Геометријски алгоритми

Скаларни производ вектора

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

Стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$ је пресликавање

$$\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

дефинисано са

$$a \circ b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

На пример, ако $v = (v_1, v_2),\ u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ тада је

$$v \circ u = v_1 u_1 + v_2 u_2.$$

Норма (тј. дужина) вектора a: $\|a\| = \sqrt{a \circ a}$.

Растојање вектора a од вектора b: $d(a,b) = \|a - b\|$.

Важна формула:

$$a \circ b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha,$$

где је α угао који заклапају вектори a и b.

Пример: Нормалност вектора

Уколико су два вектора a и b међусобно нормална тада је

$$a \circ b = \|a\|\,\|b\| \cos 90^\circ = \|a\|\,\|b\| \cdot 0 = 0.$$

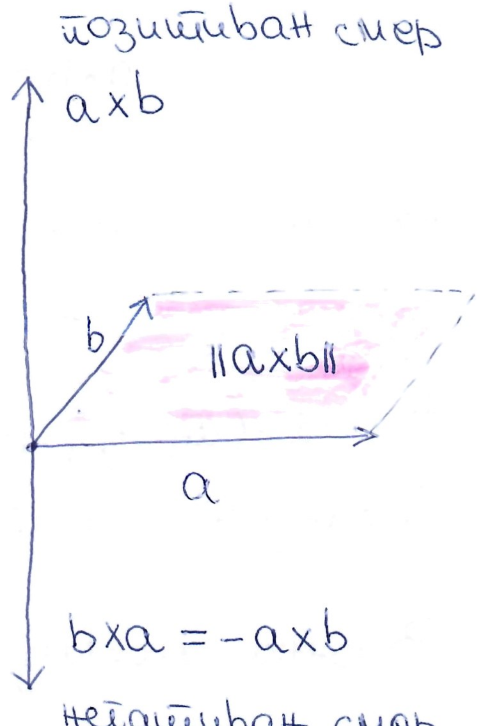
Дакле, два вектора су нормална ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули.

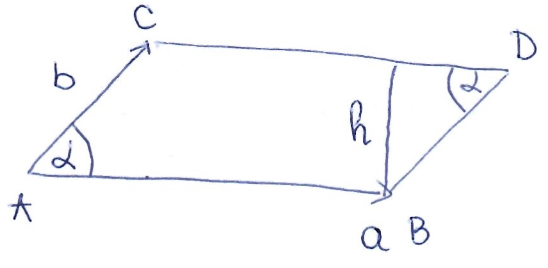
Векторски производ

$a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

Векторски производ вектора a и b је вектор ортогоналан на раван одређену векторима a и b, чији је смер одређен правилом десне руке, а интензитет је једнак површини паралелограма одређеног векторима a и b.

правило десне руке:





Како је $\|a \times b\| = P(ABCD) = \|a\| \cdot h$ и $\sin\alpha = \dfrac{h}{\|b\|}$ закључујемо да је

$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot |\sin\alpha|.$$

Нека је $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, где су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ јединичне вектори, а $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ координате.

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак је

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

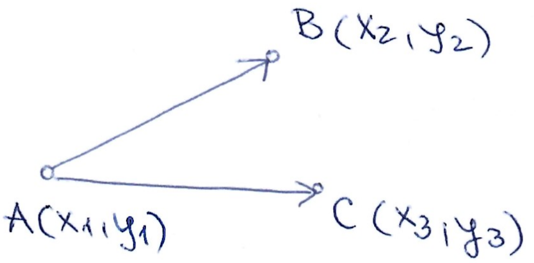
пример: Колинеарност вектора

Два вектора a и b су колинеарна ако је угао између њих једнак нули, односно ако је

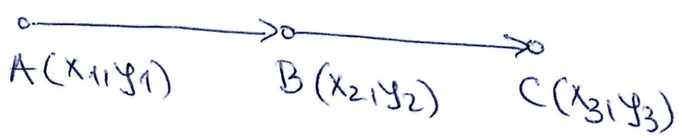
$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \underbrace{|\sin \alpha|}_{=0} = 0, \quad \text{тј. } a \times b = \vec{0}.$$

пример: Колинеарност тачака

Дате су тачке $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ и $C = (x_3, y_3)$ у реалној равни, потребно је испитати да ли су колинеарне (тј. да ли припадају истој правој).



нису колинеарне



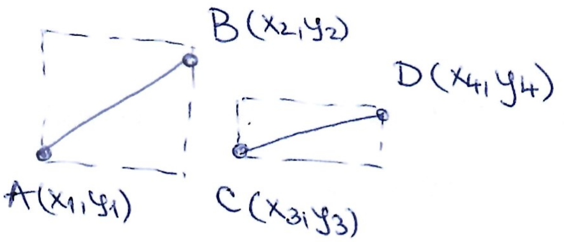
колинеарне су

Тачке A, B и C су колинеарне ако су вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ колинеарни, тј ако је $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$.

Пример: Пресек дужи

Дате су две дужи AB и CD својим крајевима $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ и $C=(x_3, y_3)$, $D=(x_4, y_4)$, потребно је испитати да ли се ове две дужи секу.

Дужи AB и CD можемо уписати у правоугаонике чије су странице паралелне x-оси и y-оси.



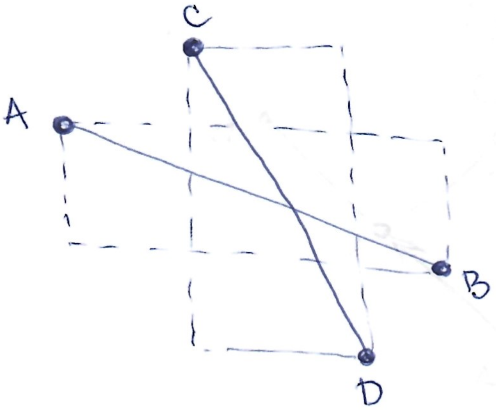
Уколико поменути правоугаоници имају празан пресек, тада је извесно да се дате дужи не секу.

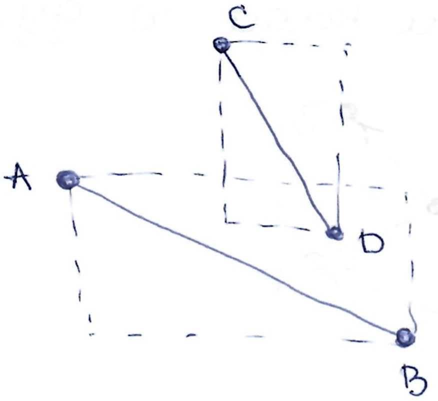
Правоугаоници се не секу у следећим случајевима

$x_4 < x_1$ (CD лево од AB) или $x_3 > x_2$ (CD десно од AB)

или $y_4 < y_1$ (AB изнад CD) или $y_3 > y_2$ (AB испод CD)

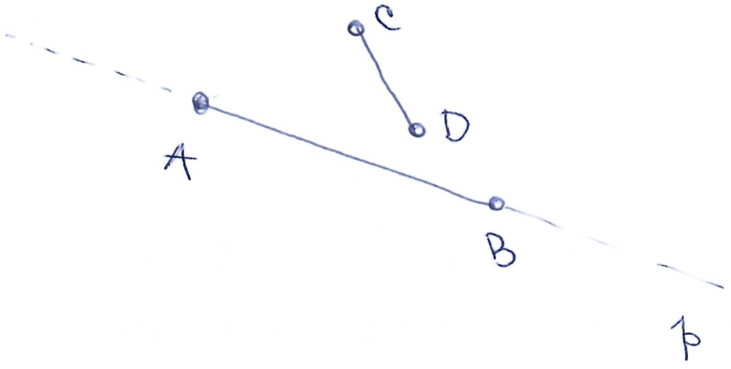
Међутим, уколико се описани правоугаоници секу што не значи нужно да се и дужи секу, нпр.





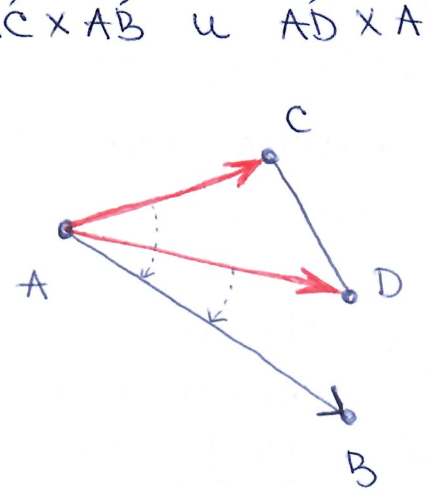
Дакле, у случају када је пресек правоугаоника непразан, морамо пронаћи неки други метод да проверимо да ли се дужи секу.

Приметимо следеће: дужи се не секу ако се једна дуж налази са тачно једне стране праве којој припада друга дуж.



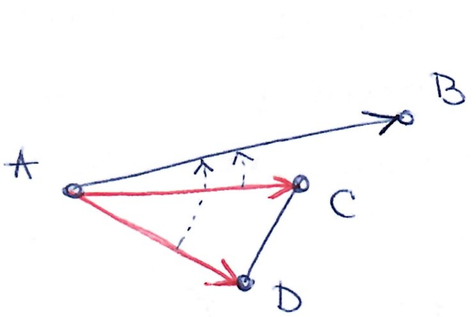
← дуж CD се налази са једне стране праве p (тј. читава је изнад праве p)

Тачке C и D наћи ће се са исте стране праве p ако и само ако је смер векторског производа $\vec{AC} \times \vec{AB}$ и $\vec{AD} \times \vec{AB}$ исти.



AC x AB негативан

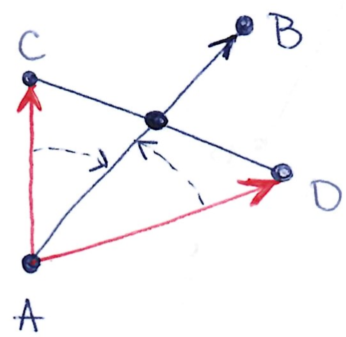
AD x AB негативан

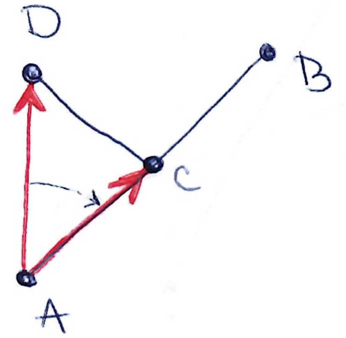


AC x AB позитиван

AD x AB позитиван

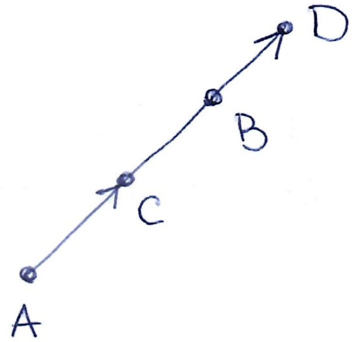
случајеви када се дужи секу:





$AC \times AB$ негативан
$AD \times AB$ позитиван

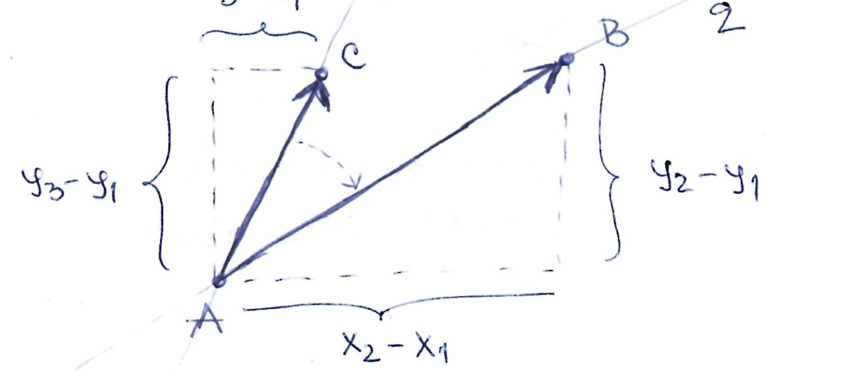
$AC \times AB = 0$
$AD \times AB$ негативан



$AC \times AB = 0$
$AD \times AB = 0$

Дакле, дужи AB и CD се секу ако вектори $AC \times AB$ и $AD \times AB$ имају различит смер, или је једно од њих (или оба) једнак $\vec{0}$.

Оријентација (позитиван/негативан смер) векторског производа може се одредити помоћу коефицијената праваца правих које садрже векторе чији се векторски производ посматра.



$$k(q) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$k(p) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

коефицијент правца

Ако је $k(p) > k(q)$ тада је смер $AC \times AB$ негативан
Ако је $k(p) < k(q)$ тада је смер $AC \times AB$ позитиван

$k(p) > k(q)$ значи да је права p "стрмија" од праве q

<u>пример</u>: Површина троугла

Нека су дата темена троугла, потребно је израчунати његову површину.
Присетимо се чињенице да је интензитет векторског производа $\vec{AB} \times \vec{AC}$ једнак површини паралелограма који образују вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Површина троугла ABC је тада једнака половини површине поменутог паралелограма.

$$A = (x_1, y_1),\quad B = (x_2, y_2),\quad C = (x_3, y_3)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$$
$$= (0, 0, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2))$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$\Rightarrow \quad P(ABC) = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right)$$

Други начин израчунавања површине троугла ABC јесте коришћењем Хероновог обрасца:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

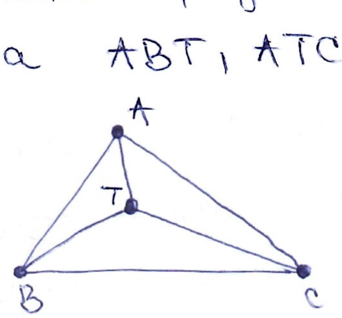
где су a, b и c дужине страница троугла, а $s=\frac{a+b+c}{2}$ његов полуобим.

Дужине страница могу се израчунати као растојања између темена троуглова.

Израчунавање површине троугла коришћењем векторског производа много је ефикасније од израчунавања коришћењем Хероновог обрасца. У првом случају се користе само основне аритметичке операције, док је за израчунавање применом Хероновог обрасца потребно и кореновање.

<u>пример</u>: Утврдити да ли се тачка T налази у унутрашњости троугла ABC који је дат својим тачкама A, B и C.

Тачка T је унутар троугла ABC ако и само ако је површина троугла ABC једнака збиру површина троуглова ABT, ATC и TBC.



Пример: Израчунавање површине конвексног полигона $A_1 A_2 \ldots A_n$, датог његовим теменима $A_1, A_2, \ldots$ и A_n.

Површину полигона можемо израчунати као збир површина троуглова $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$, $A_1 A_4 A_5$, ..., $A_1 A_{n-1} A_n$.