" чији је синус $\frac{1}{2}$, али по дефиницији arcsin узима вредности у сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Дакле, $\arcsin\frac{1}{2}$ јесте заправо „угао из сегмента $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ чији је синус $\frac{1}{2}$":

$$\boxed{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}} \quad \left(\text{а не } \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots\right).$$

Приметимо још да за све x за које је дефинисан $\arcsin x$, тј. за све $x \in [-1,1]$, важи $\boxed{\sin(\arcsin x) = x}$;

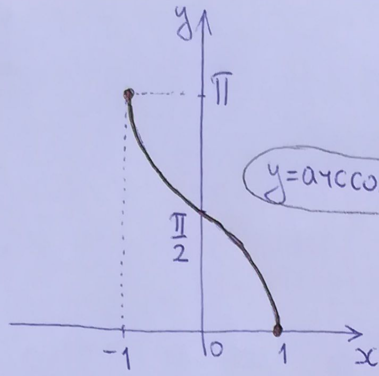
док $\boxed{\arcsin(\sin x) = x}$ важи само за $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (иако је $\sin x$ дефинисан за све $x \in \mathbb{R}$). На пример,

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \;!$$

Слично се поступа за остале три тригонометријске функције.

$\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ бијекција

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$



На пример, имамо да је:

$\arccos(-1)=\pi$, $\arccos 1 = 0$,

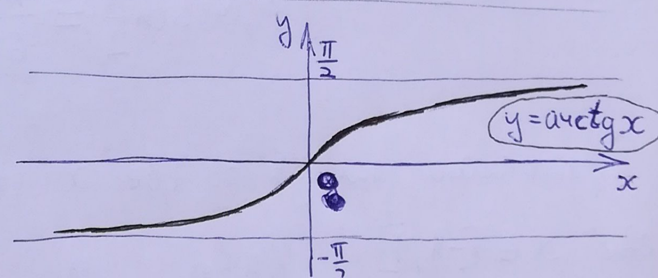
$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, ...

Ни парна ни непарна

Питање за размишљање: Зашто се при дефинисању фје arccos не узме рестрикција косинуса на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, па да arccos буде њена инверзна? Или, зашто се за arcsin не посматра рестрикција синуса на $[0,\pi]$? Било би згодно да је исти сегмент и за arcsin и за arccos.

$tg|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ бијекција

$arctg := \left(tg|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



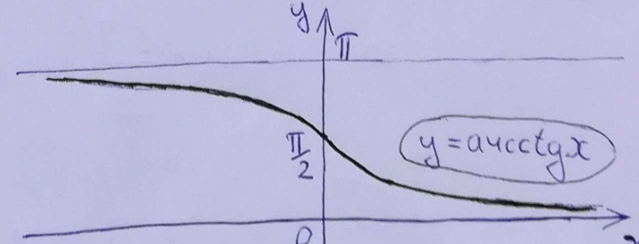
Непарна

Нпр. $arctg\,0=0$, $arctg\,1=\frac{\pi}{4}$, ...

Имамо и да је $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\,x=\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\,x=-\frac{\pi}{2}$.

$ctg|_{(0,\pi)}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ бијекција

$arcctg := \left(ctg|_{(0,\pi)}\right)^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$



Нпр. $arcctg\,0=\frac{\pi}{2}$, $arcctg\,1=\frac{\pi}{4}$,

ни парна ни непарна

$arcctg(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$ (а не $-\frac{\pi}{6}$), ...

$\lim\limits_{x\to+\infty} arcctg\,x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctg\,x=\pi$.

Као што је већ речено на почетку ове лекције, функције о којима смо говорили прошле среде и данас, прецизније, константне, експоненцијалне, логаритамске, степене, тригонометријске и инверзне тригонометријске, зову се основне елементарне функције.

Дефиниција: Елементарне функције су оне које се могу добити од основних елементарних користећи композицију и четири основне рачунске операције.

Примери:

елементарне

1) $f(x) = \dfrac{\sin(2x-3)}{\sqrt[3]{5^x+1}}$, $D_f = \mathbb{R}$

$1 + \operatorname{arctg} x > 0$

$\operatorname{tg} \,/\, \operatorname{arctg} x > -1$

($\operatorname{tg} \nearrow$ на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) $\Rightarrow$ $x > \operatorname{tg}(-1)$

2) $g(x) = \ln(1 + \operatorname{arctg} x)$, $D_g = (-\operatorname{tg}1, +\infty)$

3) $h(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-e^x}$, $D_h = (-\infty, 0]$

Гранична вредност композиције

У овој лекцији разматрамо лимес композиције две функције. Слободније речено, говорићемо о увођењу смене у лимес. То би требало да буде тврђење оваквог вида: ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и ако постоји $\lim\limits_{t\to b} g(t)$, онда је

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to b} g(t)$$

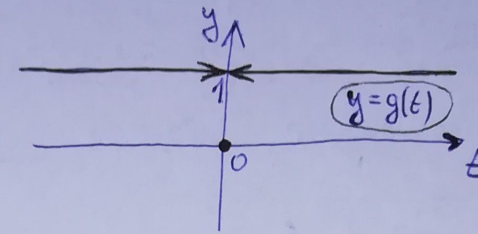
смена: $t = f(x)$

$t \to b$ кад $x \to a$

Међутим, у општем случају, ово није тачно!

<u>Пример:</u> $f \equiv 0$, $g(t) := |\operatorname{sgn} t| = \begin{cases} 1, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

(f је константна нула-функција)



$\Rightarrow$ $g(f(x)) = g(0) = 0$ за све $x \in \mathbb{R}$,

тј. $g \circ f \equiv 0$.

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0$$

Ако бисмо, пак, увели „смену" $t := f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $t \to 0$ кад $x \to 0$

$$0 = \lim_{x\to 0} g(f(x)) \overset{?}{=} \lim_{t\to 0} g(t) = 1 \quad \lightning$$

Дакле, у овом примеру: $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) \neq \lim\limits_{t\to 0} g(t)$ иако је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Закључујемо да претпоставка $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ није довољна да би важило $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{t\to b} g(t)$. ~~Она се мора појачати. Подсетимо се да $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ значи да~~

$$(\forall V \in \mathcal{N}(b))\,(\exists U \in \mathcal{N}(a))\ f(D_f \cap U \setminus \{a\}) \subseteq V.$$

~~У наредној теореми (о смени променљиве у лимесу) услов (2) представља појачање ове претпоставке.~~

Теорема: (о смени променљиве у лимесу) Нека су f и g две функције, $a \in D'_{g\circ f}$, и нека је $b = \lim\limits_{x\to a} f(x) \in D'_g$.

Ако: (1) постоји $\lim\limits_{t\to b} g(t)$;

(2) $\cancel{(\forall V \in \mathcal{N}(b))}\,(\exists U \in \mathcal{N}(a))\ \cancel{f(D_f \cap U \setminus \{a\}) \subseteq V \setminus \{b\}}$ $(\forall x \in D_f \cap U \setminus \{a\})\ f(x) \neq b.$;

онда је $$\boxed{\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to b} g(t)}.$$

Δ: $c := \lim\limits_{t\to b} g(t)$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \subseteq D_f$$

$$f(D_{g\circ f}) \subseteq D_g$$

$W \in \mathcal{N}(c)$ произв. $\quad \exists V \in \mathcal{N}(b) \quad g(D_g \cap V \setminus \{b\}) \subseteq W$

$b = \lim\limits_{x\to a} f(x) \implies \exists U_1 \in \mathcal{N}(a) \quad f(D_f \cap U_1 \setminus \{a\}) \subseteq V$

$$f(D_f \cap U_2 \setminus \{a\}) \overset{(2)}{\subseteq} V \setminus \{b\}$$

$U_2 := U_1 \cap U \in \mathcal{N}(a)$

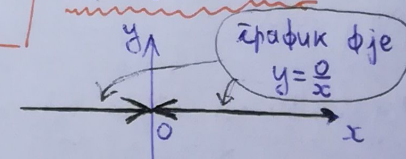
$$\implies g(f(D_{g\circ f} \cap U_2 \setminus \{a\})) \subseteq g(D_g \cap V \setminus \{b\}) \subseteq W.$$

$$\implies \lim_{x\to a} g(f(x)) = c. \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Напомена: Ако је $b = -\infty$ или $b = +\infty$, онда је услов (2) из теореме сигурно испуњен (~~следи из $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$~~), јер је $f(x) \in \mathbb{R}$ за све $x \in D_f$. Дакле, тад је довољно проверити да је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ да би се уврстила смена у лимес (није неопходно проверавати услов (2)).

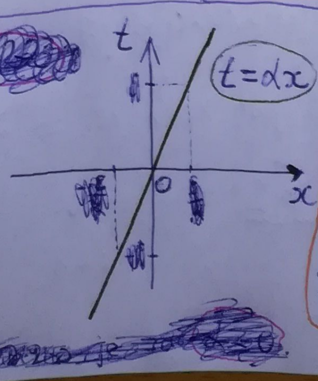
Пример: Покажимо да је $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha}$ за све $\alpha \in \mathbb{R}$.

1° $\alpha = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$ $\checkmark$



2° $\alpha \neq 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \alpha \cdot \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$

$= \alpha \cdot 1 = \alpha.$ $\checkmark$



смена: $\boxed{t = \underbrace{\alpha x}_{f(x)}}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Проверимо услов (2):

За $x \neq 0$: $f(x) = \alpha x \neq 0$. $\checkmark$

Важни лимеси

У овој лекцији одредићемо вредности неколико важних лимеса. Прву једнакост смо данас већ доказали.

(1.) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

(2.) $$\boxed{\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

Пре него што докажемо ову једнакост, један коментар. Шта овде уопште има да се доказује кад је по дефиницији $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$? Е, има шта да се доказује! Ми знамо да, ако је $\mathbb{N}\subseteq D_f$ и $b\in\overline{\mathbb{R}}$, онда важи импликација:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \implies \lim_{n\to\infty}f(n)=b.$$

Међутим, обрнута импликација у општем случају не важи (на предавањима смо дали следећи пример: $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi n)=0$, док $\lim_{x\to+\infty}\sin(\pi x)$ не постоји). Наш задатак је, дакле, да покажемо да у овом конкретном случају ($f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$) важи обрнута импликација.

Δ: Нека је $\lfloor x\rfloor$ цели део броја x (највећи цео број који је $\leq x$). Знамо да је $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$, па је за $x\geq 1$ испуњено:

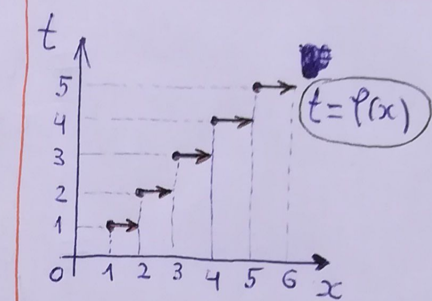
$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leq\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}.$$

Уочимо функцију $\varphi : [1,+\infty) \to \mathbb{N}$, $\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$, и два низа

$$g_1(n) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \to e \quad \text{и} \quad g_2(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e .$$

Применићемо теорему о лимесу композиције (о смени променљиве) на композиције $g_1 \circ \varphi$ и $g_2 \circ \varphi$.

$$[1,+\infty) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{N} \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$$



$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

смена: $n = \varphi(x)$

$n = \lfloor x \rfloor \to \infty$ кад $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} = \lim_{x\to+\infty} g_1(\varphi(x)) = \lim_{n\to+\infty} g_1(n) = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} = \lim_{x\to+\infty} g_2(\varphi(x)) = \lim_{n\to\infty} g_2(n) = e$$

Коначно, на основу теореме о два полицајца и лопову (за функције) имамо:

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}$$

$$e$$

$x \to +\infty$

(3.) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e}$

смена:
$\underline{t} = -x \to +\infty$ кад $x \to -\infty$

Δ: $$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}$$

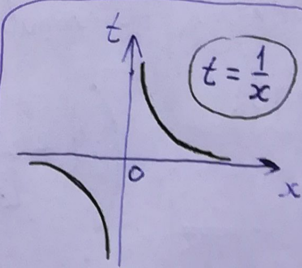
$$= \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1+1} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

смена:
$\underline{u} = t - 1 \to +\infty$ кад $t \to +\infty$

$$= \lim_{u \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}}_{\text{(2.)} \to e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{u}\right)}_{\to 1}$$

$$= e. \quad \blacksquare$$

(4.) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$



Δ: $$\lim_{x \to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \overset{(2.)}{=} e$$

$$\lim_{x \to 0-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \overset{(3.)}{=} e$$

смена: $t = \frac{1}{x}$
$t \to +\infty$ кад $x \to 0+$
$t \to -\infty$ кад $x \to 0-$

$\blacksquare$

5. $a>0,\ a\neq 1,$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$

Посебно (за $a=e$): $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.}$

Δ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

смена: $t=(1+x)^{\frac{1}{x}}\xrightarrow{4.} e$ кад $x\to 0$ (може се доказати да је испуњен услов (2) из тереме о смени променљиве)

$=\lim\limits_{t\to e}\log_a t$

непрекидност логаритамске функције

$=\log_a e.$

6. $a>0,$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.}$

Посебно (за $a=e$): $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.}$

Δ: 1° $a=1$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x}=0=\ln 1.$

2° $a\neq 1$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}\overset{5.}{=}\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$

смена: $t=a^x-1\to 0$ кад $x\to 0$

непрекидност експоненцијалне ф-је

$\Rightarrow a^x=1+t\Rightarrow x=\log_a(1+t)$

7. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$

Δ: 1° $\alpha = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^0 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$ ✓

2° $\alpha \neq 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1+x)^\alpha} - 1}{x} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{\alpha \ln(1+x)}$

$= \alpha \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}_{\overset{5.}{=} 1}$

смена:

$t = \alpha \ln(1+x) \to \alpha \ln 1 = 0$ кад $x \to 0$

непрекидност логаритамске функције

$= \alpha \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}}_{\overset{6.}{=} 1} = \alpha.$ ✓ ∎