Linearna Algebra i Analitička Geometrija

Predrag Tanović

January 25, 2011

Contents

1 LINEARNE JEDNAČINE I SISTEMI

1.1 Osnovni pojmovi

Neka je K polje, ukoliko drugačije nije naglašeno podrazumevamo $K = R$.

- Linearna jednačina nad poljem K po promenljivim $x_1, x_2, ..., x_n$ je jednačina koja se može svesti na oblik

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + ... + a_n\, x_n = b$$

gde su koeficijenti $a_1, a_2, ..., a_n$ i slobodni član b elementi polja K.

- Uredjena n-torka $(k_1, k_2, ..., k_n) \in K^n$ je rešenje gornje jednačine ako važi:

$$a_1\, k_1 + a_2\, k_2 + ... + a_n\, k_n = b$$

- Sva njena rešenja čine skup rešenja jednačine:

$$\{(k_1, k_2, ..., k_n) \in K^n \,|\, a_1\, k_1 + a_2\, k_2 + ... + a_n\, k_n = b\,\}$$

- Degenerisana linearna jednačina je oblika:

$$0\, x_1 + 0\, x_2 + ... + 0\, x_n = b$$

Ako je $b = 0$ skup njenih rešhenja je K^n; ako je $b \neq 0$ onda ona nema rešenja (skup rešenja je $\emptyset$).

- Sistem linearnih jednačina po promenljivim $x_1, x_2, ..., x_n$ je

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Uredjena n-torka $(k_1, k_2, ..., k_n) \in K^n$ je rešenje sistema ako je rešenje svake od jednačina sistema. Sva rešenja čine skup rešenja sistema.

- Ako sa S_i označimo skup rešenja i-te jednačine gornjeg sistema a sa S skup rešenja sistema tada važi:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_m$$

- Rešiti sistem jednačina znači odrediti njegov skup rešenja.

Definicija 1.1. Dva sistema su ekvivalentna ako imaju isti skup rešenja.

Definicija 1.2. Homogena linearna jednačina je oblika

$$a_{11}x_1 \quad + \quad a_{12}x_2 \quad + \quad ... \quad + \quad a_{1n}x_n \quad = \quad 0\ .$$

Neka su $\mathbf{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)$ i $\mathbf{r}' = (r'_1, r'_2, ..., r'_n)$ rešenja gornje homogene jednačine i $k \in R$. Tada:

- $(kr_1, kr_2, ..., kr_n)$ je rešenje:

$$a_{11}r_1 \quad + \quad a_{12}r_2 \quad + \quad ... \quad + \quad a_{1n}r_n \quad = \quad 0$$

$$k(a_{11}r_1 \quad + \quad a_{12}r_2 \quad + \quad ... \quad + \quad a_{1n}r_n) \quad = \quad 0$$

$$a_{11}(k\,r_1) \quad + \quad a_{12}(k\,r_2) \quad + \quad ... \quad + \quad a_{1n}(k\,r_n) \quad = \quad 0 \quad ;$$

označavamo ga sa $k\mathbf{r}$.

- $(r_1 + r'_1, r_2 + r'_2, ..., r_n + r'_n)$ je rešenje:

$$a_{11}r_1 \quad + \quad a_{12}r_2 \quad + \quad ... \quad a_{1n}r_n \quad = \quad 0$$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
+ & & & & & & & & \\
 & a_{11}r_1' & + & a_{12}r_2' & + & \dots & a_{1n}r_n' & = & 0 \\
\hline
a_{11}(r_1+r_1') & & + & a_{12}(r_2+r_2') & + & \dots & a_{1n}(r_n+r_n') & = & 0 \quad ;
\end{array}
$$

označavamo ga sa $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$.

• Ako su $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, ... ,$\mathbf{r}^{(\mathbf{n})}$ njena rešenja i $k_0, k_1, ..., k_n$ skalari (obični brojevi) tada je i $k_0\mathbf{r}+k_1\mathbf{r}'+...+k_n\mathbf{r}^{(\mathbf{n})}$ rešenje.

Isto važi i za sistem homogenih linearnih jednačina:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & 0 \\
. & . & . & \dots & . & . & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}
$$

• Ako su $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, ... ,$\mathbf{r}^{(\mathbf{n})}$ njena rešenja i $k_0, k_1, ..., k_n$ skalari (obični brojevi) tada je i $k_0\mathbf{r}+k_1\mathbf{r}'+...+k_n\mathbf{r}^{(\mathbf{n})}$ rešenje.

Primer 1.1.

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & & & + & z & & = & 0 \\
 & & y & + & 3z & & = & 0 \\
 & & & & & t & = & 0
\end{array}
$$

ima parametarsko rešenje $t=0,\ z=a,\ y=-3a,\ x=-a$ ili $(x,y,z,t)=(-a,-3a,a,0)$ $a\in R$.

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -3a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Primer 1.2.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & - & 2y & & & + & t & = & 0 \\
 & & & & z & - & 3t & = & 0
\end{array}
$$

ima parametarsko rešenje $t=a,\ z=3a,\ y=b,\ x=2b-a$ ili $(x,y,z,t)=(2b-a,b,3a,a)$ $a,b\in R$.

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-a \\ b \\ 3a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 3a \\ a \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$(2,1,0,0)$ je rešenje sistema i dobija se za $a=0$ $b=1$, rešenje $(-1,0,3,1)$ za $a=1$ $b=0$. Ova dva rešenja čine bazu skupa rešenja (što znači da se svako rešenje sistema izražava kao njihova linearna kombinacija). U slučaju proizvoljnog homogenog sistema bazu skupa rešenja dobijamo kada uzimamo da je vrednost jedne slobodne promenljive 1 a ostalih 0; na taj način dobijemo onoliko rešenja koliko homogeni sistem ima slobodnih promenljivih.

Zbir dva rešenja nehomogene linearne jednačine

$$a_1\,x_1+...+a_n\,x_n=b$$

(gde je $b\neq 0$!) ne daje rešenje: $(1,1)$ i $(0,2)$ su rešenja jednačine $x+y=2$ a $(1,3)$ nije. Rešenja ne smemo ni množiti: $k\,(1,1)$ nije rešenje jednačine za $k\neq 1$.

• Ako je $\mathbf{r}$ rešenje nehomogene jednačine a $\mathbf{h}$ rešenje odgovarajuće homogene jednačine, tada je $\mathbf{r}+\mathbf{h}$ takodje rešenje nehomogene jednačine:

Neka je $\mathbf{r}=(r_1,r_2,...,r_n)$ rešenje jednačine

$$a_1x_1 \quad + \quad a_2x_2 \quad + \quad \dots \quad + \quad a_nx_n \quad = \quad b$$

i neka je $\mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$ rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$$

Tada je

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1r_1 & + & a_2r_2 & + & ... & + & a_nr_n & = & b \\ a_1h_1 & + & a_2h_2 & + & ... & + & a_nh_n & = & 0 \end{array}$$

Sabiranjem dobijamo:

$$a_1(r_1 + h_1) + a_2(r_2 + h_2) + ... + a_n(r_n + h_n) = b$$

- Ako je $\mathbf{r}'$ bilo koje rešenje nehomogene jednačine tada se lako proveri da je $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{h}'$ rešenje homogene jednačine. Zaključujemo: svako rešenje nehomogene jednačine $\mathbf{r}'$ možemo napisati kao zbir

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{h}'$$

rešenja $\mathbf{r}$ i nekog rešenja homogene jednačine.

- Ako sa W označimo skup svih rešenja homogene jednačine i ako je $\mathbf{r}$ bilo koje rešenje odgovarajuće nehomogene jednačine, tada je

$$\mathbf{r} + W = \{\mathbf{r} + \mathbf{h} \,|\, \mathbf{h} \in W\}$$

skup svih rešenja nehomogene jednačine.

Isto važi i za sisteme: posmatrajmo sistem

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

i njemu odgovarajući homogeni sistem:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

- Ako je $\mathbf{r}'$ bilo koje rešenje nehomogenog sistema tada je $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{h}'$ rešenje homogenog sistema. Svako rešenje nehomogenog sistema $\mathbf{r}'$ možemo napisati kao zbir

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{h}'$$

rešenja $\mathbf{r}$ i nekog rešenja homogene jednačine.

- Ako sa W označimo skup svih rešenja homogenog sistema i ako je $\mathbf{r}$ bilo koje rešenje odgovarajućeg nehomogenog sistema tada je

$$\mathbf{r} + W = \{\mathbf{r} + \mathbf{h} \,|\, \mathbf{h} \in W\}$$

skup svih rešenja nehomogenog sistema.

Primer 1.3.

$$\begin{array}{cccccccc} x & & & + & z & & = & 2 \\ & & y & + & 3z & & = & 1 \\ & & & & & t & = & 3 \end{array}$$

ima parametarsko rešenje $t = 3,\ z = a,\ y = -3a + 1,\ x = -a + 2$ ili $(x, y, z, t) = (-a + 2, -3a + 1, a, 0)$ $a \in R$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2 \\ -3a + 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Primer 1.4.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & z & - & 3t & = & 2 \end{array}$$

ima parametarsko rešenje $t = a,\ z = 3a+2,\ y = b,\ x = 2b-a+1$ ili $(x, y, z, t) = (2b-a+1, b, 3a+2, a)\ \ a, b \in R$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1, 0, 2, 0)$ je rešenje nehomogenog sistema;

$(2, 1, 0, 0)$ i $(-1, 0, 3, 1)$ su rešenja homogenog sistema .

Skup svih rešenja homogenog sistema je

$$W = \{b\,(2, 1, 0, 0) + a\,(-1, 0, 3, 1)\,|\,a, b \in R\}\ ;$$

skup rešenja nehomogenog sistema je $W + (1, 0, 2, 0)$.

1.2 Elementarne transformacije sistema jednačina, Gausov postupak

Označimo sa (S) sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & a_{1n}x_n & = & b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & a_{2n}x_n & = & b_2 & L_2 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & a_{mn}x_n & = & b_m & L_m \end{array}$$

Elementarne transformacije sistema su:

(E_1) Zamena mesta i-te i j-te jednačine: $L_i \leftrightarrow L_j$

(E_2) Na mesto i-te jednačine staviti nju pomnoženu skalarom $k \neq 0$: $k\,L_i \to L_i$

(E_2) i-tu jednačinu zameniti sa $L_i + a\,L_j$ $(a \in K, i \neq j)$: $L_i + a\,L_j \to L_i$

Teorema 1.1. Ako se sistem $(S)'$ mozhe dobiti iz sistema (S) primenom konachnog niza elementarnih transformacija tada su ta dva sistema ekvivalentna.

Dokaz. Videti Problem 1.46

- Trougaona i stepenasta forma sistema.
- Gausov postupak, svodjenje sistema na stepenastu formu

2 VEKTORI U R^n

- R^n je n-prostor ;
- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^n$ je vektor (ili tačka) prostora. $u_1, u_2, ..., u_n$ su njegove komponente ili koordinate.
- $a \in R$ je skalar .
- Dva vektora $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ su jednaka ako i samo ako je $u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ \ldots\ ,\ u_n = v_n$.
- Vektor $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ pišemo i kao vektor-kolonu $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}$
- Ponekad vektor $\mathbf{x}$ označavamo i sa $\vec{\mathbf{x}}$.

2.1 Sabiranje vektora i množenje skalarom

Definicija 2.1. Neka su $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vektori prostora R^n. Definišemo:

(a) sabiranje vektora:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \quad (\in R^n)$$

(b) množenje vektora skalarom (brojem) $k \in R$:

$$k\,\mathbf{u} = (k\,u_1, k\,u_2, ..., k\,u_n) \quad (\in R^n)$$

- Ako je $n = 2, 3$ množenje vektora položaja skalarom k je 'izduživanje' (ili 'skraćivanje') po istom pravcu sa koeficijentom k, ako je $k < 0$ onda imamo i promenu smera.

- Sabiranje vektora je 'sabiranje vektora položaja po pravilu paralelograma'.

- Nula-vektor je $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$.

- $-\mathbf{u}$ je $(-1)\,\mathbf{u}$.

Teorema 2.1. Za sve vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^n$ i skalare $k, k' \in R$ važi:

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

2. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

3. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

4. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

5. $k\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$

6. $(k + k')\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + k'\,\mathbf{u}$

7. $(k\,k')\,\mathbf{u} = k\,(k'\,\mathbf{u})$

8. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Dokaz. Videti Problem 2.4

- Prethodna teorema opisuje R^n kao vektorski prostor u odnosu na sabiranje vektora i množenje skalarom (videti Definiciju 4.1)

- Ako su vektori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ i $k \neq 0$ skalar takvi da je $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$ onda kažemo da $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ imaju isti pravac ($\mathbf{u}$ is a multiple of $\mathbf{v}$).

- $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ imaju isti smer ako je $k > 0$;

- $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ imaju suprotan smer ako je $k < 0$.

2.2 Linearne kombinacije, linearna zavisnost vektora u R^n; veza sa sistemima linearnih jednačina

Definicija 2.2. Vektor $\mathbf{v}$ je linearna kombinacija vektora $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}$ ako postoje skalari $k_1, k_2, ..., k_n$ takvi da važi

$$\mathbf{v} = k_1\,\mathbf{u_1} + k_2\,\mathbf{u_2} + ... + k_n\,\mathbf{u_n}\ ,$$

$k_1, k_2, ..., k_n$ su koeficijenti ove linearne kombinacije.

- $\mathbf{v}$ je linearna kombinacija vektora $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}$ ako i samo ako sledeća 'vektorska jednačina' ima rešenje:

$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{u_1} + x_2\,\mathbf{u_2} + ... + x_n\,\mathbf{u_n}\ .$$

Primer 2.1. Dati su vektori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\quad \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \text{i}\quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da li je $\mathbf{v}$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ i $\mathbf{u_3}$? Ekvivalentno: da li postoje $x, y, z \in R$ takvi da:

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentno, da li sistem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 3 \\ x & & & & & = & -4 \end{array}$$

ima rešenje?

Odgovor je: da. Isti je odgovor i za bilo koji vektor $\mathbf{v}'$ na mestu $\mathbf{v}$. Šta više: svaki vektor se na jedinstven način izražava kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ i $\mathbf{u_3}$ ($\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ je baza vektorskog prostora R^3)

- Sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

je isto što i 'vektorska jednačina'

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

što označava da je vektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ linearna kombinacija vektora kolona $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ sa koeficijentima $x_1, ..x_n$.

Definicija 2.3. Vektori $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n} \in R^n$ su linearno zavisni ako postoje skalari $k_1, k_2, ..., k_n$ koji nisu svi nule takvi da važi

$$k_1\,\mathbf{u_1} + k_2\,\mathbf{u_2} + ... + k_n\,\mathbf{u_n} = \mathbf{0}.$$

U suprotnom (ako ne postoje takvi k_i-ovi) oni su linearno nezavisni.

Teorema 2.2. (a) Vektori $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n} \in R^n$ su linearno zavisni ako i samo ako je jedan od njih linearna kombinacija preostalih.

(b) Vektori $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n} \in R^n$ su linearno zavisni ako je jedan od njih nula -vektor.

Primer 2.2.

- $(1,1)$ i $(1,0)$ su linearno nezavisni.
- $(1,1)$, $(1,0)$ i $(3,1)$ su linearno zavisni.
- $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ i $(1,0,0)$ su linearno nezavisni.
- $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$ i $(2,3,1)$ su linearno zavisni.
- Vektori $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ su linearno nezavisni ako i samo ako homogeni sistem linearnih

jednačina:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ima netrivijalno rešenje.

2.3 Norma vektora i skalarni proizvod

Definicija 2.4. Neka je $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektor u R^n. Definišemo normu vektora $\mathbf{u}$ (njegov intenzitet ili dužinu):

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2} \quad (\in R^+).$$

- $\|\mathbf{u}\| = 0$ ako i samo ako $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- $\|k\,\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$ ($|k|$ je apsolutna vrednost broja k).
- $\mathbf{u} \in R^n$ je jedinični vektor ako i samo ako je $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- Za svaki $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ postoji tačno jedan jedinični vektor koji ima isti smer kao i $\mathbf{u}$. To je $\dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\,\mathbf{u}$ (ili $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$) .

Definicija 2.5. Neka su $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vektori u R^n. Definišemo skalarni proizvod vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ (dot product, inner product or scalar product):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + ... + u_n\,v_n \quad (\in R)$$

Naredna teorema opisuje osnovna algebarska svojstva skalarnog proizvoda:

Teorema 2.3. Za sve vektore $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$ važi:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
2. $(-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
3. $(k\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

5. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ i $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

Dokaz. ...

- Na osnovu prethodne teoreme možemo skalarno množiti dve linearne kombinacije vektora kao da se radi o 'običnim brojevima'; jedino za $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ umesto $\mathbf{a}^2$ pišemo $\|\mathbf{a}\|^2$:

$$\begin{aligned}(2\,\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(3\,\mathbf{a}-\mathbf{b}+2\,\mathbf{c}) &= 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+3\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\\ &= 6\,\|\mathbf{a}\|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-\|\mathbf{b}\|^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\end{aligned}$$

ili

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|^2-\|\mathbf{b}\|^2$$

2.4 Nejednakosti Cauchy-Shwartza i Minkowskog

Teorema 2.4. (Cauchy- Shwartz) Za vektore $\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^n$ važi

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\le\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\ .$$

Dokaz: Za svaki realni broj t imamo

$$0\le(t\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(t\mathbf{u}+\mathbf{v})=t^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})+2t(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\|\mathbf{u}\|^2t^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})t+\|\mathbf{v}\|^2$$

Neka je

$$a=\|\mathbf{u}\|^2,\ b=2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}),\ c=\|\mathbf{v}\|^2$$

Tada, za svaku vrednost t, imamo $at^2+bt+c\ge 0$. Ovo znači da kvadratni polinom ne može da ima dva realna korena. Što dalje implicira da diskriminanta $D=b^2-4ac\le 0$, ili ekvivalentno tome, $b^2\le 4ac$. Tako

$$4\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2\le 4\,\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

Deljenjem sa 4 dobijamo naš rezultat. □

Teorema 2.5. (Minkowski) Za vektore $\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^n$ važi

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|\ .$$

Dokaz: Po Cauchy- Shwartz-ovoj nejednakosti i drugim svojstvima proizvoda,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\le\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}\|^2=(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2$$

Kada korenujemo obe strane dobijamo željenu nejednakost. □

2.5 Rastojanje, ugao izmedju vektora, projekcija

Definicija 2.6. Rastojanje (distance) izmedju tačaka (vektora) $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$ i $\mathbf{v}=(v_1,v_2,...,v_n)$ je:

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+...+(u_n-v_n)^2}\ .$$

- $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=d(\mathbf{v},\mathbf{u})$
- Ako je $n=2,3$ sa $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ je definisano uobičajeno rastojanje (dužina duži $\mathbf{uv}$).
- Nejednakost Minkowskog za $\mathbf{u}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ i $\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$ daje:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{c})\le d(\mathbf{a},\mathbf{b})+d(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

što je nejednakost trougla za $\triangle\mathbf{abc}$: dužina stranice **ac** je manja od zbira dužina stranica **ab** i **bc**

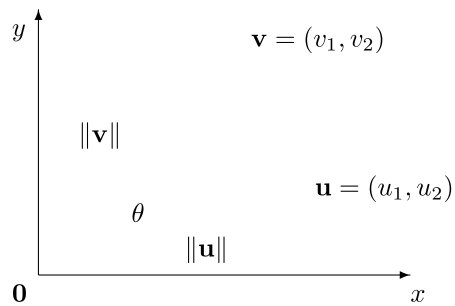
Teorema 2.6. (a) Ako su $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ tačke u (ravni) R^2 i θ ugao izmedju njih ($\angle \mathbf{u0v}$) onda je

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|}$$

(b) Ako su $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tačke u (običnom prostoru) R^3 i θ ugao izmedju njih ($\angle \mathbf{u0v}$) onda je

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|}$$

Dokaz.



Primenimo kosinusnu teoremu na trougao $\mathbf{0uv}$ ......

Definicija 2.7. Ugao izmedju ne-nula vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ θ definišemo sa:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

Primetimo da Cauchy-Shwartzova nejednakost povlači:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

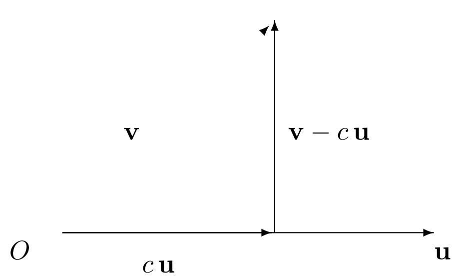
pa postoji ugao $\theta \in [0, \pi)$ takav da je $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$.

Kako je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ imamo da su vektori u R^n $(n = 2, 3)$ normalni ako i samo ako je njihov skalarni proizvod 0.

Definicija 2.8. Vektori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ su ortogonalni (ili normalni) ako je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Definicija 2.9. Definišemo projekciju vektora $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ na pravac vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$:

$$\text{proj}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \; \mathbf{u} \quad (= c\mathbf{u})$$



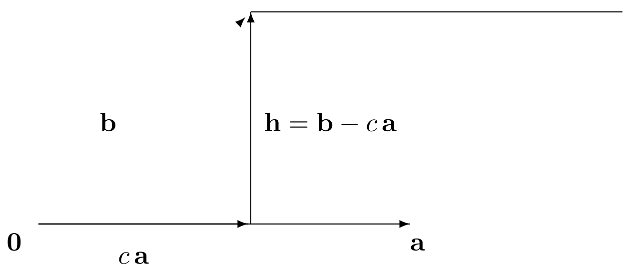
$c = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$ je jedinstven skalar takav da je $(\mathbf{v} - c\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$:

$$(\mathbf{v} - c\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - c\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - c\,\|\mathbf{u}\|^2 = 0$$

Odavde sledi $c = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$.

2.6 Površina paralelograma

- Računamo površinu P paralelograma (u R^n!) odredjenog vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$:



Vektor visine je $\mathbf{h} = \mathbf{b} - c\,\mathbf{a} = \mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{h}\|^2 &= (\mathbf{b} - c\,\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b} - c\,\mathbf{a}) = \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,c\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + c^2\,\|\mathbf{a}\|^2 = \\
&= \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)^2\,\|\mathbf{a}\|^2 = \\
&= \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2} = \\
&= \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2}
\end{aligned}$$

Kako je $P^2 = \|\mathbf{a}\|^2\,\|\mathbf{h}\|^2$ dobijamo:

$$P^2 = \|\mathbf{a}\|^2\;\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \end{vmatrix}$$

2.7 Vektori u R^3, vektorski i mešoviti proizvod

- $\mathbf{i} = (1,0,0)$ je jedinični vektor u smeru x-ose;
- $\mathbf{j} = (0,1,0)$ je jedinični vektor u smeru y-ose;
- $\mathbf{k} = (0,0,1)$ je jedinični vektor u smeru z-ose.
- $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ je ortonormirana baza (to su jedinični vektori koji su medjusobno normalni:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

Svaki vektor $\mathbf{u} = (a,b,c)$ se na jedinstven način piše u obliku

$$\mathbf{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}\ .$$

Definicija 2.10. Vektorski proizvod (cross product) vektora $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3)$ i $\mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3)$ je vektor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)\ .$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}\ =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

• Neka je $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Kažemo da je trojka $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ direktno (ili pozitivno) orijentisana baza ako važi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$$

Teorema 2.7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je jedinstven vektor koji zadovoljava sledeća tri uslova:

1. Ortogonalan je i na $\mathbf{a}$ i na $\mathbf{b}$
2. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ je jednak površini paralelograma odredjenog sa $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ je direktno orijentisana baza ukoliko su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nekolinearni.

Dokaz. ...

Osobine vektorskog proizvoda

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ako i samo ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolinearni.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \times (k\,\mathbf{b}) = (k\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
5. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
6. $(\alpha_1\,\mathbf{a} + \beta_1\,\mathbf{b}) \times (\alpha_2\,\mathbf{a} + \beta_2\,\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
7. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ pripada potprostoru (ravni, pravi,...) generisanom sa $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Definicija 2.11. Mešoviti proizvod vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ se definiše na sledeći način:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Teorema 2.8. Neka je $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Tada

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Takodje, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ je po apsolutnoj vrednosti jednak zapremini paralelepipeda odredjenog vektorima $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

Dokaz. ...

Osobine mešovitog proizvoda

(1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$

(2) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$.

(3) $[\alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\alpha'\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}]$; slično za $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

(4) Ako je $\mathbf{m} = \alpha_1\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{b} + \alpha_3\mathbf{c}$; $\mathbf{n} = \beta_1\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b} + \beta_3\mathbf{c}$ i $\mathbf{p} = \gamma_1\mathbf{a} + \gamma_2\mathbf{b} + \gamma_3\mathbf{c}$ tada je:

$$[\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

• Dvostruki vektorski proizvod je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Računa se po formuli:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

(i pripada potprostoru generisanom sa $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$).

2.8 Prave i hiper-ravni u R^n

• Neka su $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ i $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ tačke (vektori) u R^n. $\overrightarrow{AB}$ identifikujemo sa vektorom

$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$$

Definicija 2.12. Hiper-ravan je skup svih tačaka prostora R^n koje zadovoljavaju nedegenerisanu linearnu jednačinu

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n = b \ .$$

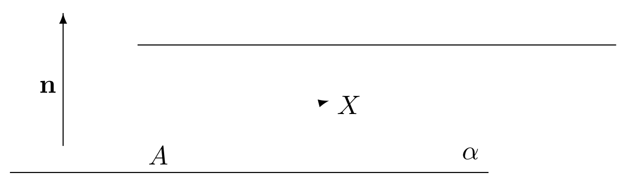
$\mathbf{n} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ je njen vektor normale.

- Vektor normale nije jedinstven, ali svaka dva su kolinearna.

Geometrijska motivacija za prethodnu definiciju dolazi iz R^3.

Primer 2.3. Ravan (u R^3) je odredjena jednom svojom tačkom i vektorom normale.

Odredićemo jednačinu ravni α koja sadrži tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i normalna je na vektor $\mathbf{n} = (k_1, k_2, k_3) \neq \mathbf{0}$.



Tačka $X(x, y, z)$ pripada ravni α ako i samo ako je $\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (k_1, k_2, k_3) = 0$$

Jednačina ravni koja sadrži tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i normalna je na vektor $\mathbf{n} = (k_1, k_2, k_3)$ je:

$$\boxed{k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0) + k_3(z - z_0) = 0}$$

Ako označimo $b = k_1 x - 0 + k_2 y - 0 + k_3 z_0$ imamo jednačinu ravni α:

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = b$$

Primer 2.4. Neka je ravan α data jednačinom $2\,x + 3\,y - 2\,z = 5$.

Iz jednačine odmah vidimo jedan vektor normale $\mathbf{n}_\alpha = (2, 3, -2)$, a tačka ravni je bilo koje rešenje ove jednačine; npr. $A(2, 1, 1)$. Jednačina ravni se transformiše u:

$$2\,(x - 2) + 3\,(y - 1) - 2\,(z - 1) = 0$$

što označava da tačka $X(x, y, z)$ pripada ravni ako i samo ako $\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Definicija 2.13. Prava u R^n koja sadrži tačku $A(a_1, a_2, .., a_n)$ i ima pravac vektora $\mathbf{v} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ je skup svih tačaka $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ koje zadovoljavaju:

$$x_1 = a_1 + k_1\,t, \quad x_2 = a_2 + k_2\,t, ..., x_n = a_n + k_n\,t$$

gde $t \in R$.

- $\mathbf{v}$ je vektor pravca prave .

$$x_1 = a_1 + k_1\,t, \quad x_2 = a_2 + k_2\,t, ..., x_n = a_n + k_n\,t\,, \quad t \in R$$

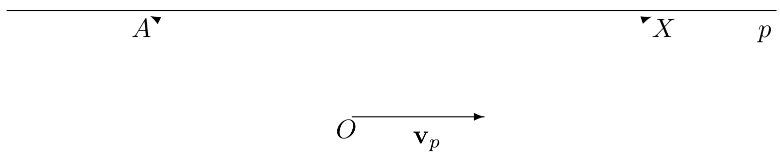
je parametarska jednačina prave koja sadrži tačku $A(a_1, a_2, .., a_n)$ i ima pravac (paralelna je) vektora $\mathbf{v} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ ($\neq \mathbf{0}$). Zapisujemo je i u obliku;

$$\frac{x_1 - a_1}{k_1} = \frac{x_2 - a_2}{k_2} = ... = \frac{x_n - a_n}{k_n} \qquad (= t)$$

• Vektor pravca prave nije jedinstveno odredjen pravom: ako je $\mathbf{v}_p$ vektor pravca prave p onda je to i bilo koji vektor kolinearan sa njim, na primer $2\,\mathbf{v}_p, 3\,\mathbf{v}_p, -5\,\mathbf{v}_p$ ...

Sledeći primer daje geometrijsku motivaciju za prethodnu definiciju.

Primer 2.5. Odredimo jednačinu prave p koja sadrži tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i ima pravac vektora $\mathbf{v}_p = (k_1, k_2, k_3)$



Tačka $X(x, y, z)$ pripada pravi p ako i samo ako postoji $t \in R$ takav da je $\overrightarrow{AX} = t\,\mathbf{v}_p$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t\,(k_1, k_2, k_3)$$

Odavde dobijamo parametarsku jednačinu prave; $x = x_0 + k_0\,t \quad y = y_0 + k_1\,t \quad z = z_0 + k_3\,t$ koju zapisujemo i

$$p\;:\quad \frac{x - x_0}{k_1} = \frac{y - y_0}{k_2} = \frac{z - z_0}{k_3} \qquad (= t)$$

Primer 2.6. Neka je data prava

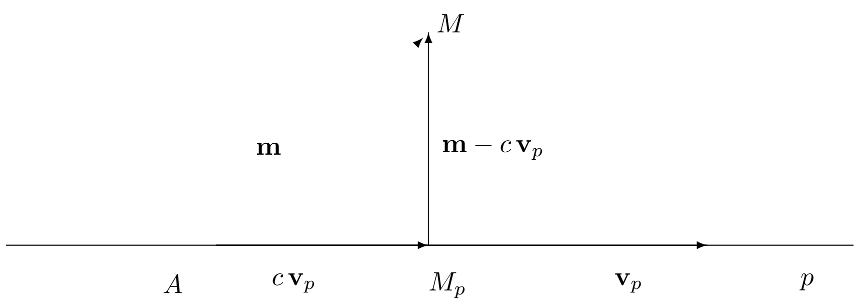
$$p\;:\quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 1}{-3} \qquad (= t)$$

Iz ove jednačine odmah pročitamo njen vektor pravca $\mathbf{v}_p = (2, 3, -3)$ i jednu njenu tačku $A(3, 1, -1)$

- Dve prave su paralelne ako i samo ako su im vektori pravaca kolinearni.
- Ugao izmedju dve prave je ugao izmedju njihovih vektora pravaca (definisan je iako se prave možda i ne seku).

2.9 Rastojanje tačke od prave u R^n

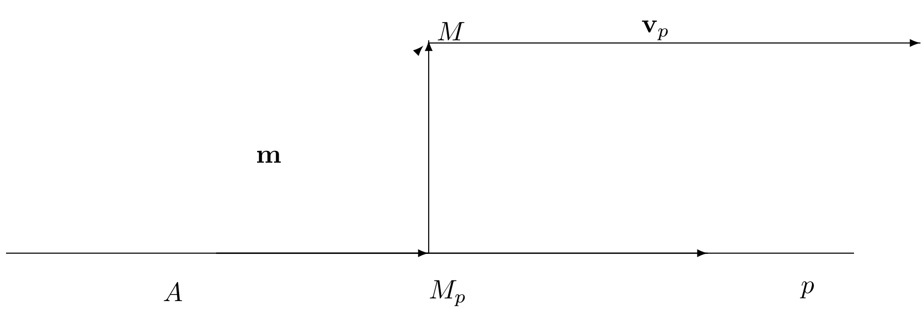
Rastojanje tačke M od prave p (u R^n) odredjene tačkom $A \in p$ i vektorom pravca $\mathbf{v}_p$, računamo kao u delu 2.7 kada smo računali visinu paralelograma: Označimo $\overrightarrow{AM}$ sa $\mathbf{m}$:



$\overrightarrow{MM_p} = \mathbf{m} - c\,\mathbf{v}_p$, gde je $c = \dfrac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_p}{\|\mathbf{v_p}\|^2}$ pa:

$$\|\overrightarrow{MM_p}\|^2 = \|(\mathbf{m} - c\,\mathbf{v}_p)\|^2 = \|\mathbf{m}\|^2 - \frac{(\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{m})^2}{\|\mathbf{v}_p\|^2}$$

- U R^2 i R^3 postoji alternativni način računanja rastojanja tačke od prave. Rastojanje tačke M od prave p odredjene tačkom $A \in p$ i vektorom pravca $\mathbf{v}_p$ možemo izračunati koristeći vektorski proizvod (površinu): Označimo $\overrightarrow{AM}$ sa $\mathbf{m}$:



$\|\overrightarrow{MM_p}\|$ je dužina visine paralelograma odredjenog vektorima $\mathbf{m}$ i $\mathbf{v}_p$, pa je brojno jednaka površini paralelograma podeljenoj dužinom njegove stranice $\mathbf{v}_p$:

$$\|\overrightarrow{MM_p}\| = \frac{\|\mathbf{m} \times \mathbf{v}_p\|}{\|\mathbf{v}_p\|}$$

2.10 Prava u ravni

Imamo dve vrste jednačina prave u R^2. Možemo je posmatrati kao:

1. pravu u R^n (odredjenu tačkom i vektorom pravca);
2. hiper-ravan u R^2 (odredjenu tačkom i vektorom normale).

Primer 2.7. Neka je $p: 2\,x + 3\,y = 5$
Iz jednačine odmah imamo vektor normale prave p: $\mathbf{n}_p = (2,3)$. Tačka $A(1,1)$ pripada pravi p.
Vektor pravca prave p možemo odrediti na dva načina:

1. $\mathbf{v}_p$ je ma koji vektor normalan na $\mathbf{n}_p$; npr. $\mathbf{v}_p = (-3,2)$
2. Tačka $B(7,-3)$ pripada pravi p pa je njen vektor pravca i $\overrightarrow{AB} = (10,-5)$.

Primer 2.8. Odrediti jednačinu prave q koja sadrži tačku $M(2,7)$ i normalna je na pravu $p: 3\,x - 2\,y = 4$
Imamo vektor normale prave p: $\mathbf{n}_p = (3,-2)$. Vektor pravca prave q je baš $\mathbf{n}_p$ pa je jednačina

$$q: \ \frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{-2} \quad \text{ili} \quad q \ \ 3\,x + 2\,y = 20.$$

2.11 Položaj ravni u R^3

• Jednačine ravni koja sadrži 3 date nekolinearne tačke A, B, C možemo naći na sledeći način: kako ravan odredjuju tačka i vektor normale, treba naći samo vektor normale, a to je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Primer 2.9. Jednačina ravni koja sadrži tačke $A(1,0,2)$, $B(3,2,1)$ i $C(2,1,5)$. Nadjemo vektor normale:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,2,-1) \times (2,1,3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (7,-8,-2)$$

Jednačina ravni koja sadrži tačku $A(1,0,2)$ i normalna je na vektor $\mathbf{n} = (7,-8,-2)$ je:

$$7\,(x-1) - 8\,y - 2\,(z-2) = 0$$

• Naći ćemo jednačinu ravni koja sadrži (nekolinearne) tačke $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ i $C(c_1,c_2,c_3)$. Prvo nadjemo vektor normale na ravan, npr

$$\mathbf{n} \ = \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \ = \ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \ .$$

Primeti da je $\vec{n} \neq \vec{0}$ kako su tačke nekolinearne. Dalje, tačka $X(x,y,z)$ pripada ravni akko $\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n} = 0$ akko:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \ = \ 0\ .$$

• Dve ravni α i β su paralelne ako i samo ako su im vektori normala kolinearni. Ekvivalentno: površina paralelograma odredjenog sa ta dva vektora je 0 (ili $\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \mathbf{0}$).

• Iz prethodnog sledi da se dve ravni α i β seku akko $\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta \neq \mathbf{0}$. Da odredimo jednačinu presečne prave te dve ravni treba nać jednu tačku preseka i vektor pravca prave. Vektor pravca je normalan na svaki od vektora normala ravni, pa možemo uzeti

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta$$

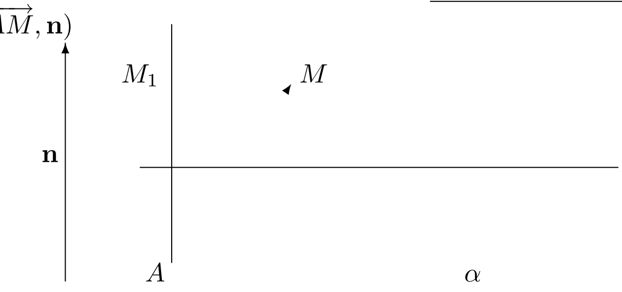
Primer 2.10. Jednačina presečne prave ravni $\alpha:\ 2x+2y-z=1$ i $\beta:\ 2x+y+3z=5.$

$$\mathbf{v}_p=\mathbf{n}_\alpha\times\mathbf{n}_\beta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&2&-1\\2&1&3\end{vmatrix}=(7,-8,-2)$$

Presečna tačka je bilo koje rešenje sistema $2x+2y-z=1$ $\ 2x+y+3z=5$ npr. $A(1,0,1)$.

$$p:\ \frac{x-1}{7}=\frac{y}{-8}=\frac{z-1}{-2}\quad(=t)$$

• Neka je ravan α data tačkom A i vektorom normale $\mathbf{n}$. Rastojanje tačke M od ravni α je dužina duži AM_1. Primetimo $\overrightarrow{AM_1}=\mathrm{proj}\,(\overrightarrow{AM},\mathbf{n})$



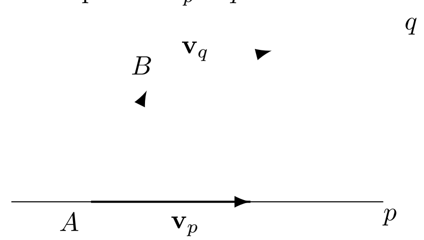
Prema tome, rastojanje računamo po formuli:

$$d(M,\alpha)=|\overrightarrow{AM_1}|=|\mathrm{proj}\,(\overrightarrow{AM},\mathbf{n})|=\frac{|(M-A)\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2}$$

2.12 Medjusobni položaj pravih u R^3

- Prave p i q su paralelne akko su im vektori pravaca kolinearni; ekvivalentno $\mathbf{v}_p\times\mathbf{v}_q=\mathbf{0}$.
- Kada su p i q mimoilazne?

  Neka je p data tačkom A i vektorom pravca $\mathbf{v}_p$ a q tačkom B i vektorom pravca $\mathbf{v}_q$.



Primetimo da su prave mimoilazne ako i samo ako je paralelepiped odredjen sa $\overrightarrow{AB},\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_q$ nedegenerisan (zapremina mu nije nula): $[\overrightarrow{AB},\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_q]\neq 0$

• Slično: prave su u istoj ravni (paralelne su, ili se seku) ako i samo ako $[\overrightarrow{AB},\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_q]=0$

• Rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p i q (sa gornje slike) je jednako visini paralelepipeda. Primetimo da je površina osnove paralelepipeda paralelogram odredjen sa $\mathbf{v}_p$ i $\mathbf{v}_q$ pa imamo:

$$d(p,q)=\frac{[\overrightarrow{AB},\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_q]}{|\mathbf{v}_p\times\mathbf{v}_q|}$$

2.13 Medjusobni položaj prave i ravni, ugao izmedju prave i ravni

Neka je prava p zadata tačkom A i vektorom pravca $\mathbf{v}_p$, i neka je ravan α zadata tačkom B i vektorom normale $\mathbf{n}_\alpha$.

• p pripada ravni α akko $A \in \alpha$ (ekvivalentno $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n}_\alpha$) i $\mathbf{v}_p \perp \mathbf{n}_\alpha$:

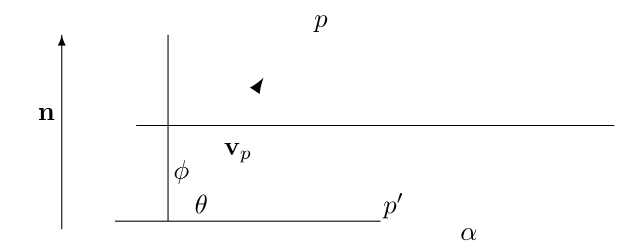
$$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}_\alpha = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathbf{v}_p \times \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{0}$$

• p je paralelna ravni (ali joj ne pripada) α akko $A \notin \alpha$ i $\mathbf{v}_p \perp \mathbf{n}_\alpha$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}_\alpha \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \mathbf{v}_p \times \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{0}$$

• Iz prethodna dva sledi da p seče ravan α akko $\mathbf{v}_p \times \mathbf{n}_\alpha \neq \mathbf{0}$

• Ugao izmedju prave p i ravni α je (po definiciji) ugao θ izmedju p i njene ortogonalne projekcije na ravan α (označimo projekciju sa p').



Ako je ϕ ugao izmedju vektora $\mathbf{v}_p$ i $\mathbf{n}$ tada je: $\cos\phi = \dfrac{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}$ pa, zbog $\phi + \theta = 90^0$, imamo:

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}$$

3 MATRICE

Definicija 3.1. Matrica tipa $m \times n$, ili formata $m \times n$, (size, shape) nad poljem K je pravougaona tablica koja se sastoji od m vrsta (horizontalnih redova, rows) i n kolona (vertikalnih redova, columns) čija su polja popunjena elementima skupa K:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ . & . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ovu matricu skraćeno obeležavamo sa $(a_{ij})_{m,n}$ ili samo sa (a_{ij}) .

• Koristi se i oznaka $[a_{ij}]$;

• Matrice $(a_{ij})_{m,n}$ i $(b_{ij})_{m',n'}$ su jednake akko imaju isti tip ($m = m'$ i $n = n'$) i svi parovi odgovarajućih elemenata su jednaki ($a_{ij} = b_{ij}$ za $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$)) ;

• Vektor i-te vrste je $\mathbf{v_i} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$; $(a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ ... \\ \mathbf{v_m} \end{pmatrix}$

• Vektor j-te kolone je $\mathbf{u_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{mj} \end{pmatrix}$; $(a_{ij})_{m,n} = (\mathbf{u_1}\ \mathbf{u_2}\ ...\ \mathbf{u_n})$

3.1 Sabiranje i množenje matrica skalarom,

- Skup svih $m \times n$ matrica nad poljem K se označava sa $M_{m,n}(K)$.
- Sabiramo samo matrice istog formata

$$(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n} \ ;$$

- Matrice množimo skalarom k po pravilu:

$$k\,(a_{ij})_{m,n} = (k\,a_{ij})_{m,n} \ ;$$

- Nula-matrica tipa $m \times n$ ima sve elemente 0, označavamo je sa $\mathbf{0_{m,n}}$ (ili samo sa $\mathbf{0}$).

Teorema 3.1. Za sve matrice $A, B, C \in M_{m,n}(K)$ i skalare $k_1, k_2 \in K$ važi:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + \mathbf{0} = A$
3. $A + (-A) = \mathbf{0}$
4. $A + B = B + A$
5. $k_1\,(A + B) = k_1\,A + k_1\,B$
6. $(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$
7. $(k_1\,k_2)\,A = k_1\,(k_2\,A)$
8. $1\,A = A$

Dokaz. ...

- Ove osobine znače da je $M_{m,n}(K)$ vektorski prostor nad poljem K (videti Definiciju 4.1).
- Aksiome vektorskog prostora dozvoljavaju uobičajeno linearno kombinovanje; na primer:

$$2\,(3\,A - 4B) + 3(B + 2\,A) = 6\,A - 8\,B + 3\,B + 6\,A = 12\,A - 5\,B$$

3.2 Množenje matrica

Neka je $A = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Definišemo:

$$A \cdot B = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + ... + a_n\,b_n$$

Ovo je skalarni proizvod vektora vrste (ili $1 \times n$ matrice) i vektora kolone (ili $n \times 1$ matrice). U rezultatu dobijamo skalar (ili 1×1 matricu).

Definicija 3.2. Neka je A matrica tipa $m\times k$ i B matrica tipa $k\times n$ (vektori vrsta matrice A i vektori kolona matrice B imaju istu dužinu k).

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{A_1}\\ \mathbf{A_2}\\ \dots\\ \mathbf{A_m}\end{pmatrix}\qquad B=\left(\mathbf{B^1}\ \mathbf{B^2}\ \dots\ \mathbf{B^n}\right)$$

Definišemo proizvod $A\cdot B$ (koji je matrica tipa $m\times n$) na sledeći način:

$$A\,B=\begin{pmatrix}\mathbf{A_1}\cdot\mathbf{B^1} & \mathbf{A_1}\cdot\mathbf{B^2} & \dots & \mathbf{A_1}\cdot\mathbf{B^n}\\ \mathbf{A_2}\cdot\mathbf{B^1} & \mathbf{A_2}\cdot\mathbf{B^2} & \dots & \mathbf{A_2}\cdot\mathbf{B^n}\\ . & . & \dots & .\\ \mathbf{A_m}\cdot\mathbf{B^1} & \mathbf{A_m}\cdot\mathbf{B^2} & \dots & \mathbf{A_m}\cdot\mathbf{B^n}\end{pmatrix}$$

- $A\,B=(c_{ij})_{m,n}$ gde je

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{3j}+\dots+a_{ik}b_{kj}$$

ili: $c_{ij}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}$.

Primer 3.1.

$$\begin{bmatrix}2&1&6\\3&5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&3\\1&7\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot6+1\cdot1+6\cdot0 & 2\cdot3+1\cdot7+6\cdot1\\ 3\cdot6+5\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot3+5\cdot7+4\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&19\\23&48\end{bmatrix}.$$

- Ukoliko matricu B predstavimo preko vektora vrsta

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2k}\\.&.&\dots&.\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\\mathbf{b_2}\\.\\.\\\mathbf{b_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\mathbf{b_1}+a_{12}\mathbf{b_2}+\dots+a_{1k}\mathbf{b_k}\\a_{21}\mathbf{b_1}+a_{22}\mathbf{b_2}+\dots+a_{2k}\mathbf{b_k}\\\dots\\a_{m1}\mathbf{b_1}+a_{m2}\mathbf{b_2}+\dots+a_{mk}\mathbf{b_k}\end{pmatrix}$$

Primer 3.2.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\\mathbf{b_2}\\\mathbf{b_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}&+&2\mathbf{b_2}&+&3\mathbf{b_3}\\4\mathbf{b_1}&+&5\mathbf{b_2}&+&6\mathbf{b_3}\\7\mathbf{b_1}&+&8\mathbf{b_2}&+&9\mathbf{b_3}\end{pmatrix}$$

Konkretno:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-2&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\8&2\\14&5\end{pmatrix}$$

$$1(3,2)+2(-2,0)+3(1,-1)=(2,-1)$$

$$4(3,2)+5(-2,0)+6(1,-1)=(8,2)$$

$$7(3,2)+8(-2,0)+9(1,-1)=(14,5)$$

Teorema 3.2. Sledeća tvrdjenja važe pretpostavljajući da su formati matrica A,B,C takvi da su izrazi definisani:

1. $(A\,B)\,C=A\,(B\,C)$ (asocijativnost);
2. $A\,(B+C)=A\,B+A\,C$ (leva distributivnost);
3. $(B+C)\,A=B\,A+C\,A$ (desna distributivnost);
4. $k\,(A\,B)=(k\,A)\,B=A\,(k\,B)$ gde je k skalar.

- Množenje matrica nije komutativno:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

ili:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 7 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nije definisan !!!}$$

Definicija 3.3. Jedinična matrica reda n, u oznaci I_n, je $n \times n$ matrica: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & .0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

- Ako je A matrica tipa $m \times n$ onda je:

$$I_m\, A = A\, I_n = A$$

- Ako je red jedinične matrice jasan iz konteksta pishemo samo I.

3.3 Matrični zapis sistema linearnih jednačina, veza izmedju skupa rešenja sistema i skupa rešenja pridruženog homogenog sistema

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

možemo zapisati u matričnoj formi $A\,X = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matrica A je matrica sistema (coefficient matrx).

Primer 3.3. Sistem

$$\begin{array}{ccccccc} 2\,x & + & 3\,y & + & 5\,z & = & -1 \\ -\,x & + & 2\,y & + & 4\,z & = & 5 \end{array}$$

možemo zapisati u matričnoj formi $A\,X = B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Primer 3.4. Sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 3\,y & + & 5\,z & = & 0 \\ -\,x & + & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \end{array}$$

možemo zapisati u matričnoj formi $A\,X = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3. Pretpostavimo da su $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_l}$ rešenja homogenog sistema $A\,X = \mathbf{0}$ ($\mathbf{u_i}$ je vektor-kolona) . Tada je svaka linearna kombinacija $k_1\mathbf{u_1} + k_2\mathbf{u_2} + ... + k_l\mathbf{u_l}$ takodje rešenje sistema.

Dokaz: Dato nam je: $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, ..., $A\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Otuda:

$$\begin{aligned} A(k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + ... + k_n\mathbf{u}_n) &= k_1 A\mathbf{u}_1 + k_2 A\mathbf{u}_2 + ... + k_n A\mathbf{u}_n \\ &= k_1\mathbf{0} + k_2\mathbf{0} + ... + k_n\mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Teorema 3.4. Pretpostavimo da je $\mathbf{u_0}$ jedno rešenje sistema $A\,X = B$ i neka je W skup svih rešenja (vektor kolona) odgovarajućeg homogenog sistema $A\,X = \mathbf{0}$. Tada je

$$\mathbf{u_0} + W = \{\mathbf{u_0} + \mathbf{w} \,|\, \mathbf{w} \in W\}$$

skup svih rešenja nehomogenog sistema.

Dokaz: Kako je $U = \mathbf{u}_0 + W$ dobijeno dodavanjem $\mathbf{u}_0$ svakom elementu W ....

Primećujemo da teorema ima geometrijsku interpretaciju u R^3. Posebno, predpostavimo da je W linija koja prolazi kroz početak O. Onda je, kao što se vidi sa slike, $U = u_0 + W$ linija koja je paralelna W dobijena dodavanjem v_0 svakom elementu W. Slično, za bilo koje W

U narednoj teoremi bitno je da je polje K beskonačno:

Teorema 3.5. Svaki sistem linearnih jednačina $A\,X = B$ ili nema rešenja, ili ima tačno jedno rešenje, ili ima beskonačno mnogo rešenja .

Dokaz: Dovoljno je pokazati da ako $AX = B$ ima više od jednog rešenja, da ih onda ima beskonačno mnogo. Predpostavimo da $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ različita rešenja $AX = B$; onda je i $A\mathbf{u} = B$ i $A\mathbf{v} = b$. Onda, za bilo koje $k \in K$,

$$A\,[\mathbf{u} + k(\mathbf{u} - \mathbf{v})] = A\mathbf{u} + k(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}) = B + k(B - B) = B$$

Drugim rečima, za bilo koje $k \in K$, $\mathbf{u} + k(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ je rešenje za $AX = B$. Kako su za različite k-ove ova rešenja medjusobno različita (videti Problem 3.21), i kako imamo beskonačno mnogo k-ova, zaključujemo da $AX = B$ ima beskonačan broj rešenja.

3.4 Blok matrice

Blok matrice dobijamo deljenjem matrice horizontalnim i vertikalnim linijama na matrice manjeg formata (podmatrice). Na primer, ako je $A = (a_{ij})_{6,6}$ možemo je deliti na blok matrice na više načina:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} & \vdots & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} & \vdots & a_{25} & a_{26} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} & \vdots & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} & \vdots & a_{45} & a_{46} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & \vdots & a_{53} & a_{54} & \vdots & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & \vdots & a_{63} & a_{64} & \vdots & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Matrice $A_{i,j}$ su tipa 2×2

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} & \vdots & a_{15} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} & \vdots & a_{25} & a_{26}\\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} & \vdots & a_{35} & a_{36}\\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots\\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} & \vdots & a_{45} & a_{46}\\ a_{51} & a_{52} & \vdots & a_{53} & a_{54} & \vdots & a_{55} & a_{56}\\ a_{61} & a_{62} & \vdots & a_{63} & a_{64} & \vdots & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13}\\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23}\end{pmatrix}$$

Matrice $A'_{i,j}$ su tipa 3×2

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \vdots & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \vdots & a_{26}\\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \vdots & a_{36}\\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \vdots & a_{46}\\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots\\ a_{51} & a_{52} & \vdots & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \vdots & a_{56}\\ a_{61} & a_{62} & \vdots & a_{63} & a_{64} & a_{65} & \vdots & a_{66} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & D & E\\ F & G & H\end{pmatrix}$$

C je tipa 4×2, D je 4×3, E je 4×1, F je 2×2, G je 2×3 i H je tipa 2×1 .

- Dijagonalna blok matrica je blok matrica oblika

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_{22} & ... & \mathbf{0}\\ . & . & ... & .\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & A_{nn}\end{pmatrix}$$

gde su svi blokovi A_{ii} kvadratne matrice (moguće različitih formata). Primetimo da blokovi $\mathbf{0}$ ne moraju biti kvadratni i mogu biti različitih tipova. Na primer:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 0\\ 1 & 5 & \vdots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \vdots & 4\end{pmatrix}$$

- Trougaona blok matrica je blok matrica oblika

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n}\\ \mathbf{0} & A_{22} & ... & A_{2n}\\ . & . & ... & .\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & A_{nn}\end{pmatrix}$$

gde su svi blokovi A_{ii} kvadratne matrice.

- Ako su blok-matrice

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n}\\ . & . & ... & .\\ A_{m1} & A_{m2} & ... & A_{mn}\end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1n}\\ B_{21} & B_{22} & ... & B_{2n}\\ . & . & ... & .\\ B_{m1} & B_{m2} & ... & B_{mn}\end{pmatrix}$$

istog ‘tipa’ (t.j. A_{ij} i B_{ij} su istog tipa za sve i,j) tada je

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & ... & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & ... & A_{2n}+B_{2n} \\ . & . & ... & . \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & ... & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix}$$

- $$k\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ . & . & ... & . \\ A_{m1} & A_{m2} & ... & A_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\,A_{11} & k\,A_{12} & ... & k\,A_{1n} \\ k\,A_{21} & k\,A_{22} & ... & k\,A_{2n} \\ . & . & ... & . \\ k\,A_{m1} & k\,A_{m2} & ... & k\,A_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ako su blok-matrice

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2p} \\ . & . & ... & . \\ A_{q1} & A_{q2} & ... & A_{qp} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & ... & B_{2r} \\ . & . & ... & . \\ B_{p1} & B_{p2} & ... & B_{pr} \end{pmatrix}$$

takve da je svaki (matrični) zbir

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+...+A_{in}B_{nj}$$

definisan, tada je

$$A\,B=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2r} \\ . & . & ... & . \\ C_{q1} & C_{q2} & ... & C_{qr} \end{pmatrix}$$

Primer 3.5. Neka je $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Tada je $A\,A=\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0\,A+A\,0 & 0\,A+A\,A \\ A\,A+0 & A\,A+0\,A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 19 \\ 7 & 18 & 7 & 18 \\ 6 & 19 & 6 & 19 \end{pmatrix}$$

3.5 Transponovanje matrice

Transponovanu matricu matrice A, u oznaci A^T, dobijamo tako što vrste matrice A pišemo kao kolone matrice A^T:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & ... & a_{m3} \\ . & . & ... & . \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ako je $A=(a_{ij})_{m,n}$ matrica tipa $m\times n$ tada je A^T matrica tipa $n\times m$ i $A^T=(a_{ji})_{n,m}$.
- Ako je A vektor vrsta ($1\times n$ matrica) tada je A^T vektor kolona ($n\times 1$ matrica); važi i obrnuto.

Teorema 3.6. Pretpostavljajući da su matrice takvih formata da su izrazi definisani važi:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(k\,A)^T = k\,A^T$
4. $(A\,B)^T = B^T\,A^T$.

3.6 Kvadratne matrice

Kvadratne matrice su one koje imaju isti broj vrsta i kolona (t.j. tip im je oblika $n \times n$); za matrice tipa $n \times n$ kažemo i da su matrice reda n . $M_n(K)$ (umesto $M_{n,n}(K)$) označava skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem K.

- Skup $M_n(K)$ je zatvoren za sabiranje, množenje i množenje skalarima:

1. Ako $A, B \in M_n(K)$ tada i $A+B,\ A\,B \in M_n(K)$;
2. Ako $k \in K$ i $A \in M_n(K)$ tada $k\,A \in M_n(K)$.

- Važe osobine iz Teoreme 3.1 za $M_n(K)$ (čini vektorski prostor nad poljem K).
- Prema Teoremi 3.2 za sve $A, B, C \in M_n(K)$ i $k \in K$ važi:

1. $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$
2. $A\,(B+C) = A\,B + A\,C$
3. $(B+C)\,A = B\,A + C\,A$
4. $k\,(A\,B) = (k\,A)\,B = A\,(k\,B)$ gde je k skalar.

Vektorski prostor u kome je definisana i operacija množenja vektora koja zadovoljava ove uslove naziva se algebra.

- Za skup $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{M_n}(R)$ kažemo da je algebra matrica ukoliko je zatvoren za sabiranje, množenje i množenje skalarima; primetimo da tada on ima sve osobine pobrojane u teoremama 3.1 i 3.2

Primer 3.6. 1. $A\,B + A\,C + A^2 = A(A+B+C)$ (izvlačenje ‘levog’ A)

2. $B\,A + C\,A + A^2 = (B+C+A)A$ (izvlačenje ‘desnog’ A)
3. $(A+B)(C+D) = A\,C + A\,D + B\,C + B\,D$
4. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + A\,B + B\,A + B^2$
5. $A\,B + C\,A \neq A(B+C)$ (množenje nije komutativno) .

- Matrice A, B reda n komutiraju ako važi $A\,B = B\,A$.
- Induktivno definišemo stepen kvadratne matrice:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A\,A, \quad .... \quad A^{n+1} = A^n\,A$$

- Opštije, za svaki polinom $p(t) = a_n\,t^n + a_{n-1}t^{n-1} ... + a_1\,t + a_0$ definišemo matrični polinom:

$$p(A) = a_n\,A^n + a_{n-1}A^{n-1} ... + a_1\,A + a_0\,I$$

Teorema 3.7. Ako su $f(t)$ i $g(t)$ polinomi tada je:

1. $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$
2. $(f\,g)(A) = f(A)\,g(A)$
3. $f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A)$.

Dokaz. Videti Problem 4.11

• Glavna dijagonala kvadratne matrice (main diagonal) ide iz gornjeg levog u donji desni ugao; ona sadrži elemente $a_{11}\ a_{22}\ ...\ a_{nn}$

• $\mathrm{tr}(A)$, ili trag kvadratne matrice (trace) $A = (a_{ij})_{n,n}$ je skalar definisan kao suma elemenata glavne dijagonale:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

Teorema 3.8. Ako je k skalar i $A, B \in \mathbf{M_n}(R)$ tada važi:

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
2. $\mathrm{tr}(k\,A) = k\,\mathrm{tr}(A)$
3. $\mathrm{tr}(A\,B) = \mathrm{tr}(B\,A)$

Dokaz. Videti Problem 4.10

3.7 Elementarne transformacije vrsta matrice, elementarne matrice

Elementarne transformacije vrsta matrice su:

(E_1) Zamena mesta dve vrste ; $\mathbf{v_i} \leftrightarrow \mathbf{v_j}$

(E_2) Množenje jedne vrste skalarom $k \neq 0$; $\mathbf{v_i} \rightarrow k\,\mathbf{v_i}$

(E_3) Dodavanje i-toj vrsti k puta j-ta vrsta $(i \neq j!)$; $\mathbf{v_i} \mapsto \mathbf{v_i} + k\,\mathbf{v_j}$

• Svaka od ovih operacija ima inverznu operaciju istog tipa:

(1) $\mathbf{v_i} \leftrightarrow \mathbf{v_j}$ je inverzna sama sebi ;

(2) $\mathbf{v_i} \rightarrow \frac{1}{k}\,\mathbf{v_i}$ je inverzna za $\mathbf{v_i} \rightarrow k\,\mathbf{v_i}$;

(3) $\mathbf{v_i} \mapsto \mathbf{v_i} - \frac{1}{k}\,\mathbf{v_j}$ je inverzna za $\mathbf{v_i} \mapsto \mathbf{v_i} + k\,\mathbf{v_j}$.

• Matrice istog formata A i B su ekvivalentne (po vrstama), u zapisu $A \sim_v B$, ako B može biti dobijena iz A primenom niza elementarnih transformacija vrsta.

• $\sim_v$ je relacija ekvivalencije (na skupu matrica fiksiranog tipa):

(1) $A \sim_v A$

(2) $A \sim_v B$ povlači $B \sim_v A$

(3) $A \sim_v B$ i $B \sim_v C$ povlači $A \sim_v C$

Teorema 3.9. Svaka matrica je ekvivalentna stepenastoj matrici istog formata.

Dokaz. ...

Kanonske matrice su stepenaste matrice sa jedinicama na prvom ne-nula mestu u svakoj vrsti, a u koloni svake takve jedinice moraju se nalaziti još samo nule. Kasnije ćemo dokazati jače tvrdjenje od prethodnog :

Teorema 3.10. Svaka matrica je ekvivalentna jedinstvenoj kanonskoj matrici istog formata.

Neka e označava elementarnu transformaciju matrice (neku od $(E_1), (E_2), (E_3)$) i neka je $e(I)$ matrica dobijena primenom operacije e na jediničnu matricu I. Takve matrice su elementarne matrice koje odgovaraju el.transformacijama vrsta.

- Svaka elementarna operacija na vrstama matrice je množenje odgovarajućom elementarnom matricom s' leva.

Primer 3.7. Prethodno tvrdjenje na primeru 3×3 matrica:

(1) e je 'zameni mesta druge i treće vrste' : $e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

(2) e je 'pomnoži drugu vrstu sa k' : $e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(3) e je 'dodati drugoj vrsti k puta treća': $e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kc_1 & b_2 + kc_2 & b_3 + kc_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.11. Neka je e elementarna transformacija vrsta i neka je $e(I_m)$ njena odgovarajuća elementarna matrica.

1. Primenom operacije e na matricu A (koja ima m vrsta) dobijamo matricu $e(I)\,A$.
2. $A \sim_v B$ ako i samo ako postoji matrica P koja je proizvod elementarnih matrica takva da je $A = P\,B$

Dokaz.

3.8 Inverzna matrica

Definicija 3.4. Kvadratna matrica A je inverzibilna (invertible or nonsingular) ako postoji matrica B istog tipa takva da je

$$A\,B = B\,A = I$$

- Ako je A inverzibilna tada postoji tačno jedna matrica koja zadovoljava gornji uslov; zovemo je inverzna matrica matrice A (ili inverz od A) i obeležavamo sa A^{-1}:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

- Ako je B inverz za A onda je A inverz za B $\quad ((A^{-1})^{-1} = A)$.

- Ako su A i B inverzibilne tada je i $A\,B$ inverzibilna i važi:

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

Opštije: $\quad (A_1 A_2 ... A_n)^{-1} = A_n^{-1} ... A_2^{-1} A_1^{-1}$

- Ako A ima nula-vrstu onda nije inverzibilna.

Primer 3.8. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$

Znači: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Ako je A inverzibilna i B takva da važi $B\,A = I$ (ili $A\,B = I$) tada je $B = A^{-1}$:

$$B\,A = I \text{ pomnožimo s' desna sa } A^{-1}:$$

$$B\,A\,A^{-1} = I\,A^{-1}$$

$$B\,I = A^{-1} \qquad B = A^{-1}$$

- Elementarne matrice su inverzibilne.
- Proizvod elementarnih matrica je inverzibilna matrica.
- $A \sim_v B$ ako i samo ako postoji niz elementarnih matrica $E_1, ..., E_m$ takvih da je

$$E_m\,E_{m-1}\,...\,E_1 A = B$$

Teorema 3.12. Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(1) A je inverzibilna;

(2) $A \sim_v I$ ili: primenom niza elementarnih transformacija vrsta matricu A možemo svesti na jediničnu;

(3) A je proizvod elementarnih matrica (koje odgovaraju el. trans. vrsta).

Dokaz: Predpostavimo da je A inverzibilna i predpostavimo da je A ekvivalentna matrici B koja je u kanonskoj formi. To znači da postoje elementarne matrice $E_1, E_2, ..., E_n$, takve da $E_1, E_2, ..., E_n A = B$. Kako su A i svaka elementarna matrica inverzibilne, B je takodje inverzibilna. Ali ako $B \neq I$, onda B ima nula-vrstu; odakle sledi da B nije inverzibilna. Tako da $B = I$ pa (1) implicira (2). Ako (2) važi, onda postoje elementarne matrice $E_1, E_2, ..., E_n$ takve da $E_1, E_2, ..., E_n A = I$. Kako je $A = (E_n, ..., E_1)^{-1} = E_1^{-1}...E_n^{-1}$. Ali E_i^{-1} je isto elementarna matrica. Odavde sledi da (2) implicira (3). Ako (3) važi, onda $A = E_1 E_2 ... E_n$. E_i je inverzibilna matrica; zbog njihovog proizvoda i A je inverzibilna, a odatle sledi da (3) implicira (1). Prema tome, teorema je dokazana.

Teorema 3.13. Ako je $A\,B = I$ tada je i $B\,A = I$ (prema tome $A^{-1} = B$)

Dokaz

Teorema 3.14. $B \sim_v A$ ako i samo ako postoji inverzibilna matrica P takva da je $B = P\,A$.

Dokaz: Predpostavimo $B \sim_v A$, tj. $B = e_n(...(e_1(A))...) = E_s ... E_1 A = PA$ gde je $P = E_n ... E_1$ inverzibilna matrica. Prema Teoremi 3.12, P je proizvod elementarnih matrica, pa se B moze dobiti iz A elementarnim transformacijama vrsta što znači $B \sim_v A$.

Posledica 3.1. Ako je $A \sim_v B$ i B ima nula-vrstu onda A nije inverzibilna.

Dokaz. Neka je $A \sim_v B$. Tada postoji inverzibilna P takva da je $B = P\,A$. Ako je A inverzibilna onda je i $P\,A$ inverzibilna; ali $B = P\,A$ nije inverzibilna. Prema tome A nije inverzibilna. □

Znači: ako (kvadratnu) matricu A možemo elementarnim transformacijama vrsta svesti na matricu sa nula-vrstom tada A nije inverzibilna!

- Videćemo kasnije i drugi način ispitivanja postojanja i izračunavanja inverzne matrice: dokazaćemo da je A inverzibilna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$ i u tom slučaju je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

3.9 Izračunavanje inverzne matrice elementarnim transformacijama vrsta

Teorema 3.12 (1) $\Leftrightarrow$ (2) kaže: A je inverzibilna ako i samo ako se može svesti na jediničnu matricu. Neka je A inverzibilna reda n. Tada postoji niz elementarnih matrica takvih da je

$$E_m \dots E_2\, E_1 A = I$$

Pomnožimo s' desna sa A^{-1}:

$$E_m \dots E_2\, E_1 A A^{-1} = I A^{-1}$$

$$E_m \dots E_2\, E_1 = A^{-1}$$

Strategija izračunavanja A^{-1}: (I) Formiramo blok matricu $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$

(II) Svodimo je na kanonsku formu (t.j. na I) elemetarnim transformacijama vrsta (množenjem s'leva elementarnim matricama $E_1, E_2, \dots, E_m$)

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 A & E_1 I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_2 E_1 A & E_2 E_1 \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$\begin{pmatrix} E_m \dots E_1 A & E_m \dots E_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

Algoritam za izračunavanje A^{-1}

Korak 1. Formirati $n \times 2n$ blok matricu $M = (A\ I)$;

Korak 2. Elementarnim transformacijama vrsta svesti matricu M na stepenastu formu (i tada je A-blok gornje-trougaon, t.j. ima nule ispod glavne dijagonale); ako stepenasta forma ima nula-vrstu u A-bloku STOP (A nije inverzibilna);

Korak 3. Elementarnim transformacijama produžiti svodjenje do kanonske forme: ona je oblika $(I\ B)$;

Korak 4. $A^{-1} = B$.

Objašnjenje STOP u koraku 2 je zbog Posledice 3.1: ako $A \sim_v B$ i B ima nula-vrstu tada A nije inverzibilna!

Primer 3.9. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 5 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim_v$$

$$\sim_v \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \vdots & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -5 & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Prema tome $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Primer 3.10. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_v \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_v$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

nema nula-vrste u A-bloku pa produžavamo:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_v \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_v$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Prema tome $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Primer 3.11. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_v \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_v$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dobili smo nula-vrstu: STOP! A nije inverzibilna.

3.10 Elementarne transformacije kolona

Posmatrajmo proizvod

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

Prva kolona u proizvodu je

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2n}b_{n1} \\ ... \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+...+a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + b_{k1}\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ ... \\ a_{mk} \end{pmatrix} = b_{11}\mathbf{A^1} + b_{21}\mathbf{A^2} + ... + b_{k1}\mathbf{A^k}$$

gde je $A = \begin{pmatrix} \mathbf{A^1} & \mathbf{A^2} & ... & \mathbf{A^k} \end{pmatrix}$ predstavljena preko vektora kolona

- Ukoliko matricu A predstavimo preko vektora kolona tada je množenje matricom B (s' desna) delovanje njenih kolona na kolone matrice A.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A^1} & \mathbf{A^2} & ... & \mathbf{A^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & ... & b_{3n} \\ . & . & ... & . \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}\mathbf{A^1} + b_{21}\mathbf{A^2} + ... + b_{k1}\mathbf{A^k} & ... & b_{1n}\mathbf{A^1} + b_{2n}\mathbf{A^2} + ... + b_{kn}\mathbf{A^k} \end{pmatrix}$$

Elementarne transformacije kolona matrice su:

(F_1) Zamena mesta dve kolone ; $\mathbf{k^i} \leftrightarrow \mathbf{k^j}$

(F_2) Množenje jedne kolone skalarom $k \neq 0$; $\mathbf{k^i} \rightarrow k\,\mathbf{k^i}$

(F_3) Dodavanje i-toj koloni k puta j-ta kolona ($i \neq j!$);

$$\mathbf{k^i} \mapsto \mathbf{k^i} + k\,\mathbf{k^j}$$

- Svaka od ovih operacija ima inverznu operaciju istog tipa:

(1) $\mathbf{k^i} \leftrightarrow \mathbf{k^j}$ je inverzna sama sebi ;

(2) $\mathbf{k^i} \rightarrow \frac{1}{k}\mathbf{k^i}$ je inverzna za $\mathbf{k^i} \rightarrow k\,\mathbf{k^i}$;

(3) $\mathbf{k^i} \mapsto \mathbf{k^i} - k\,\mathbf{k^j}$ je inverzna za $\mathbf{k^i} \mapsto \mathbf{k^i} + k\,\mathbf{k^j}$.

Neka f označava elementarnu transformaciju kolona matrice (neku od F_1, F_2, F_3) i neka je $f(I)$ matrica dobijena primenom operacije f na jediničnu matricu I. Takve matrice su elementarne matrice koje odgovaraju el.transformacijama kolona. Svaka elementarna operacija je množenje odgovarajućom elementarnom matricom s' desna

Primer 3.12. Elementarne matrice koje odgovaraju operacijama na kolonama 3×3 matrica

(1) Zamena mesta druge i treće kolone: $f(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}$$

(2) Množenje druge kolone sa k: $f(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(3) Dodati drugoj koloni k puta treća: $e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ka_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 + kb_3 & b_3 \\ c_1 & c_2 + kc_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.15. Neka je f elementarna transformacija kolona i F njena odgovarajuća matrica. Tada je $f(A) = A\,F$.

- Matrica operacije f: dodati drugoj koloni k puta treća

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Matrica operacije e: dodati drugoj vrsti k puta treća

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Neka je f bilo koja el. trans. kolona i e odgovarajuća transformacija vrsta. Važi: $F = E^T$

f možemo primeniti na bilo koju matricu A na sledeći način:

(1) prebacimo kolone u vrste: $A \mapsto A^T$

(2) izvršimo e: $A^T \mapsto e(A^T)$

(3) vratimo vrste u kolone: $e(A^T) \mapsto (e(A^T))^T$

$$f(A) = (e(A^T))^T$$

Kako je $f(A) = A\,F$ i $e(A^T) = E\,A^T$, koristeći osbine transponovanja, imamo:

$$AF = (EA^T)^T \quad AF = (A^T)^T E^T \quad AF = AE^T$$

Za $A = I$ imamo: $F = E^T$

- Matrica B je ekvivalentna (po kolonama) (column equivalent) matrici A ako B možemo dobiti uzastopnom primenom elementarnih transformacija kolona.

Teorema 3.16. B je ekvivalentna (po kolonama) sa A ako i samo ako postoji inverzibilna matrica Q takva da je $B = AQ$.

- Podsetimo: B je ekvivalentna po vrstama sa A (može se dobiti transformacijama vrsta) ako i samo ako postoji inverzibilna matrica P takva da je $B = PA$.

3.11 Ekvivalentnost matrica

Matrice A i B su ekvivalentne ako se A primenom el. transformacija vrsta i kolona može svesti na B.

- Ekvivalentnost je relacija ekvivalencije.
- B je ekvivalentna sa A ako i samo ako postoje inverzibilne matrice P i Q takve da je $B = P\,A\,Q$.

Teorema 3.17. Svaka $m \times n$ matrica je ekvivalentna tačno jednoj blok matrici oblika $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gde je I_r jedinična $r \times r$ matrica. (r je rang matrice A)

Dokaz: Dokaz se sastoji iz sledeceg algoritma:

Korak 1. Matricu A svedemo na kanonsku formu, sa vodećim ne nula članovima $a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{mj_m}$.

Korak 2. Zamenimo C_1 i C_{1j_1}, zamenimo C_2 i C_{2j_2},..., i zamenimo C_m i C_{j_n}. Ovo daje matricu u formi $\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sa vodećim ne nula članom $a_{1\,1}, a_{2\,2}, ..., a_{m\,m}$.

Korak 3. Iskoristiti operacije nad kolonama, sa a_{ii} kao pivotima, da bi zamenili član u B sa nulom, npr. za $i = 1, 2, ..., r$ i $j = r+1, r+2, ..., n$, primeniti operacije $-b_{ij}C_i + C_j \to C_j$. Konacna matrica treba da izgleda $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.12 Smena promenljivih (promena koodinatnog sistema), slične matrice

Neka je

$$x_i = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + ... + p_{in}y_n \quad i = 1, 2, ..., n$$

linearna smena promenljivih. Ona je inverzibilna ako je matrica $P = (p_{ij})_{n,n}$ inverzibilna.

$$X = P\,Y \;\text{ ako i samo ako }\; Y = P^{-1}\,X$$

(X je vektor kolona $(x_1\,x_2\,...\,x_n)^T$ a $Y = (y_1\,y_2\,...\,y_n)^T$)

Geometrijsko tumačenje linearne inverzibilne smene: promena koordinatnog sistema. Posmatrajmo standardan **i j**-koordinatni sistem u R^2 i neka je $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Definišemo

$$p : R^2 \longrightarrow R^2 \;\text{ sa }\; p(X) = P\,X$$

gde je $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor kolona . Neka je $p(X) = Y$ (Y su koordinate tačke $p(X)$ u standardnom koordinatnom sistemu):

$$p(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= x_1\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(X) = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{r} + x_2\mathbf{s}$$

gde su $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = p(\mathbf{i})$ i $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = p(\mathbf{j})$ vektori koji odredjuju 'novi koordinatni sistem' u ravni (slika ...) (**r s**-koordinatni sistem): svaki (vektor) tačka se može na jedinstven način napisati kao linearna kombinacija $a_1\,\mathbf{r} + a_2\,\mathbf{s}$; u tom slučaju kažemo da su (a_1, a_2) koordinate te tačke u $\mathbf{r}, \mathbf{s}$-koordinatnom sistemu.

• Svaku kvadratnu matricu P možemo posmatrati i kao uvodjenje novog koordinatnog sistema.

• Gornji račun pokazuje da tačka X u standardnom ima iste koordinate kao tačka $Y = p(X)$ u novom koordinatnom sistemu. Znači: ako imamo koordinate tačke u novom sistemu tačke X, njene koordinate u starom sistemu računamo po formuli $Y = P\,X$.

• Svaka tačka ravni ima koordinate (y_1, y_2) u odnosu na standardni koordinatni sistem i (x_1, x_2) u odnosu na 'novi'. Kako izračunati (y_1, y_2) preko (x_1, x_2):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad Y = P\,X$$

• Kako izračunati (x_1, x_2) preko (y_1, y_2) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad Y = P^{-1}\, X$$

- Slično važi i u R^n !

Neka je P inverzibilna matrica kojom uvodimo novi koordinatni sistem:

$$p : R^n \longrightarrow R^n \qquad p(X) = P\,X$$

• Neka je preslikavanje (zvano linearni operator) $f : R^n \longrightarrow R^n$ dato sa $f(X) = A\,X$ gde je matrica A inverzibilna (naravno da je ovo sve u starim koordinatama kako računamo $f(X)$).

• Kako izračunati $f(Z)$ preko Z u novim koordinatama (ili za date nove koordinate tačke Z, kojom formulom izračunavamo $f(Z)$ u novim koordinatama):
(1) izračunamo stare koordinate tačke Z (to je $P\,Z$)
(2) pomnožimo stare koordinate s'leva matricom A, dobili smo stare koordinate tačke $f(Z)$ (rezultat je $A\,P\,Z$)
(3) Pomnožimo s'leva matricom P^{-1} da dobijemo nove koordinate tačke $f(Z)$. Rezultat je:

$$f(Z) = (P^{-1}AP)Z$$

Definicija 3.5. Matrice A i B su slične ako i samo ako postoji matrica P takva da je $B = P^{-1}\,A\,P$.

3.13 Specijalni tipovi kvadratnih matrica

1. Dijagonalne matrice Kvadratna matrica je dijagonalna ako su joj svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli. Dijagonalnu matricu (a_{ij}) reda n označavamo sa $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}(2,3) \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \text{diag}(3,0,-9)$$

Skup svih dijagonalnih matrica reda n čini algebru matrica (zatvoren je za sabiranje, množenje i množenje skalarom); svake dijagonalne matrice istog reda komutiraju pa je to komutativna algebra matrica.

2. Trougaone matrice Kvadratna matrica je gornje trougaona ili samo trougaona (upper triangular or triangular) ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale nule; na primer:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• Skup svih gornje trougaonih matrica reda n čini algebru matrica (zatvoren je za sabiranje, množenje i množenje skalarom) .

Teorema 3.18. Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ gornje trougaone matrice reda n.

1. $A + B$ je trougaona sa dijagonalom $(a_{11} + b_{11}, ..., a_{nn} + b_{nn})$;
2. $k\,A$ je trougaona sa dijagonalom $(ka_{11}, ka_{22}, ..., ka_{nn})$;
3. $A\,B$ je trougaona sa dijagonalom $(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, ..., a_{nn}b_{nn})$;

4. Za svaki polinom $f(x)$ matrica $f(A)$ je trougaona sa dijagonalom $(f(a_{11}), f(a_{22}), ..., f(a_{nn}))$;

5. A je inverzibilna ako i samo ako je svaki dijagonalni element a_{ii} različit od nule .

Dokaz ...

- Donje trougaona (lower triangular) matrica je kvadratna matrica koja ima sve elemente iznad glavne dijagonale jednake nuli. Za njih važi analog Teoreme 3.18.

3. Simetrične matrice Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ je simetrična ako je $A^T = A$; simetrija je u odnosu na glavnu dijagonalu: $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ... & 3 & 1 & 0 \\ 3 & ... & 7 & 5 \\ 1 & 7 & ... & 9 \\ 0 & 5 & 9 & ... \end{pmatrix} \quad (\text{... je bilo šta}).$$

- Skup svih simetričnih matrica reda n je zatvoren za sabiranje i množenje skalarom ali nije za množenje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Matrica $A = (a_{ij})$ je koso-simetrična ako važi $A^T = -A$; ekvivalentno $a_{ij} = -a_{ji}$. Elementi na glavnoj dijagonali moraju biti nule zbog $a_{ii} = -a_{ii}$.

Teorema 3.19. Neka je A (bilo koja) kvadratna matrica reda n. Tada:

1. $A + A^T$ je simetrična;
2. $A - A^T$ je koso simetrična;
3. A se može napisati u obliku $A = B + C$ gde je B simetrična a C koso simetrična matrica.

4. Ortogonalne matrice Kvadratna matrica A reda n je ortogonalna ako važi

$$A\,A^T = A^T\,A = I$$

- Ortogonalna matrica A je inverzibilna i važi $A^{-1} = A^T$.

Primer 3.13. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ je ortogonalna:

Matrica $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ je ortogonalna ako i samo ako:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

što je ekvivalentno sa :

$$\begin{array}{ccc} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{array}$$

Označimo vektore vrsta $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbf{a} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1 & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0 & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1 & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 0 & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = 0 & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = 1 \end{array}$$

Ovo znači da je $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ortonormirani skup vektora (t.j. da je to skup jediničnih vektora koji su medjusobno normalni).

Teorema 3.20. Neka je A kvadratna matrica reda n. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

(1) A je ortogonalna matrica;

(2) Vektori vrsta matrice A čine ortonormirani skup vektora;

(3) Vektori kolona matrice A čine ortonormirani skup vektora.

Teorema 3.21. Ortogonalna 2×2 matrica ima oblik $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. Normalne matrice Kvadratna matrica A je normalna ako komutira sa svojom transponovanom matricom: $A\,A^T = A^T\,A$.

- Dijagonalne, simetrične, koso simetrične i ortogonalne matrice su normalne. Postoje normalne matrice koje nisu ni u jednoj od ovih klasa, na primer

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.22. Svaka normalna 2×2 matrica je ili skalarna matrica ili je zbir skalarne i koso simetrične matrice.

4 VEKTORSKI PROSTORI

Definicija 4.1. Neka je K polje (obično je $K = R$) i V neprazan skup na kome su definisane operacije sabiranja i množenja skalarom. V je vektorski prostor nad poljem K ukoliko su zadovoljene sledeće aksiome:

(A_1) Za sve $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ važi
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

(A_2) Postoji $\mathbf{0} \in V$ tako da za sve $\mathbf{u} \in V$ važi:
$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

(A_3) Za svaki $\mathbf{u} \in V$ postoji **-u** $\in V$ takav da
$$\mathbf{u} + (\textbf{-u}) = \mathbf{0}$$

(A_4) Za sve $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

(M_1) Za sve $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ i sve $k \in K$
$$k\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$$

(M_2) Za sve $\mathbf{u} \in V$ i sve $k, k' \in K$
$$(k + k')\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + k'\,\mathbf{u}$$

(M_3) Za sve $\mathbf{u} \in V$ i sve $k, k' \in K$
$$(k\,k')\,\mathbf{u} = k\,(k'\,\mathbf{u})$$

(M_4) Za sve $\mathbf{u} \in V$ $\quad 1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

- $(A_1) - (A_4)$ se odnose isključivo na sabiranje (addition): $(V, +)$ je komutativna grupa.

- Elemente skupa V nazivamo vektorima, vektor $\mathbf{v} \in V$ označavamo i sa $\vec{\mathbf{v}}$; elementi polja su skalari ili brojevi, obično je $K = R$.

- Sve ukupno, ovo su 'aksiome za linearno kombinovanje'.

Teorema 4.1. Za sve vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^n$ i skalare $k, k' \in R$ važi:

1. Za sve $k \in K$: $k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. Za sve $\mathbf{u} \in V$: $0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
3. Ako je $k\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ tada je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ili $k = 0$.
4. Za sve $k \in K$ i $\mathbf{u} \in V$: $(-k)\,\mathbf{u} = k\,(\mathbf{-u}) = \mathbf{-}(k\mathbf{u})$

Dokaz:

1. Prema aksiomi (A_2), sa $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, imamo $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Otuda iz aksiome (M_1),

$$k\,\mathbf{0} = k\,(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k\,\mathbf{0} + k\,\mathbf{0}$$

Dodavanjem $-(k\,\mathbf{0})$ na obe strane dobijamo trazeni rezultat.

2. U polju važi: $0 + 0 = 0$; otuda po aksiomi (M_2),

$$0\,\mathbf{u} = (0 + 0)\,\mathbf{u} = 0\,\mathbf{u} + 0\,\mathbf{u}$$

Dodavanjem $-(0\mathbf{u})$ na obe strane dobijamo željeni rezultat.

3. Predpostavimo da je $k\,\mathbf{u} = 0$ i $k \neq 0$. Onda postoji skalari k^{-1} takav da je $k^{-1}\,k = 1$; otuda

$$\mathbf{u} = 1\,\mathbf{u} = (k^{-1}\,k)\,\mathbf{u} = k^{-1}\,(k\,\mathbf{u}) = k^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

4. Koristeći deo 1. ove teoreme i (A3) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ i imamo

$$\mathbf{0} = k\,\mathbf{0} = k\,(\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = k\,\mathbf{u} + k\,(-\mathbf{u})$$

Dodavanjem $-(k\,\mathbf{u})$ na obe strane dobijamo $-(k\,\mathbf{u}) = k\,(-\mathbf{u})$. Dalje, koristeći $k + (-k) = 0$ i 2., imamo

$$\mathbf{0} = 0\,\mathbf{u} = (k + (-k))\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + (-k)\,\mathbf{u}$$

Dodavanjem $-(k\,\mathbf{u})$ na obe strane dolazimo do $-(k\,\mathbf{u}) = (-k)\,\mathbf{u}$. Odatle $(-k)\,\mathbf{u} = k\,(-\mathbf{u}) = -(k\,\mathbf{u})$ □

4.1 Primeri vektorskih prostora

1. Prostor R^n

R^n je skup svih n-torki realnih brojeva (vektora) koje se sabiraju po pravilu

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \ \ (\in R^n)$$

i množe skalarom po pravilu: množenje vektora skalarom (brojem) $k \in R$:

$$k\,\mathbf{u} = (k\,u_1, k\,u_2, ..., k\,u_n) \ \ (\in R^n)$$

$\mathbf{0}$ vektor je $(0, 0, ..., 0)$ dok je $\mathbf{-}(u_1, ..., u_n) = (-u_1, ..., -u_n)$.

2. Prostor matrica $\mathbf{M_{m,n}}$

$\mathbf{M_{m,n}}(R)$ je skup svih $m \times n$ matrica (elementi su realni brojevi). $\mathbf{M_{m,n}}(R)$ je vektorski prostor nad R u odnosu na uobičajeno sabiranje matrica i množenje matrice skalarom. $\mathbf{0}$ je nula-matrica a **-**A je $-A$.

3. Prostor polinoma $\mathbf{P}(\mathbf{t})$

Neka je $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ skup svih polinoma

$$a_0 + a_1\, t + ... + a_n\, t^n \qquad n = 0, 1, ...$$

gde su koeficijenti iz nekog polja K (obično $K = R$). $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ je vektorski prostor u odnosu na uobičajeno sabiranje polinoma i množenje polinoma skalarom (brojem). $\mathbf{0}$ vektor je konstantni polinom 0 i

$$\text{-}(a_0 + a_1\, t + ... + a_n\, t^n) \quad \text{je} \quad - a_0 - a_1\, t - ... - a_n\, t^n$$

4. Prostor funkcija $\mathbf{F}(\mathbf{X})$

Neka je X proizvoljan skup i neka je $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ skup svih funkcija $f : X \longrightarrow R$. Definišemo zbir f-ja (+) i množenje f-je skalarom na 'prirodan' način:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \qquad (k\,\mathbf{f})(x) = k\,\mathbf{f}(x)$$

$\mathbf{0}$-funkcija je definisana $\mathbf{0}(x) = 0$ za sve $x \in X$ dok je (**-f**)$(x) = -\mathbf{f}(x)$

4.2 Potprostori

Neka je V vektorski prostor i $W \subset V$. W je potprostor prostora V ako i samo ako je W vektorski prostor u odnosu na sabiranje i množenje skalarom.

Teorema 4.2. Neka je V vektorski prostor i $W \subset V$. W je potprostor prostora V ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. $\mathbf{0} \in W$
2. W je zatvoren za sabiranje vektora:

$$\text{ako } \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \ \ \text{tada i } \ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W.$$

3. W je zatvoren za množenje vektora skalarom:

$$\text{ako } \mathbf{v} \in W \ \ \text{tada } k\,\mathbf{v} \in W \text{ za svaki skalar } k.$$

Dokaz. Videti Problem 5.4

Posledica 4.1. W je potprostor prostora V ako i samo ako

1. $\mathbf{0} \in W$ i
2. Za sve skalare a, b i vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ važi $a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} \in W$

Dokaz. Videti Problem 5.5

Primer 4.1. Primeri potprostora

1. $\mathbf{0}$ i V su potprostori prostora V.
2. $W = \{(x, y, 0) \,|\, x, y \in R\}$ je potprostor prostora R^3
3. Skup svih (gornje) trougaonih matrica reda n je potprostor od $\mathbf{M_{n,n}}$ (isto i za donje trougaone, simetrične, dijagonalne, ...)
4. Skup svih polinoma stepena $\leq n$ je potprostor prostora $\mathbf{P}(\mathbf{t})$.
5. Prava ili ravan koja sadrži koordinatni početak je potprostor prostora R^3.

Teorema 4.3. Presek (više) potprostora je potprostor.

Dokaz ...

Teorema 4.4. Skup rešenja homogenog sistema $A\,X = \mathbf{0}$ po n promenljivih je potprostor od R^n.

Dokaz ...

- Skup rešenja nehomogenog sistema $A\,X = B$ gde je $B \neq \mathbf{0}$ nije potprostor od R^n pošto ne sadrži $\mathbf{0}$.

4.3 Linearne kombinacije

Neka je V vektorski prostor i $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$. Vektor koji se može napisati u obliku

$$a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + ... + a_n\,\mathbf{v}_n$$

je linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. Skup svih takvih linearnih kombinacija je linearni omotač ili lineal skupa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ (linear span) i označava se sa

$$\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$$

Teorema 4.5. Neka je $S \subset V$.
(1) span(S) je potprostor prostora V.
(2) span(S) je najmanji potprostor prostora V koji sadrži S:

$$\text{ako je } W \text{ potprostor prostora } V \text{ i } S \subseteq W \text{ tada je } \mathrm{span}(S) \subseteq W.$$

Vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ generišu prostor V (generate or span) ako je

$$V = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$$

Drugim rečima $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ generišu V ako i samo ako je svaki $\mathbf{u} \in V$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$:

$$\mathbf{u} = a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + ... + a_n\,\mathbf{v}_n$$

Primer 4.2. 1. Vektori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ generišu R^2.

2. Vektori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ generišu R^3.

3. $\mathbf{P(t)} = \mathrm{span}(\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t^2}, \mathbf{t^3}, ...)$

4.4 Linearna zavisnost

Definicija 4.2. Neka je V vektorski prostor. Vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ su linearno zavisni (linearly dependent) ukoliko postoje skalari $a_1, a_2, ..., a_n$ koji nisu svi jednaki nuli tako da

$$a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + ... + a_n\,\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\ .$$

U suprotnom, oni su linearno nezavisni (linearly independent).

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ su linearno zavisni ako je $\mathbf{0}$ medju njima.

- Jedan ne-nula vektor čini linearno nezavisan skup.

- Ako su dva od vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ jednaka onda su linearno zavisni.

- Svaki podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan; svaki nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan.

- Dva vektora $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ su linearno zavisna ako i samo ako je jedan od njih jednak drugom pomnožen nekim skalarom: $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$ ili $\mathbf{v} = k\,\mathbf{u}$

Primer 4.3. Vektori $(2,1,1)$, $2(1,2,1)$ i $(4,-1,1)$ su linearno zavisni:

$$3\,(2,1,1) - 2(1,2,1) - (4,-1,1) = (0,0,0)$$

Primer 4.4. Ispitujemo da li su vektori $(6,2,3,4)$, $(0,5,-3,1)$ i $(0,0,7,-2)$ linearno zavisni: da li postoje x, y, z koji nisu svi jednaki nuli takvi da je:

$$x\,(6,2,3,4) + y\,(0,5,-3,1) + z\,(0,0,7,-2) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 6\,x & & & & & = \ 0 \\ 2\,x & + & 5\,y & & & = \ 0 \\ 3\,x & - & 3\,y & + & 7\,z & = \ 0 \\ 4\,x & + & y & - & 2\,z & = \ 0 \end{array}$$

Rešavanjem dobijamo $x = y = z = 0$ pa su vektori linearno nezavisni.

- Iz prethodna dva primera zaključujemo da se ispitivanje linearne zavisnosti konkretnog skupa vektora u R^n svodi na ispitivanje postojanja netrivijalnog rešenja homogenog sistema linearnih jednačina.

Lema 4.1. Pretpostavimo da su ne-nula vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ linearno zavisni. Tada je jedan od njih linearna kombinacija prethodnih: postoji $k \leq n$ i $a_1, ..., a_{k-1}$ takvi da

$$a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + ... + a_{k-1}\,\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{v}_k\ .$$

Dokaz. Videti Problem 5.36

- U prostoru R^3:

(a) Dva vektora su linearno zavisna ako i samo ako pripadaju istoj pravi koja sadrži i $\mathbf{0}$.
(b) Tri vektora su linearno zavisna ako i samo ako pripadaju istoj ravni koja sadrži i $\mathbf{0}$.

Teorema 4.6. Svi ne-nula vektori vrsta matrice u stepenastoj formi čine linearno nezavisan skup.

Dokaz. Videti Problem 5.37

4.5 Baza i dimenzija

Definicija 4.3. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ je baza (basis) prostora V ako važi:

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ je linearno nezavisan; i

(2) $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = V$.

Definicija 4.4. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ je baza ako i samo ako se svaki vektor prostora V na jedinstven način predstavlja kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

- Prethodne dve definicije su ekvivalentne (za dokaz videti Problem 5.30)

- Prema Definiciji 4.4 svaki vektor $\mathbf{v}$ se na jedinstven način piše u obliku:

$$\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + ... + a_n\,\mathbf{v}_n 1$$

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ su koordinate vektora $\mathbf{v}$ u odnosu na bazu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

Primer 4.5. (1) Neka je $\mathbf{e}_i \in R^n$ vektor kome je i-ta koordinata 1 a ostale su nule. Tada je $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ baza za R^n.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ čine bazu $\mathbf{M_{2,2}}(R)$ zato što se svaka matrica na jedinstven način predstavlja kao linearna kombinacija:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- V je konačno dimenzioni ili n-dimenzioni vektorski prostor ako ima bazu od n elemenata. Oznaka:

$$\dim(V) = n$$

U suprotnom V je beskonačno dimenzioni prostor.

- Naredna teorema utvrdjuje da su svake dve baze konačno dimenzionog prostora jednakobrojne; taj broj je dimenzija vektorskog prostora.

Teorema 4.7. Svake dve baze konačno dimenzionog vektorskog prostora imaju isti broj elemenata.

Dokaz. Naredna lema je ključna ...

Lema 4.2. Pretpostavimo:
- $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = V$ i
- vektori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m \in V$ su linearno nezavisni. Tada:

(1) Važi $m \leq n$ i možemo izabrati tačno $n - m$ $\mathbf{v}_i$-ova: $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, ..., \mathbf{v}_{i_{n-m}}$ tako da je:

$$\mathrm{span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, ..., \mathbf{v}_{i_{n-m}}) = V$$

(2) Svakih $n + 1$ vektora su linearno zavisni.

Dokaz. Videti Problem 5.39

Teorema 4.8. Neka je $\dim(V) = n$.

(1) Svaki skup koji sadrži bar $n + 1$ vektor je linearno zavisan.

(2) Svaki linearno nezavisan skup od n vektora je baza za V.

(3) Ako je $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = V$ tada je $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ baza.

Dokaz. Videti Problem 5.41

Teorema 4.9. Neka je $\mathrm{span}(S) = V$ gde je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$.

(1) Svaki maksimalan linearno nezavisan podskup od S je baza.

(2) Ako iz S izbacimo svaki vektor koji je linearna kombinacija prethodnih, dobićemo bazu za V.

Dokaz. Videti Problem 5.42

Teorema 4.10. Neka je V konačno dimenzioni vektorski prostor i neka je S njegov linearno nezavisan podskup. Tada S možemo produžiti do baze.

Dokaz. Videti Problem 5.43

- $\dim(R^n) = n$

Primer 4.6. Vektori $(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)$ čine stepenastu matricu. Prema Teoremi 4.6 oni su linearno nezavisni, pa su i baza za R^4 prema Teoremi 4.8(3).

Potprostor vektorskog prostora je za sebe vektorski prostor, pa je baza i dimenzija dobro definisana.

Teorema 4.11. Neka je W potprostor n-dimenzionog prostora V. Tada je $\dim(W) \leq \dim(V)$ i: ako je $\dim(W) = n$ onda je $W = V$.

Dokaz...

Primer 4.7. Neka je W potprostor prostora R^3:

(1) $\dim(W) = 0$ ako i samo ako je $W = \{\mathbf{0}\}$

(2) $\dim(W) = 1$ ako i samo ako je W prava koja sadrži koordinatni početak.

(3) $\dim(W) = 2$ ako i samo ako je W ravan koja sadrži koordinatni početak.

(4) $\dim(W) = 3$ ako i samo ako je $W = R^3$.

4.6 Prostor vrsta matrice

Vektori vrsta matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v_1} = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})\ \mathbf{v_2} = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})\ .....\ \mathbf{v_m} = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$$

posmatrani kao vektori u R^n generišu potprostor prostora R^n; to je <u>prostor vrsta matrice A</u> (rowspace of A):

$$\mathrm{rowsp}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_m})$$

- <u>Rang vrsta matrice A</u> je dimenzija prostora njenih vrsta.

Teorema 4.12. Ekvivalentne (po vrstama) matrice imaju isti prostor vrsta.

Dokaz ...

Teorema 4.13. Kanonske matrice imaju isti prostor vrsta ako i samo ako su jednake.

Dokaz. Videti Problem 5.51

Sledeću teoremu smo već koristili iako je tek sada dokazujemo

Teorema 4.14. Svaka matrica je ekvivalentna (po vrstama) jedinstvenoj kanonskoj matrici.

Dokaz. Videti Problem 5.52

Primer 4.8. Neka je V potprostor od R^3 generisan vektorima

$$(1, 2, 3),\ (4, 5, 6),\ (7, 8, 9)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_v$$
$$\sim_v \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zaključci:

(1) V je potprostor generisan vektorima $(1, 0, -1)$ i $(0, 1, 2)$.

(2) V je potprostor generisan vektorima $(1, 2, 3)$ i $(0, 1, 2)$.

(3) V je potprostor generisan vektorima $(1, 2, 3)$ i $(0, -3, -6)$.

4.7 Odredjivanje baze i dimenzije potprostora u R^n

Podsetimo se:

- Ekvivalentne (po vrstama) matrice imaju isti prostor vrsta.
- Vektori vrsta stepenaste matrice su linearno nezavisni. Oni čine bazu prostora vrsta (pošto svaki linearno nezavisan skup predstavlja bazu potprostora generisanog njima).

Algoritam za odredjivanje baze i dimenzije potprostora generisanog datim vektorima (strana 154.)

Korak 1. Od datih vektora, kao vektora vrsta, formirati matricu.

Korak 2. Svesti matricu na stepenastu formu.

Korak 3. Vektori ne-nula vrsta stepenaste matrice čine bazu; koliko ih je tolika je dimenzija.

Primer 4.9. Neka je V potprostor prostora R^5 generisan vektorima

$$(1,1,1,1,1),\ (1,0,2,1,1),\ (0,0,1,1,1),$$

$$(2,1,5,4,4),\ (3,2,3,2,2),\ (1,-1,2,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim_v \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1,1,1,1,1)$, $(0,1,1,0,0)$, $(0,0,1,1,1)$ je baza za V i $\dim(V) = 3$.

• Algoritam koristimo i da odredimo da li je dati skup vektora linearno nezavisan: odredimo bazu i dimenziju potprostora generisanog tim vektorima. Ako je dimenzija jednaka broju vektora (t.j. ako u stepenastoj matrici nema nula vrsta), oni su linearno nezavisni.

4.8 Rang matrice

Rang vrsta matrice je dimenzija njenog prostora vrsta (t.j. maksimalan broj linearno nezavisnih vektora vrsta). Ako A svedemo na stepenastu formu tada je broj ne-nula vrsta te stepenaste matrice jednak rangu vrsta matrice (ovo smo dokazali u Teoremi 4.6.

Slično prostoru vrsta definišemo i prostor kolona matrice A: to je potprostor generisan vektorima kolona, ili skup svih vektora kolona koji se mogu izraziti kao linearna kombinacija vektora kolona matrice A; **rang kolona** matrice je dimenzija njenog prostora kolona.

Teorema 4.15. Rang vrsta matrice jednak je rangu njenih kolona.

Dokaz: Neka je A proizvoljna $m \times n$ matrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Neka $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_m$ označavaju vektore vrsta:

$$\mathbf{R}_1 = (a_{1\,1}, a_{1\,2}, \ldots, a_{1\,n}), \ldots, \mathbf{R}_m = (a_{m\,1}, a_{m\,2}, \ldots, a_{m\,n})$$

Predpostavimo da je rang vrsta r i da sledeći vektori čine bazu prostora vrsta:

$$\mathbf{S}_1 = (b_{1\,1}, b_{1\,2}, \ldots, b_{1\,n}), \mathbf{S}_2 = (b_{2\,1}, b_{2\,2}, \ldots, b_{2\,n}), \ldots, \mathbf{S}_r = (b_{r\,1}, b_{r\,2}, \ldots, b_{r\,n})$$

Svaka vektor vrste matrice A je linearna kombinacija baznih vrsta:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_1 = k_{11}\ \mathbf{S}_1 + \ k_{12}\ \mathbf{S}_2 + \cdots + k_{1r}\mathbf{S}_r\\
&\mathbf{R}_2 = k_{21}\ \mathbf{S}_1 + \ k_{22}\ \mathbf{S}_2 + \cdots + k_{2r}\mathbf{S}_r\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{R}_m = k_{m1}\mathbf{S}_1 + k_{m2}\mathbf{S}_2 + \cdots + k_{mr}\mathbf{S}_r
\end{aligned}$$

gde su k_{ij} skalari. Fiksirajmo $i \leq n$ i u svakoj od ovih jednakosti izjednačimo i-te koordinate vektora s leve i desne strane, dobijamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \cdots + k_{1r}b_{ri}\\
a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \cdots + k_{2r}b_{ri}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \cdots + k_{mr}b_{ri}
\end{aligned}$$

što zapisujemo na drugi način kao:

$$\begin{pmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \cdots\\ a_{mi}\end{pmatrix} = b_{1i}\begin{pmatrix} k_{11}\\ k_{21}\\ \cdots\\ k_{m1}\end{pmatrix} + b_{2i}\begin{pmatrix} k_{12}\\ k_{22}\\ \cdots\\ k_{m2}\end{pmatrix} + \cdots + b_{ri}\begin{pmatrix} k_{1r}\\ k_{2r}\\ \cdots\\ k_{mr}\end{pmatrix}$$

Drugim rečima, i-ta kolona matrice A je linearna kombinacija sledećih r vektora

$$\begin{pmatrix} k_{11}\\ k_{21}\\ \cdots\\ k_{m1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12}\\ k_{22}\\ \cdots\\ k_{m2}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k_{1r}\\ k_{2r}\\ \cdots\\ k_{mr}\end{pmatrix}$$

Kako ovi vektori ne zavise od izbora $i \leq n$ zaključujemo da je svaki vektor kolone matrice A linearna kombinacija ovih r vektora, što znači da oni generišu ceo prostor kolona pa je njegova dimenzija najviše r, odnosno rang kolona matrice A je $\leq r$.

Ovim smo dokazali da je rang kolona matrice A nije veći od ranga vrsta. Ako primenimo ovo na matricu A^T dobićemo obrnutu nejednakost, pa zaključujemo da su ova dva ranga jednaka. □

• Alternativni dokaz prethodne teoreme je zasnovan na kasnije dokazanim lemama 4.3 i 4.4: Neka je $A \sim_v B$ gde je B stepenasta matrica koja ima r ne-nula vrsta. Prema Teoremi 4.12 A i B imaju isti prostor vrsta, a prema Teoremi 4.6 vektori ne-nula vrste matrice B su linearno nezavisni pa chine bazu prostora vrsta. Znachi rang vrsta matrice A je r.

Predstavimo sada matrice preko vektora kolona:

$$A = (\mathbf{A}^1\, \mathbf{A}^2\, ...\, \mathbf{A}^n) \qquad B = (\mathbf{B}^1\, \mathbf{B}^2\, ...\, \mathbf{B}^n)$$

Iz Leme 4.3 sledi da ako $\mathbf{A}^{i_1}, \mathbf{A}^{i_2}, ..., \mathbf{A}^{i_r}$ čine bazu prostora kolona matrice A, onda $\mathbf{B}^{i_1}, \mathbf{B}^{i_2}, ..., \mathbf{B}^{i_r}$ čine bazu prostora kolona matrice B. Zaključujemo da matrice A i B imaju isti rang kolona (iako mogu imati različite prostore kolona)! S druge strane, prema Lemi 4.4, rang kolona matrice B je jednak broju 'pivota' t.j. broju ne-nula vrsta matrice B. Zaključujemo da je rang prostora kolona matrice B jednak r, pa je i rang kolona matrice A jednak r.

Definicija 4.5. Rang matrice A, u oznaci rang(A), je rang njenih vrsta (ili kolona).

U Teoremi 3.17 (Teorema 4.16 u knjizi) smo dokazali da je svaka $m \times n$ matrica ekvivalentna (može se svesti elementarnim transformacijama vrsta i kolona) tačno jednoj blok matrici oblika $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ gde je I_r jedinična $r \times r$ matrica. Primetimo da je $r = \text{rang}(A)$.

4.9 Drugi algoritam za odredjivanje baze i dimenzije

Elementarne transformacije vrsta matrice ne utiču na linearnu zavisnost kolona matrice:

Lema 4.3. Neka su $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$ vektori kolona matrice A i neka su $\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, ..., \mathbf{B}^n$ vektori kolona matrice B. Pretpostavimo $A \sim_v B$ (B se može dobiti iz A elementarnim transformacijama vrsta). Tada za skalare $\alpha_1, ..., \alpha_n$ važi:

$$\alpha_1 \mathbf{A}^1 + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + ... + \alpha_n \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$$

ako i samo ako

$$\alpha_1 \mathbf{B}^1 + \alpha_2 \mathbf{B}^2 + ... + \alpha_n \mathbf{B}^n = \mathbf{0}$$

Dokaz. Dovoljno je proveriti tvrdjenje za slučaj kada se B dobija iz A primenom samo jedne elementarne transformacije vrsta, što nije teško. $\square$

Lema 4.4. Bazu prostora kolona stepenaste matrice čine vektori kolona koji sadrže pivote. Posebno, svaka kolona bez pivota je linearna kombinacija kolona sa pivotima.

Dokaz. Neposredno se proveri da su kolone koje sadrže pivote linearno nezavisne i da je svaka kolona bez pivota njihova linearna kombinacija. $\square$

Primer 4.10.
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na prethodne dve leme zasnovan je sledeći algoritam. Koristimo ga da iz datog skupa vektora izdvojimo maksimalan linearno nezavisan podskup; t.j. da iz datog skupa vektora izdvojimo bazu potprostora generisanog datim skupom. Neka je dat skup (spisak) vektora $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$

Korak 1. Od datih vektora, kao vektora kolona, formirati matricu.

Korak 2. Elementarnim transformacijama vrsta svesti matricu na stepenastu formu.

Korak 3. Izbrisati iz S sve $\mathbf{v_i}$-ove takve da se u i-toj koloni stepenaste matrice ne nalazi pivot.

Korak 4. Preostali vektori čine maksimalan linearno nezavisan podskup.

Primer 4.11. Neka je V potprostor prostora R^6 generisan vektorima

$$\mathbf{v_1} = (1, 1, 0, 2, 3, 1),\ \mathbf{v_2} = (1, 0, 0, 1, 2, -1)$$

$$\mathbf{v_3} = (1, 2, 1, 5, 3, 2),\ \mathbf{v_4} = (1, 1, 1, 4, 2, 0)$$

Pronadjimo bazu za V koja je podskup skupa $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_v \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim_v \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jedino u četvrtoj koloni nema pivota pa je $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ baza za V i $\dim(V) = 3$.

4.10 Linearne jednačine i vektorski prostori

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & ... & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

možemo zapisati u matričnoj formi $A\,X = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matrica A je **matrica sistema** (coefficient matrx).

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & ... & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ je **proširena matrica sistema** (augmented matrix).

- Ako linearne jednačine posmatramo kao vektore vrsta, možemo definisati pojam linearne zavisnosti: sistem je linearno nezavisan ukoliko su vektori vrsta proširene matrice linearno nezavisni. Sistem u stepenastoj formi je nezavisan.

- Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna (imaju isti skup rešenja) ako i samo ako su im proširene matrice ekvivalentne po vrstama.

- Svaki sistem je ekvivalentan nezavisnom sistemu (npr. u stepenastoj formi); nezavisni sistem može imati manje jednačina od polaznog. Broj jednačina tog nezavisnog sistema je jednak rangu matrice proširenog sistema.

Teorema 4.16. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

(a) Sistem linearnih jednačina $AX = B$ ima rešenje.

(b) B je linearna kombinacija vektora kolona matrice A (vektor kolona B pripada prostoru kolona matrice A).

(v) Rang matrice sistema jednak je rangu proširene matrice.

Dokaz ...

- (a)⇔(v) u gornjoj teoremi je Kroneker-Kapelijeva teorema.
- (a)⇔(b) u gornjoj teoremi opisuje prostor kolona matrice A:

$\mathbf{v}$ pripada prostoru kolona matrice A ako i samo ako $A\,X = \mathbf{v}$ ima rešenje.

- Podsetimo: skup svih rešenja homogenog sistema $A\,X = \mathbf{0}$ sa n promenljivih je potprostor prostora R^n.

Teorema 4.17. Dimenzija prostora rešenja homogenog sistema $A\,X = \mathbf{0}$ je $n - r$ gde je n broj nepoznatih a r rang matrice sistema.

Dokaz. Predpostavimo da vektori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ čine bazu prostora kolona matrice A (postoji tačno r takvih vektora pošto je rang(A)=r). Po Teoremi 4.16 (b)⇒(a), svaki sistem $AX = \mathbf{u}_i$ ima rešenje $\mathbf{v}_i$:

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, A\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2, ..., A\mathbf{v}_r = \mathbf{u}_r \tag{1}$$

Neka je W prostor rešenja, $\dim(W) = s$ i neka je $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_s$ baza za W. Neka je

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_s\}$$

Tvrdimo da je B baza prostora K^n a potrebno je dokazati da je B linearno nezavisan i da je $\text{span}(B) = K^n$.

Dokaz za $\text{span}(B) = K^n$*.* Pretpostavimo da $\mathbf{v} \in K^n$ i $A\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Kako $\mathbf{u}$ pripada prostoru kolona matrice A može se izraziti kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{u}_i$:

$$A\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_r\mathbf{u}_r \tag{2}$$

Neka je $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2 - \cdots - k_r\mathbf{u}_r$. Onda, koristeći (1) i (2) sledi:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}') &= A(\mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2 - \cdots - k_r\mathbf{u}_r) \\ &= A\mathbf{v} - k_1A\mathbf{v}_1 - k_2A\mathbf{v}_2 - \cdots - k_rA\mathbf{v}_r \\ &= A\mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2 - \cdots - k_r\mathbf{u}_r \\ &= A\mathbf{v} - A\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Tako $\mathbf{v}'$ pripada rešenju W i odatle sledi da je $\mathbf{v}'$ linearna kombinacija $\mathbf{w}_i$-ova:

$$\mathbf{v}' = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_s\mathbf{w}_s$$

Onda

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \sum_{i=1}^{r} k_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{r} c_j\mathbf{w}_j$$

Tako $\mathbf{v}$ je linearna kombinacija elemenata iz B, i odatle sledi da $\text{span}(B) = K^n$.

Dokaz da je B linearno nezavisan. Pretpostavimo da

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r + b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_s\mathbf{w}_s = \mathbf{0} \tag{3}$$

Kako $\mathbf{w}_i$ pripada W, svaki $A\mathbf{w}_i = 0$. Koristeći činjenicu i ove formule, dobijamo

$$\mathbf{0} = A(\mathbf{0}) = A\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{v}_i + \sum_{j=0}^{s} b_j\mathbf{w}_j\right) = \sum_{i=1}^{r} a_iA\mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{s} b_jA\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{s} b_j\mathbf{0} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r$$

Kako su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ linearno nezavisni , svaki $a_i = 0$. Zamenom u (3) dobija se

$$b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \cdots + b_s\mathbf{w}_s = 0$$

Ipak, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ su linearno nezavisni, tako da je svako $b_i = 0$. Odatle sledi, B je linearno nezavisan. Prema tome, B je baza za K^n. Kako B ima $r + s$ elemenata, imamo $r + s = n$. Kao posledica, $dim(W) = s = n - r$, kao što je i rečeno. □

- Za ekvivalentnu formulaciju prethodne teoreme, kao i alternativni dokaz, videti Teoremu 5.4.
- Ukoliko je sistem u stepenastoj formi broj slobodnih promenljivih je $n - r$.

4.11 Suma i direktna suma potprostora

Neka su U i W potprostori prostora V. Njihova <u>suma</u> $U + W$ sa sastoji od svih zbirova $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ gde $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in W$:

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \,|\, \mathbf{u} \in U \ \mathbf{w} \in W\}$$

Teorema 4.18. Ako su U i W potprostori prostora V tada je i $U + W$ potprostor od V.

Dokaz:

Lema 4.5. Ako je $U_1 = \text{span}(S_1)$ i $U_2 = \text{span}(S_2)$ tada je $U_1 + U_2 = \text{span}(S_1 \cup S_2)$.

Dokaz. ...

Teorema 4.19. (Grassmanova formula) Ako su U i W potprostori konačno dimenzionog prostora V tada je:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Dokaz: Uočimo da je $U \cap W$ potprostor oba, U i W. Predpostavimo da je

$$\dim(U) = m \quad \dim(W) = n \quad \dim(U \cap W) = r$$

i neka je $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r\}$ baza za $U \cap W$. Prema Teoremi 4.10 svaku bazu za $U \cap W$ možemo raširiti do baze za W (kao i do baze za U); Neka su

$$B_U = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-r}\} \quad \text{i} \quad B_W = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-r}\}$$

baze za U i W respektivno i neka je $B = B_U \cup B_W$:

$$B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-r}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-r}\}$$

Primetimo da B ima tačno $m + n - r$ elemenata. Teorema je dokazana ako pokažemo da je B baza $U + W$. Kako je $\text{span}(B_U) = U$ i $\text{span}(B_W) = W$, prema Lemi 4.5 je:

$$\text{span}(B_U) + \text{span}(B_W) = \text{span}(B_U \cup B_W) = \text{span}(B)$$

ili $U + W = \text{span}(B)$. Preostaje da pokažemo da je B nezavisan. Predpostavimo

$$a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_r\mathbf{v}_r + b_1\mathbf{u}_1 + ... + b_{m-r}\mathbf{u}_{m-r} + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_{n-r}\mathbf{w}_{n-r} = 0 \tag{1}$$

gde su a_i, b_j, c_k skalari. Neka je

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r + b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_{m-r}\mathbf{u}_{m-r} \tag{2}$$

Po (1) takodje imamo

$$\mathbf{v} = -c_1\mathbf{w}_1 - \cdots - c_{n-r}\mathbf{w}_{n-r} \tag{3}$$

Kako je $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_j \in U$ iz (2) dobijamo $\mathbf{v} \in U$; a kako je $\mathbf{w}_k \in W$ iz (3) dobijamo $\mathbf{v} \in W$. Prema tome, $\mathbf{v} \in U \cap W$. Kako je $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r\}$ baza za $U \cap W$ postoje skalari $d_1, \ldots, d_r$ takvi da je:

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_r\mathbf{v}_r$$

Ubacimo ovo u (3) i dobijamo:

$$d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_r\mathbf{v}_r + c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{w}_{n-r} = 0$$

Ali pošto je $B_W = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-r}\}$ baza za W njeni vektori su linearno nezavisni pa zaključujemo:

$$c_1 = 0 \; c_2 = 0 \; \ldots \; c_{n-r} = 0$$

Zamenom u (1) dobijamo

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r + b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_{m-r}\mathbf{u}_{m-r} = \mathbf{0}$$

Pošto je $B_U = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-r}\}$ baza za U zaključujemo;

$$a_1 = 0 \; \ldots \; a_r = 0 \; b_1 = 0, \ldots, b_{m-r} = 0$$

Dokazali smo da iz (1) sledi da su a_i, b_j, i c_k svi 0 pa je B linearno nezavisan skup. □

Definicija 4.6. Vektorski prostor V je <u>direktna suma</u> potprostora U i W, u oznaci

$$V = U \oplus W$$

ako se svaki vektor $\mathbf{v} \in V$ na jedinstven način može napisati u obliku $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ gde $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in W$.

Teorema 4.20. V je direktna suma potprostora U i W ako i samo ako važi:

$$(i) \quad V = U + W \quad \text{i} \quad (ii) \quad U \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Dokaz. Videti Problem 5.70

- Ako je $V = U \oplus W$ tada Grasmanova formula postaje:

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

4.12 Koordinate vektora u odnosu na bazu, promena baze

Podsetimo da je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza prostora V ako i samo ako se svaki vektor $\mathbf{u} \in V$ na jedinstven način predstavlja kao linearna kombinacija vektora

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

$a_1, a_2, ..., a_n$ su koordinate vektora $\mathbf{u}$ u odnosu na bazu S.

Koordinatni vektor vektora $\mathbf{u}$ u odnosu na bazu S je

$$[\mathbf{u}]_S = (a_1, a_2, ..., a_n) \in K^n$$

Primetimo da koordinatni vektor vektora $\mathbf{v} \in V$ pripada prostoru K^n (a ne V).

Teorema 4.21. Neka je V konačno dimenzioni vektorski prostor nad K. Tada:

(1) $[\mathbf{u}]_S + [\mathbf{v}]_S = [\mathbf{u}+\mathbf{v}]_S$

(2) $[k\,\mathbf{u}]_S = k\,[\mathbf{u}]_S$

• Prethodna teorema, u smislu definicije 5.3, znači da je svaki n-dimenzioni vektorski prostor V nad poljem K izomorfan sa K^n (u oznaci $V \cong K^n$).

Neka je $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ baza prostora V. Koordinatne vektore $[\mathbf{w}]_S \in K^n$ posmatramo kao vektor-kolone:

$$[\mathbf{w}]_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

Neka je $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ druga ('nova') baza prostora V. Kako izračunati koordinate vektora $\mathbf{w}$ u odnosu na novu bazu S'?

$$\mathbf{v}_1 = c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{12}\mathbf{u}_2 + ... + c_{1n}\mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{v}_2 = c_{21}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2 + ... + c_{2n}\mathbf{u}_n$$

....

$$\mathbf{v}_n = c_{n1}\mathbf{u}_1 + c_{n2}\mathbf{u}_2 + ... + c_{nn}\mathbf{u}_n$$

Neka je P transponovana matrica ovog 'sistema':

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ . & . & ... & . \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

P je matrica promene baze sa baze S na bazu S'.

Teorema 4.22. Neka je P matrica promene baze sa baze S na bazu S'. Tada je P inverzibilna i za svaki vektor $\mathbf{w} \in V$ važi:

$$P\,[\mathbf{w}]_{S'} = [\mathbf{w}]_S \quad \text{i} \quad P^{-1}\,[\mathbf{w}]_S = [\mathbf{w}]_{S'}$$

Dokaz ...

5 LINEARNI OPERATORI

5.1 Definicija i primeri

Definicija 5.1. Neka je U vektorski prostor u odnosu na sabiranje $+_U$ i V vektorski prostor u odnosu na $+_V$ vektorski prostori nad poljem F. Preslikavanje $F : U \longrightarrow V$ je linearno preslikavanje, (linearni operator, linearna transformacija ili homomorfizam vektorskih prostora) ako važi:

(1) $F(\mathbf{u}_1 +_U \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) +_V F(\mathbf{u}_2)$ za sve $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$; i

(2) $F(k\,\mathbf{u}) = k\,F(\mathbf{u})$ za sve $\mathbf{u} \in U$ i $k \in F$.

- Ako je $F : U \longrightarrow V$ linearni operator onda:

(a) $F(\mathbf{0}_U) = F(\mathbf{0}_V)$;

(b) Za sve $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ i $a_1, a_2 \in F$:

$$F(a_1\,\mathbf{u}_1 + a_2\,\mathbf{u}_2) = a_1\,F(\mathbf{u}_1) + a_2\,F(\mathbf{u}_2)$$

(v) Za sve $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n \in U$ i $a_1, ..., a_n \in F$

$$F(a_1\,\mathbf{u}_1 + ... + a_n\,\mathbf{u}_n) = a_1\,F(\mathbf{u}_1) + ... + a_n\,F(\mathbf{u}_n)$$

- $F : U \longrightarrow V$ je linearni operator ako i samo ako:

$$F(a_1\,\mathbf{u}_1 + a_2\,\mathbf{u}_2) = a_1\,F(\mathbf{u}_1) + a_2\,F(\mathbf{u}_2)$$

važi za sve $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ i $a_1, a_2 \in F$.

Primer 5.1. (1) Neka je A matrica tipa $m \times n$. Definišemo

$$F : R^n \longrightarrow R^m \quad \text{sa} \quad F(\mathbf{X}) = A\,\mathbf{X}$$

($\mathbf{X}$ je vektor-kolona). F je linearno preslikavanje.

(2) Neka je $F : R^3 \longrightarrow R^3$ 'projekcija na ravan Oxy': $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. F je linearno preslikavanje.

(3) Neka je $F : R^2 \longrightarrow R^2$ translacija za vektor $(1, 2)$: $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$. F nije linearno preslikavanje.

(4) Neka su U, V vektorski prostori i $F : V \longrightarrow U$ definisano sa $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_U$. F je linearno preslikavanje.

(5) $F : \mathbf{P}(t) \longrightarrow R$ definisano sa

$$F(a_0 + a_1\,t + ... + a_n\,t^n) = a_0$$

F je linearno preslikavanje.

(6) $F : \mathbf{P}(t) \longrightarrow R^2$ definisano sa

$$F(a_0 + a_1\,t + ... + a_n\,t^n) = (a_0, a_1)$$

F je linearno preslikavanje.

(7) 'Izvod' polinoma (derivacija) je linearno preslikavanje $D : \mathbf{P}(t) \longrightarrow \mathbf{P}(t)$ definisano sa

$$D(a_0 + a_1\,t + ... + a_n\,t^n) = a_1 + 2a_2\,t + ... + na_{n-1}\,t^{n-1}$$

(8) Neka su U, V vektorski prostori i $F : V \longrightarrow U$ linearno preslikavanje koje je bijekcija (1-1 i 'na'). Tada je i F^{-1} linearno preslikavanje.

Teorema 5.1. Neka su U i V vektorski prostori, neka je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza za V i neka su $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ proizvoljni vektori iz U. Tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje $F : V \longrightarrow U$ takvo da je $F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_1$, $F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_2$, ..., $F(\mathbf{v}_n) = \mathbf{u}_n$

5.2 Slika i jezgro linearnog operatora

Definicija 5.2. Neka je $F : V \longrightarrow U$ linearno preslikavanje. Njegova slika (image of F) je:

$$\mathrm{Im}(F) = \{\mathbf{u} \in U \mid F(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ za neki } \mathbf{v} \in V\}$$

Jezgro (kernel) preslikavanja F je

$$\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Teorema 5.2. Neka su U i V vektorski prostori i $F : V \longrightarrow U$ linearno preslikavanje. Tada je $\mathrm{Im}(F)$ potprostor od U i $\mathrm{Ker}(F)$ je potprostor od V.

Dokaz ...

Primer 5.2. Neka je $F : R^3 \longrightarrow R^3$ 'projekcija na ravan Oxy': $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Tada je

$$\mathrm{Im}(F) = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\} \quad \text{i} \quad \mathrm{Ker}(F) = \{(0, 0, c) \mid c \in R\}$$

ili: $\mathrm{Im}(F)$ je ravan Oxy a $\mathrm{Ker}(F)$ je z-osa.

Primer 5.3. Neka je $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$ koju posmatramo kao linearno preslikavanje $A : R^3 \longrightarrow R^4$ (definisano sa $A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, za vektor-kolone $\mathbf{x}$). Neka je $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ standardna baza (vektor-kolona) za R^3.

$$A(\mathbf{e}_1) = A\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Slično:

$$A\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A\,\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Kako je

$$A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1 A(\mathbf{e}_1) + x_2 A(\mathbf{e}_2) + x_3 A(\mathbf{e}_3)$$

zaključujemo:
(a) $\mathrm{Im}(A)$ skup svih linearnih kombinacija kolona matrice A (prostor kolona matrice A, ili colsp(A));
(b) $\dim(\mathrm{Im}(A))$ je jednaka rangu matrica A.
(v) $\mathrm{Ker}(A)$ je potprostor svih rešenja homogenog sistema $A\,X = 0$.

- Isto važi i za $m \times n$ matrice.

Teorema 5.3. (Teorema o rangu i defektu linearnog operatora)
Neka je V konačno dimenzioni vektorski prostor i $F : V \longrightarrow U$ linearno preslikavanje. Tada je

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$$

Dokaz ...

- $\dim(\mathrm{Im}(F))$ je rang operatora F; oznaka $\rho(F)$
- $\dim(\mathrm{Ker}(F))$ je defekt operatora F (nullity); oznaka $\delta(F)$
- $\dim(V) = \rho(F) + \delta(F)$
- Ako $m \times n$ matricu A posmatramo kao linearni operator

$A : R^n \longrightarrow R^m$ tada je $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rang}(A)$

Primer 5.4. Neka je $f : R^4 \longrightarrow R^3$ definisano sa:

$$f(x,y,z,t) = (x - 3y + z + 2t, x - y + 2t, -x - 3y + 2z - 2t)$$

i neka je $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ standardna baza za R^4.

(a) Odredjujemo bazu za $\mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f)$ je potprostor generisan vektorima $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_4)$:

$$f(\mathbf{e}_1) = f(1,0,0,0) = (1,1,-1) \qquad f(\mathbf{e}_2) = (-3,-1,-3)$$

$$f(\mathbf{e}_3) = (1,0,2) \qquad f(\mathbf{e}_4) = (2,2,-2)$$

Bazu možemo odrediti na dva načina

Prvi način: koristeći Prvi algoritam

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zaključujemo da je $(1,1,-1)$, $(0,2,-6)$ baza za $\mathrm{Im}(f)$. Takodje

$$\rho(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \ .$$

Drugi način: Naći ćemo ne bilo koju bazu nego maksimalan linearno nezavisan podskup skupa

$$(1,1,-1), \ (-3,-1,-3), \ (1,0,2), \ (1,1,-1)$$

Koristimo Drugi algoritam:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kako u trećoj i četvrtoj koloni nema pivota, izbrišemo ih iz polazne matrice i zaključujemo da je

$$(1,1,-1) \ \ (-3,-1,-3)$$

baza za $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Računamo defekt $\delta(f) = \dim(R^4) - \rho(f) = 4 - 2 = 2$.

(v) Odredjujemo bazu za $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{v} \in R^4 \,|\, f(\mathbf{v}) = (0,0,0)\}$$

$$f(x,y,z,t) = (x - 3y + z + 2t, x - y + 2t, -x - 3y + 2z - 2t) = (0,0,0)$$

Dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & 2t & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 2z & - & 2t & = & 0 \end{array}$$

Svedemo ga na stepenasti:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & - & z & & & = & 0 \\ & - & 6y & + & 3z & & & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & - & z & & & = & 0 \end{array}$$

Njegov skup rešenja je $\{(\frac{a}{2} - 2b, \frac{a}{2}, a, b) \,|\, a, b \in R\}$ $(= \mathrm{Ker}(f))$.

$$(\tfrac{a}{2} - 2b, \tfrac{a}{2}, a, b) = a(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0) + b(-2, 0, 0, 1)$$

Zaključujemo da je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$, $(-2, 0, 0, 1)$ baza za $\mathrm{Ker}(f)$.

5.3 Primena na sisteme linearnih jednačina

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & \dots & . & . & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

i njegov matrični zapis $AX = B$ gde je $A = (a_{ij})_{m,n}$ matrica sistema a $X = (x_i) \in R^m$ i $B = (b_i) \in R^n$ vektor-kolone. Posmatrajmo A kao linearni operator $A : R^n \longrightarrow R^m$. Primetimo:

(1) $\mathrm{Ker}(A)$ je prostor rešenja homogenog sistema $AX = \mathbf{0}$.

(2) $\mathrm{Im}(A)$ se sastoji od svih vektora B za koje sistem $AX = B$ ima rešenje. Prema Teoremi 4.16 $\mathrm{Im}(A)$ je prostor kolona matrice A; dimenzija ovog prostora je $\mathrm{rang}(A)$.

Kako je $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(R^n) - \dim(\mathrm{Im}(A))$ zaključujemo:

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rang}(A)$$

Ovim je dat alternativni dokaz Teoreme 4.17

Teorema 5.4. Dimenzija skupa rešenja homogenog sistema $AX = \mathbf{0}$ je $n - r$ gde je r rang matrice A.

5.4 Izomorfizam vektorskih prostora

Definicija 5.3. Vektorski prostori V i U su izomorfni ako postoji bijektivno linearno preslikavanje $F : V \longrightarrow U$. Izomorfizam je bijektivno linearno preslikavanje.

- Ako su U i V izomorfni to označavamo sa $U \cong V$.
- $\cong$ je relacija ekvivalencije (refleksivna, simetrična i tranzitivna).
- Teorema 4.21 glasi: svaki n-dimenzioni vektorski prostor nad poljem K je izomorfan sa vektorskim prostorom K^n.

Primer 5.5. .

1. $M_{2,2}(R) \cong R^4$

   Definišemo $F : M_{2,2}(R) \longrightarrow R^4$ sa $F(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a, b, c, d)$ Direktno se proveri da je F izomorfizam.
2. Slično: $M_{m,n}(R) \cong R^{m\,n}$.
3. Neka je $P_n(t)$ prostor svih polinoma stepena $\leq n$ nad poljem K. Tada je $F : P_n(t) \longrightarrow R^{n+1}$ definisano sa: $F(a_n\, t^n + \dots + a_1\, t + a_0\,) = (a_n, \dots, a_1, a_0)$ izomorfizam.

Linearno preslikavanje $F : U \longrightarrow V$ je singularno ako postoji $\mathbf{u} \in U$ takav da je $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (ekvivalentno: $\mathrm{Ker}(F) \neq \{\mathbf{0}\}$). U suprotnom je nesingularno (kada je $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}\}$).

Teorema 5.5. Ako je linearno preslikavanje nesingularno tada je slika svakog linearno nezavisnog skupa linearno nezavisan skup.

Podsetimo: vektorski prostori V i U su izomorfni ako postoji bijektivno linearno preslikavanje $F : V \longrightarrow U$. U tom slučaju F je izomorfizam.

Teorema 5.6. Pretpostavimo da je $\dim(U) = \dim(V) = n$ i da je $F : U \longrightarrow V$ linearno preslikavanje. Tada je F izomorfizam ako i samo ako je nesingularno preslikavanje.

Dokaz...

5.5 Operacije sa linearnim preslikavanjima, vektorski prostor $\mathrm{Hom}(U,V)$

Neka su $F : U \longrightarrow V$ i $G : U \longrightarrow V$ linearni operatori. Definišemo sabiranje operatora i množenje operatora skalarom:

(1) $F{+}G : U \longrightarrow V$

$$(F{+}G)(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{u})$$

(2) $(k\,F) : U \longrightarrow V$

$$(k\,F)(\mathbf{u}) = k\,F(\mathbf{u})$$

- $F{+}G$ i $k\,\mathbf{F}$ su linearni operatori.

Definicija 5.4. Ako su U i V vektorski prostori nad istim poljem tada $\mathrm{Hom}(U,V)$ označava skup svih linearnih operatora $F : U \longrightarrow V$.

Teorema 5.7. $\mathrm{Hom}(U,V)$ je vektorski prostor u odnosu na sabiranje i množenje skalarom.

Dokaz...

Teorema 5.8. Ako $\dim(U) = m$, $\dim(V) = n$ onda $\dim(\mathrm{Hom}(U,V)) = mn$.

Dokaz...

Neka su U, V, W vektorski prostori nad istim poljem skalara i $F : U \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow W$ linearni operatori. Kompozicija (ili slaganje) linearnih operatora $G \circ F : U \longrightarrow W$ je definisana sa:

$$(G \circ F)(\mathbf{u}) = G(F(\mathbf{u}))$$

Teorema 5.9. Neka su $F, F' : U \longrightarrow V$ i $G, G' : V \longrightarrow W$ linearni operatori. Tada:

(1) $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$

(2) $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$

(3) $k\,(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$.

Dokaz...

5.6 Algebra $\mathcal{A}(V)$ (ili $\mathrm{Hom}(V)$)

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Posmatramo linearne operatore $F : V \longrightarrow V$; zovemo ih: linearni operatori na V, ili linearne transformacije prostora V. Sa $\mathcal{A}(V)$ (ili $\mathrm{Hom}(V)$) označavamo skup svih linearnih operatora na V.

- Algebra nad poljem F je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad F u kome postoji binarna operacija 'množenje' takva da i za sve $F, G, H \in \mathcal{A}$ važi:

(1) $F\,(G + H) = FG + FH$

(2) $(G + H)\,F = GF + HF$

(3) $k(GF) = (kG)F = G(kF)$.

Ukoliko važi i asocijativni zakon za 'množenje'

(4) $F(GH) = (FG)H$

onda kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ asocijativna.

Teorema 5.10. Ako je V n-dimenzioni vektorski prostor tada je $\mathcal{A}(V)$ asocijativna algebra u odnosu na operaciju slaganja operatora. Ako je $\dim(V)=n$ onda je $\dim(\mathcal{A}(V))=n^2$

Dokaz...

- Definišemo stepen operatora $F:V\longrightarrow V$:

$$F^0=I, \qquad F^{n+1}=F\circ F^n$$

- Ako je $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ polinom sa koeficijentima iz polja skalara vektorskog prostora V i $F\in\mathcal{A}(V)$ onda:

$$p(F)=a_0I+a_1F+...+a_nF^n\in\mathcal{A}(V)$$

Linearni operator $F:V\longrightarrow V$ je <u>inverzibilan</u> ako postoji $F^{-1}\in\mathcal{A}(V)$ takav da je

$$F\circ F^{-1}=F^{-1}\circ F=I$$

- Linearni operator je inverzibilan ako i samo ako je, kao funkcija, $1-1$ i 'na' (t.j bijekcija).

Teorema 5.11. Neka je F linearni operator na konačno dimenzionom prostoru V. Tada su sledeća četiri uslova ekvivalentna:

(1) F je nesingularan (t.j $\mathrm{Ker}(F)=\{\mathbf{0}\}$);

(2) F je $1-1$;

(3) F je 'na';

(4) F je inverzibilan (t.j. '1-1' i 'na').

Dokaz...

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & a_{1n}x_n & = & b_1\\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & a_{2n}x_n & = & b_2\\
. & . & . & ... & . & . & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & ... & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

i njegov matrični zapis $AX=B$ gde je $A=(a_{ij})_{n,n}$ matrica sistema a $X=(x_i)\in R^n$ i $B=(b_i)\in R^n$ vektor-kolone. Posmatrajmo A kao linearni operator $A:R^n\longrightarrow R^n$. Tada:

Teorema 5.12. (a) Ako homogeni sistem $AX=\mathbf{0}$ ima jedinstveno rešenje (trivijalno), tada i $AX=B$ ima jedinstveno rešenje.

(b) Ako homogeni sistem ima netrivijalno rešenje tada:

- Postoje vrednosti $b_1,...,b_n$ takve da sistem $AX=B$ nema rešenje.
- Ako sistem $AX=B$ ima rešenje onda ono nije jedinstveno.

Dokaz...

5.7 Matrično predstavljanje linearnih operatora

Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V. Tada se svaki vektor $\mathbf{u} \in V$ na jedinstven način predstavlja kao linearna kombinacija

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

$a_1, a_2, ..., a_n$ su koordinate vektora $\mathbf{u}$ u odnosu na bazu S a

$$[\mathbf{u}]_S = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$$

je koordinatni vektor vektora $\mathbf{u}$ u odnosu na bazu S. Važi:

$$[a\,\mathbf{u}+b\,\mathbf{v}]_S = a\,[\mathbf{u}]_S + b\,[\mathbf{v}]_S$$

• Preslikavanje $f : V \longrightarrow F^n$ definisano sa

$$f(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_S$$

je linearno; ono je i izomorfizam vektorskih prostora V i F^n.

Neka je T linearni operator na vektorskom prostoru V (t.j. $T : V \longrightarrow V$), neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V i neka je:

$$T(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + ... + a_{1n}\mathbf{v}_n$$

$$T(\mathbf{v}_2) = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + ... + a_{2n}\mathbf{v}_n$$

$$....................................$$

$$T(\mathbf{v}_n) = a_{n1}\mathbf{v}_1 + a_{n2}\mathbf{v}_2 + ... + a_{nn}\mathbf{v}_n$$

Matrična reprezentacija operatora T u odnosu na bazu S, ili matrica operatora T u odnosu na S, je transponovana matrica koeficijenata. Ovu matricu označavamo sa $m_S(T)$ ili $[T]_S$. Praktično:

$$[T]_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ . & . & ... & . \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ukoliko vektore $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), ..., T(\mathbf{v}_n)$ predstavimo kao vektore kolona onda:

$$[T]_S = (T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), ..., T(\mathbf{v}_n))$$

• Ove matrice zavise od baze; u odnosu na različite baze možemo dobiti različite matrice operatora.

• Transponovana matrica koeficijenata (a ne matrica koeficijenata) se uzima zato što računajući u koordinatama u odnosu na bazu S:

T je 'množenje s leva matricom $[T]_S$'.

Preciznije:

Teorema 5.13. Neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator na vektorskom prostoru V i neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza. Za svaki $\mathbf{u} \in V$:

$$[T(\mathbf{u})]_S = [T]_S\,[\mathbf{u}]_S$$

(Koordinatni vektori $[\mathbf{u}]_S$ i $[T(\mathbf{u})]_S$ su vektori-kolona.)

Dokaz...

5.8 Algoritam za formiranje matrice operatora u odnosu na bazu

Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza prostora V i $T : V \longrightarrow V$ linearni operator. Matricu operatora T u odnosu na bazu S formiramo na sladeći način:

Korak 1 Za $i = 1, 2, ..., n$ izračunamo $T(v_i)$ u obliku:

$$T(\mathbf{v}_i) = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + ... + a_{in}\mathbf{v}_n$$

Korak 2 Formiramo matricu od vektora $T(\mathbf{v}_i)$ kao vektora kolona.

Primer 5.6. Neka je $F : R^2 \longrightarrow R^2$ definisano sa

$$F(x, y) = (3x - 5y, x - 2y)$$

(1) Odredjujemo matricu preslikavanja u odnosu na standardnu bazu $S = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$

Korak 1. $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

$$T(\mathbf{e}_2) = (-5, -2) = -5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$$

Korak 2. $[T]_S = (T(\mathbf{e}_1)\, T(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) Odredjujemo matricu preslikavanja u odnosu na

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1 = (2, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 1)\}$$

Korak 1. $T(\mathbf{v}_1) = T(2, 1) = (1, 0) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$$T(\mathbf{v}_2) = T(1, 1) = (-2, -1) = -\mathbf{v}_1$$

Korak 2. $[T]_{S_1} = ([T(\mathbf{e}_1)]_{S_1}\, [T(\mathbf{e}_2))]_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Bitan je i redosled elemenata baze! U odnosu na

$$S_2 = \{\mathbf{v}_2 = (1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (2, 1)\}$$

matrica je

$$[T]_{S_2} = ([T(\mathbf{e}_2)]_{S_2}\, [T(\mathbf{e}_1))]_{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.9 $\mathbf{M_n}(F)$ i $\mathcal{A}(V)$

• Podsetimo da $\mathbf{M_n}(F)$ označava skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem F. $\mathbf{M_n}(F)$ je algebra matrica u odnosu na sabiranje matrica, množenje skalarom i množenje.

Teorema 5.14. Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V nad poljem K i neka je $m : \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathbf{M_n}(K)$ preslikavanje definisano sa $m(T) = [T]_S$. Tada je m izomorfizam vektorskih prostora:

(1) $m(F + G) = m(F) + m(G)$ (ili $[F + G]_S = [F]_S + [G]_S$)

(2) $m(k\,F) = k\,m(F)$ (ili $[k\,F]_S = k\,[F]_S$)

(3) m je bijekcija (1-1 i 'na').

Dokaz...

Teorema 5.15. $m(G \circ F) = m(G)\,m(F)$

Dokaz...

5.10 Promena baze i matrica operatora

Neka je $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ baza prostora V i neka je $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ druga ('nova') baza prostora V.

$$\mathbf{v}_1 = c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{12}\mathbf{u}_2 + ... + c_{1n}\mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{v}_2 = c_{21}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2 + ... + c_{2n}\mathbf{u}_n$$

....

$$\mathbf{v}_n = c_{n1}\mathbf{u}_1 + c_{n2}\mathbf{u}_2 + ... + c_{nn}\mathbf{u}_n$$

Neka je P matrica promene baze sa baze S na bazu S'; podsetimo, to je transponovana matrica koeficijenata gornjeg 'sistema':

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ . & . & ... & . \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

P je inverzibilna i za svaki vektor $\mathbf{w} \in V$ važi:

$$P\,[\mathbf{w}]_{S'} = [\mathbf{w}]_S \quad \text{i} \quad P^{-1}\,[\mathbf{w}]_S = [\mathbf{w}]_{S'}$$

Teorema 5.16. Neka je P matrica promene baze sa baze S na bazu S' vektorskog prostora V i neka je T linearni operator na V. Tada je

$$[T]_{S'} = P^{-1}[T]_S P$$

Dokaz. Videti Problem 10.19.

Podsetimo da su matrice A i B slične ako postoji inverzibilna matrica P takva da je

$$B = P^{-1}AP$$

- Ako su A i B matrice istog linearnog operatora u odnosu na neke baze tada su A i B slične.

- Fiksirajmo bazu S prostora V. Svaka inverzibilna matrica je matrica promene baze sa S na neku drugu bazu S'.

Teorema 5.17. Kvadratne matrice A i B su slične ako i samo ako postoji linearni operator koga one reprezentuju .

Dokaz...

6 DETERMINANTE

Za svaku kvadratnu matricu $A = (a_{ij})_{n\times n}$ sa elementima iz polja F (obično je $F = R$) definisaćemo njenu determinantu, oznaka $\det(A)$ ili $|A|$. Vrednost determinante je skalar!

$$\det(a_{ij})_{n\times n} \quad \text{obično označavamo i sa:} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinante se javljaju prirodno kod rešavanja sistema linearnih jednačina.

6.1 Determinante reda 1, 2 i 3

$|a| = a$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{matrix} + \\ \searrow \\ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \\ \nearrow \\ - \end{matrix}$$

- Posmatrajmo sistem:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Množeći prvu sa a_{22} pa oduzimajući drugu pomnoženu sa $-a_{12}$:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = (b_1a_{22} - b_2a_{12})$$

Slično

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = (a_{11}b_2 - b_1a_{21})$$

- Ako je $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$ imamo jedinstveno rešenje sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Ovaj • je jednostavnije zapisati uz sledeće oznake:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ je <u>determinanta sistema</u>

$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ je <u>determinanta po x</u>

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ je <u>determinanta po y</u>

- Ako je $\Delta \neq 0$ tada sistem ima jedinstveno rešenje koje računamo po formulama:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Primer 6.1. Metodom determinanti rešavamo sistem:

$$3x + 2y = 11$$
$$2x - y = 5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -21 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

kako je $\Delta \neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1$$

- Rešavajući 3×3 sistem dolazi se do sledeće definicije:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

- Često se izračunava korišćenjem Sarusovog pravila:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} + & & + & + & \\ \searrow & \searrow & \searrow & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ - & & - & - & \end{array}$$

• Ako je $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ sistem

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

gde se Δ_x (Δ_y, Δ_z) dobija zamenom kolone koeficijaenata uz x (y, z) kolonom b-ova:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Primer 6.2. Rešavamo sistem

$$2x + y + z = 5$$

$$-x - 3y + 5z = 4$$

$$3x - y + z = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -30$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -30$$

kako je $\delta \neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{-30}{-30} = 1 \quad y = \frac{0}{-30} = 0 \quad z = \frac{-30}{-30} = 1$$

• Ovo su specijalni slučajevi Kramerove teoreme ($n = 2, 3$). Važi i uopštenje ali se za $n \geq 4$ determinante teže računaju jer NEMA PRAVILA SLIČNOG SARUSOVOM ZA $n \geq 4$!!!

6.2 Permutacije

Permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ je bijekcija tog skupa u samog sebe; permutaciju $\pi : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ zapisujemo u obliku:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Zapisujemo je i kao ‘preraspodelu’ elemenata skupa $\{1, 2, ..., n\}$ i označavamo je kao:

$$\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)$$

Na primer 3,2,4,1 označava permutaciju $\pi : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ takvu da je $\pi(1) = 3, \pi(2) = 2, \pi(3) = 4, \pi(4) = 1$.

- Ima ukupno $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ permutacija skupa $\{1,2,...,n\}$.
- Inverzija u permutaciji $\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)$ je (svaki) par $(\pi(i), \pi(j)$ takav da je $i > j$.

Primer 6.3. U permutaciji 32541 ima ukupno 6 inverzija:

- 2 je na prvom mestu u (2,1)
- 3 je na prvom mestu u (3,2), (3,1)
- 4 je na prvom mestu u (4,1)
- 5 je na prvom mestu u (5,4), (5,1)

- Permutacija π je parna ako ima paran broj inverzija, oznaka $\text{sgn}(\pi) = 1$; u suprotnom ona je neparna ili $\text{sgn}(\pi) = -1$.
- 32541 i 3412 su parne permutacije dok su 32451 i 2413 neparne.

6.3 Definicija i osnovna svojstva determinanti

Definicija 6.1. Determinanta matrice $A = (a_{ij})_{n\times n}$ oznaka $|A|$ ili $\det(A)$ je

$$|A| = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} ... a_{n\pi(n)}$$

gde se sumiranje vrši po svim permutacijama skupa $\{1,2,...,n\}$.

- Za $n = 2,3$ definicija se slaže sa prethodnom.
- Sabirke $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} ... a_{n\pi(n)}$ možemo opisati kao proizvode a_{ij}-ova takve da je iz svake vrste i svake kolone uzet tačno po jedan!

Teorema 6.1. Za svaku kvadratnu matricu važi $\det(A) = \det(A^T)$.

Dokaz ...

Teorema 6.2. Neka je A kvadratna matrica.

(1) Ako A ima nula-vrstu (ili kolonu) tada je $|A| = 0$.

(2) Ako A ima dve jednake vrste (kolone) tada je $|A| = 0$.

(3) Ako je A trougaona (gornje ili donje) tada je $|A|$ jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

Dokaz ...

Teorema 6.3. Pretpostavimo da je kvadratna matrica B dobijena iz A primenom elementarne transformacije vrsta (ili kolona).

(1) Ako su dve vrste (kolone) zamenile mesta u A tada je

$$|B| = -|A|$$

(2) Ako je neka vrsta (kolona) matrice A pomnožena sa k tada je

$$|B| = k\,|A|$$

(3) Ako je neka vrsta (kolona) pomnožena nekim skalarom dodata nekoj drugoj vrsti (koloni) tada je

$$|B| = |A|$$

Dokaz ...

Prethodne dve teoreme daju jednu od strategija za izračunavanje determinanti: koristeći elementarne transformacije svedemo determinantu na trougaoni oblik pa primenimo teoremu 6.2(3).

Primer 6.4. Izračunaćemo $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Prvo saberemo sve vrste u prvu (determinanta se ne menja prema teoremi 6.3(3)), pa izvučemo 8 iz prve vrste (teorema 6.3(2)), onda Gaus:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4^3$$

- Ako je E matrica neke elementarne transformacije vrsta (ili kolona) tada je

$$|E\,A| = |E|\,|A|$$

- Neka se matrica B dobija iz A primenom elementarnih transformacije vrsta i kolona. Tada je

$$|A| = 0 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad |B| = 0$$

Teorema 6.4. Kvadratna matrica A je inverzibilna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$.

Dokaz Videti Problem 7.27

Teorema 6.5. (Binet-Cauchy) $|A\,B| = |A|\,|B|$.

Dokaz Videti Problem 7.28

6.4 Minori i kofaktori, izračunavanje determinante

Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n i neka M_{ij} označava matricu koja se dobija iz A brisanjem i-te vrste i j-te kolone.

- Minor polja (i, j) (ili elementa a_{ij}) matrice A je (skalar) $|M_{ij}|$

- Kofaktor polja (i, j) matrice A je:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Primer 6.5. Neka je $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27, \; A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Teorema 6.6. Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n.

(1) Važi formula za razvoj po i-toj vrsti:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

(2) Važi formula za razvoj po i-toj koloni:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

Primer 6.6. Neka je $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Tada je:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27$$

Razvoj po prvoj vrsti:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{1n} =$$
$$= 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 38 + 7 \cdot (-27) = -1$$

Za praktično izračunavanje determinante Koristimo razvoj po vrstama (kolonama) i pravila za elementarne transformacije (Teorema 6.3):

(1) Ako zamenimo mesta dvema vrstama (kolonama) determinanta menja znak.

(2) Ako jednu vrstu (ili kolonu) pomnožimo sa $k \neq 0$ determinanta se uveća k puta.

(3) Ako jednoj vrsti dodamo k puta neku drugu vrstu determinanta se ne menja!

Korak 1 Pronaći 'zgodnu vrstu i pivota' u njoj (ili kolonu).

Korak 2 Koristeći pivota elementarnim transformacijama napraviti sve ostale nule u toj vrsti (koloni).

Korak 3 Primenom Teoreme 6.6 razviti determinantu po toj vrsti (koloni). Dobijamo matricu za red kraću, pa ponavljamo postupak dok ...

Primer 6.7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Zgodan je $a_{23} = 1$ u drugoj vrsti:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & \boxed{1} \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -19 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -19 & -2 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} =$$

Sad može i da se izračuna 2×2 determinanta:

$$= -1((-19)1 - 14(-2)) = 1$$

6.5 Adjungovana matrica

Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n. Adjungovana matrica matrice A (adjunct of A) je:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ . & . & ... & . \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 6.7. (Laplas) Za svaku kvadratnu matricu A važi:

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A = \det(A)\, I$$

Dokaz Videti Problem 7.33

Primer 6.8. Uzmimo matricu iz primera 6.5: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Izračunali smo:

$$A_{11} = -1 \quad A_{12} = 38 \quad A_{13} = -27$$

$$A_{21} = 1 \quad A_{22} == -41 \quad A_{23} = 29$$

$$A_{31} = -1 \quad A_{32} = 34 \quad A_{33} = -24$$

Prema tome $\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$

Laplasova teorema (u primeru 6.6 imamo $|A| = -1$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = |A|\, I$$

Teorema 6.8. Neka je A kvadratna matrica.

(a) A je inverzibilna ako i samo ako $\det(A) \neq 0$.

(b) Ako je A inverzibilna tada je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, \mathrm{adj}(A)$.

Primer 6.9. Uzmimo matricu iz primera 6.5: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. U primeru 6.6 smo izračunali $|A| = -1$ a u primeru 6.8

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

Prema teoremi 6.8(2)

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

- Kvadratna matrica A je inverzibilna ako i samo ako je $\mathrm{adj}(A)$ inverzibilna. U slučaju inverzibilnosti važi:

$$|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

6.6 Kramerova teorema

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina $A\,X = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Neka je $\Delta = \det(A)$ i neka je Δ_{x_i} dobijena zamenom i-te kolone u Δ sa B:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad ....$$

Kramerova teorema

(1) Sistem ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je $\Delta \neq 0$; u tom slučaju je

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \;\; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \;\; ... \;\; ; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

(2) Ako je $\Delta = 0$ i za bar jedno i je $\Delta_{x_i} \neq 0$ onda sistem nema rešenja.

- Primetimo da o slučaju

$$\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \; ... \; = \Delta_{x_n} = 0$$

Kramer ne kaže ništa. U ovom slučaju sistem rešavamo nekom drugom metodom i nekad dobijamo da ima rešenja, a nekad da ih nema.

Dokaz Kramerove teoreme (1) Pretpostavimo da je $\Delta \neq 0$ (tada je i $\mathrm{adj}(A)$ inverzibilna). Iz $A\,X = B$ sledi

$$\mathrm{adj}(A) \cdot A \cdot X = \mathrm{adj}(A) \cdot B$$

Važi i obrnuto: množenjem sleva sa $\mathrm{adj}(A)^{-1}$ dobijamo $AX = B$

Primenom Laplasove teoreme

$$(\det(A) \cdot I) \cdot X = \mathrm{adj}(A) \cdot B$$

$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n \\ .... \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \\ ... \\ \Delta_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \Delta \cdot x_2 \\ ... \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \\ ... \\ \Delta_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Zaključujemo da je prethodna jednakost ekvivalentna sa $AX = B$.

(2) Neka je $\Delta = 0$ i za bar jedno i je $\Delta_{x_i} \neq 0$. Ako je X rešenje $AX = B$ množenjem sleva sa $\mathrm{adj}(A)$ dobijemo

$$\begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \Delta \cdot x_2 \\ ... \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \\ ... \\ \Delta_{x_n} \end{pmatrix}$$

što nije moguće. Nema rešenja. □

Teorema 6.9. Homogeni kvadratni sistem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

ima netrivijalno rešenje ako i samo ako je $\det(a_{ij}) = 0$.

Dokaz ...

Primer 6.10. Koristeći Kramerovo pravilo, rešićemo sistem:

$$x+y+z=0$$
$$x+2y+z=1$$
$$2x+y+az=1.$$

gde je a realan parametar.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&a\end{vmatrix}=a-2\qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix}=-a$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\2&1&a\end{vmatrix}=a-2\qquad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&1&1\end{vmatrix}=2$$

Rešenja sistema zavise od vrednosti parametra a (da li je $\Delta=0$ ili $\Delta\neq 0$). Imamo dva slučaja:

(1) $a\neq 2$

U ovom slučaju je $\Delta\neq 0$ pa, prema Krameru, sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-a}{a-2}\qquad y=\frac{a-2}{a-2}=1\qquad z=\frac{2}{a-2}$$

(2) $a=2$

U ovom slučaju je $\Delta=0$ a $\Delta_x=-2\neq 0$; prema Krameru sistem nema rešenja.

Primer 6.11. Koristeći Kramerovo pravilo, rešićemo sistem:

$$mx+y+z=1$$
$$x+my+z=1$$
$$x+y+mz=1.$$

gde je m realan parametar.

$$\Delta=(m+2)(m-1)^2\qquad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=(m-1)^2$$

(1) $m\neq -2,1$ Tada je $\Delta\neq 0$ pa, prema Krameru, sistem ima jedinstveno rešenje: $x=y=z=\dfrac{1}{m+2}$.

(2) $m=1$ Tada je $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$; Kramer ne kaže ništa u ovom slučaju, ali sistem postaje:

$$x+y+z=1$$
$$x+y+z=1$$
$$x+y+z=1.$$

i rešenja su: $x=1-a-b$ $y=b$ $z=a$ $(a,b\in R)$

(3) $m=-2$ tada je $\Delta=0$, ali $\Delta_x\neq 0$ pa prema Krameru naš sistem nema rešenja.

Primer 6.12. Rešavamo sistem:

$$mx+y+z=1$$
$$x+my+z=m+1$$
$$x+my+mz=1.$$

$\Delta=(m+1)(m-1)^2\qquad \Delta_x=(m-1)^2\qquad \Delta_y=(m-1)(m^2+2m-1)$

$$\Delta_z=-m(m^2-1)$$

(1) $m\neq\pm 1$ Tada je $\Delta\neq 0$ pa Kramer kaže da sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x=\frac{1}{m+1};\ y=\frac{m^2+2m-1}{(m-1)^2};\ z=\frac{-m}{m-1}$$

(2) $m=1$ U ovom slučaju $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, pa Kramer ne pomaže, ali sistem je zapravo:

$$x+y+z=1$$
$$x+y+z=2$$
$$x+y+z=1,$$

i očito nema rešenja.

(3) $m=-1$ U ovom slučaju $\Delta=0$, ali $\Delta_x=1\neq 0$; prema Krameru, sistem nema rešenja.

6.7 Determinante blok matrica

Teorema 6.10. Neka je M trougaona (gornje ili donje) blok matrica sa dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, ..., A_n$. Tada je

$$\det(M) = \det(A_1)\ \det(A_2) ... \det(A_n)$$

Dokaz ...

Primer 6.13. Determinantu $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 67 & 7 & 90 \\ 4 & 5 & 23 & -8 & 65 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 82 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ razložimo na blokove:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & \vdots & 67 & 7 & \vdots & 90 \\ 4 & 5 & \vdots & 23 & -8 & \vdots & 65 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 5 & 2 & \vdots & 82 \\ 0 & 0 & \vdots & 3 & 1 & \vdots & 31 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 7(-1)2 = -14$$

6.8 Determinanta linearnog operatora

Neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator na n-dimenzionom vektorskom prostoru V. Neka su S_1 i S_2 baze za V i neka su T_1 i T_2 matrice operatora u odnosu na njih.

Lema 6.1. $\det(T_1) = \det(T_2)$.

Dokaz. Neka je P matrica prelaska sa baze S_1 na bazu S_2. Tada je $T_2 = P\,T_1 P^{-1}$. Primenimo Koši-Binea:

$$\det(T_2) = \det(P)\ \det(T_1)\ \det(P^{-1}) = \det(P)\ \det(T_1)\ \det(P)^{-1} = \det(T_1)$$

što je i trebalo pokazati. □

- Determinanta linearnog operatora je determinanta njene matrice u odnosu na neku bazu.

7 UNITARNI PROSTORI

Neka je V vektorski prostor nad R (realni vektorski prostor).

Definicija 7.1. (Realni) skalarni proizvod ((real) inner product) na V je funkcija koja svakom paru vektora $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dodeljuje broj $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > \in R$ i koja zadovoljava sledeće uslove:

(1) Linearnost (po prvom argumentu):

$$< a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, \mathbf{v} > = a < \mathbf{u}_1, \mathbf{v} > + b < \mathbf{u}_2, \mathbf{v} >$$

(2) Komutativnost: $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$

(3) Pozitivna definitnost: $< \mathbf{u}, \mathbf{u} > \geq 0$ i

$$< \mathbf{u}, \mathbf{u} > = 0 \text{ ako i samo ako } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

(Realni) unitarni prostor je vektorski prostor snabdeven skalarnim proizvodom.

- Aksioma (1) je ekvivalentna sa:

$$< \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} > = < \mathbf{u}_1, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}_2, \mathbf{v} > \quad \text{i} < a\,\mathbf{u}, \mathbf{v} > = a \; < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$$

- Skalarni proizvod označavamo i sa $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$. Pri ovakvom zapisu linearnost (prema prethodnoj primedbi) se razlaže na distributivnost + u odnosu na skalarno množenje

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \circ \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{v}$$

i na izvlačenje skalara ispred skalarnog proizvoda:

$$(a\,\mathbf{u}) \circ \mathbf{v} = a\,(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})$$

- Linearnost izražena preko $\circ$ je:

$$(a\,\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) \circ \mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{v} + b\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{v}$$

- $< \mathbf{0}, \mathbf{u} > = < \mathbf{v}, \mathbf{0} > = 0$
- Iz linearnosti po prvoj promenljivoj i komutativnosti sledi linearnost i po drugoj promenljivoj:

$$\mathbf{u} \circ (c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2) = c\,\mathbf{u} \circ \mathbf{v}_1 + d\,\mathbf{u} \circ \mathbf{v}_2$$

- Linearnost nam omogućuje da linearne kombinacije vektora množimo kao linearne kombinacije brojeva po principu 'svaki sa svakim' pri čemu skalare izdvajamo ispred:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \circ (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{v}_2$$

$$(a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2) \circ (c\,\mathbf{v}_1 + d\,\mathbf{v}_2) = ac(\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{v}_1) + ad(\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{v}_2) + bc(\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{v}_1) + bd(\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{v}_2)$$

- Opštije:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i) \circ (\sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{v}_j) \; = \; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \, (\mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_j)$$

ili

$$< \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{v}_j > = \; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j < \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j >$$

- Često se $\mathbf{v} \circ \mathbf{v}$ označava i sa $\mathbf{v}^2$. Na primer:

$$(\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}) \circ (\mathbf{u} + 3\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}^2 + 5\,\mathbf{u} \circ, \mathbf{v} + 6\,\mathbf{v}^2$$

Pažnja: $\mathbf{u}^n$ nema smisla za $n \geq 3$!!!

Definicija 7.2. Norma vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ je:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{< \mathbf{u}, \mathbf{u} >}$$

- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$ je direktna asocira na apsolutnu vrednost broja.

Primer 7.1. Standardni skalarni proizvod vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ u R^n smo definisali sa:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + ... + u_n\,v_n \quad (\in R)$$

Primer 7.2. Neka je V prostor $m \times n$ realnih matrica. Tada je:

$$< A, B >= \mathrm{tr}(B^T A)$$

skalarni proizvod; $\mathrm{tr}(C)$, ili trag kvadratne matrice C, je zbir elemenata glavne dijagonale.

Primer 7.3. Neka je V prostor neprekidnih realnih funkcija na intervalu $[a, b]$. Tada je:

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$$

skalarni proizvod.

7.1 Koši-Švarcova nejednakost

Teorema 7.1. (Cauchy-Shwartz)

$$|\mathbf{u} \circ \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, .$$

Dokaz Problem 6.10

Teorema 7.2. Za vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ važi

(1) $\|\mathbf{v}\| \geq 0; \quad \|\mathbf{v}\| = 0$ ako i samo ako $\mathbf{v} = 0$

(2) $\|k\,\mathbf{v}\| = |k| \, \|\mathbf{v}\|$

(3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Dokaz Problem 6.11

- Ako je $\|\mathbf{u}\| = 1$ onda je $\mathbf{u}$ jedinični vektor (unit vector) ili normiran (normalized).
- Normiranje ne-nula vektora $\mathbf{u}$ je $\mathbf{v} = \dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ $(\|\mathbf{v}\| = 1)$
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ je rastojanje izmedju tačaka $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ unitarnog prostora.
- Ugao izmedju vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ unitarnog prostora je:

$$\cos\theta = \frac{< \mathbf{u}, \mathbf{v} >}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

7.2 Ortogonalnost

Vektori $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ unitarnog prostora su ortogonalni ili normalni ako važi

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = 0$$

Primer 7.4. Tražimo vektor $\mathbf{u} = (x, y, z)$ koji je normalan na vektore $(2, 1, -1)$ i $(0, 1, 1)$ standardnog R^3:

$$2x + y - z = 0 \qquad y + z = 0$$

Svako rešenje ovog sistema odgovara, na primer $(-1, 1, -1)$.

Neka je S bilo koji skup vektora unitarnog prostora. Svi vektori koji su normalni na svaki vektor iz S čine ortogonalni komplement skupa S:

$$S^{\perp} = \{\mathbf{u} \in V \mid <\mathbf{u}, \mathbf{s}> = 0 \ \text{ za svaki } \ \mathbf{s} \in S\}$$

- '$<\mathbf{u}, \mathbf{s}> = 0$ za svaki $\mathbf{s} \in S$' pišemo kraće i $\mathbf{u} \perp S$:

$$S^{\perp} = \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} \perp S\}$$

- $S^{\perp}$ je potprostor prostora V .
- Naš cilj u narednom delu je dokaz sledeće važne teoreme, koji zahteva nekoliko prethodnih tvrdjenja.

Teorema 7.3. Ako je U potprostor konačno-dimenzionog prostora V tada je

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

- Ekvivalentno: svaki vektor $\mathbf{v}$ se na jedinstven način piše kao

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\perp};$$

gde je $\mathbf{u} \in U$ ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{v}$ na potprostor U, a $\mathbf{u}^{\perp} \in U^{\perp}$ je ortogonalna dopuna vektora $\mathbf{v}$ u odnosu na potprostor U.

- $\mathbf{u}^{\perp}$ je i ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{v}$ na potprostor $U^{\perp}$
- Teorema 7.3 ne važi u proizvoljnom beskonačno-dimenzionom prostoru!

7.3 Ortogonalni skupovi i baze

Skup vektora je ortogonalan ako je svaki par njegovih vektora ortogonalan. Ortonormiran skup vektora je ortogonalan skup čiji su svi elementi jedinični vektori.

- Normiranje ortogonalnog skupa ne-nula vektora je normiranje svakog $\mathbf{u}$ u njemu (zamena sa $\mathbf{v} = \dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ koji je jedinični). Normalizacijom ortogonalnog skupa dobijamo ortonormirani skup.
- Ortogonalna baza vektorskog prostora je baza koja je ortogonalan skup. Slično za ortonormiranu bazu.

Teorema 7.4. Svaki ortogonalan skup ne-nula vektora je linearno nezavisan.

Dokaz Problem 6.20

Teorema 7.5. (Pitagorina teorema) Ako je $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ ortogonalan skup vektora tada je:

$$\|\mathbf{u}_1 + ...\mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + ... + \|\mathbf{u}_n\|^2$$

Dokaz Problem 6.21

7.4 Furijeovi koeficijenti

Koordinate vektora u odnosu na ortogonalnu bazu se računaju lakše nego u slučaju proizvoljne baze. To pokazuje i naredni primer.

Primer 7.5. Posmatrajmo vektore $\mathbf{u}_1 = (1,2,1)$ $\mathbf{u}_2 = (2,1,-4)$ $\mathbf{u}_3 = (3,-2,1)$. Proverimo da oni čine ortogonalnu bazu standardnog R^3:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (1,2,1)\cdot(2,1,-4) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-4) = 0$$

Slično $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$. Znači oni čine ortogonalan skup. Prema teoremi 7.4 oni su linearno nezavisni pa čine bazu (dimenzija je 3). To je ortogonalna baza, ali nije ortonormirana:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6} \quad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{21} \quad \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{14}$$

Izrazimo vektor $\mathbf{v} = (7,3,-1)$ kao linearnu kombinaciju:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3$$

Pomnožimo skalarno sa $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} = x\,\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 + y\,\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} = x\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 + 0 + 0$$

Odatle je $x = \dfrac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1} = \dfrac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_1\|^2} = \dfrac{(1,2,1)\cdot(7,3,-1)}{6} = 2$

Slično, množenjem sa $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{u}_3$ dobijamo $y = 1$ i $z = 1$.

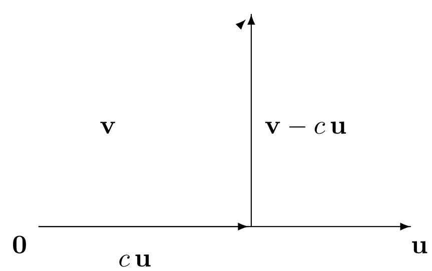
$$\mathbf{v} = 2\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Naredna definicija je motivisana situacijom u prostoru R^n sa standardnim skalarnim proizvodom.

Definicija 7.3. Vektor $\mathrm{proj}(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \dfrac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}>}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u}$ je projekcija vektora $\mathbf{v}$ na vektor $\mathbf{u}$ unitarnog prostora.

- Motivacija za prethodnu definiciju je sledec1a činjenica:

$$c = \frac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}>}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad \text{je jedinstven skalar koji zadovoljava:} \quad \mathbf{u}\circ(\mathbf{v}-c\,\mathbf{u}) = 0$$



$$\mathbf{u}\circ(\mathbf{v}-c\,\mathbf{u}) = \mathbf{u}\circ\mathbf{v} - c\,\mathbf{u}\circ\mathbf{u} = \mathbf{u}\circ\mathbf{v} - c\,\|\mathbf{u}\|^2 = 0 \quad \text{povlači} \quad c = \frac{\mathbf{v}\circ\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

Teorema 7.6. Neka je $\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n\}$ ortogonalna baza vektorskog prostora V. Tada je za svaki $\mathbf{v}\in V$:

$$\mathbf{v} = \frac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}_1>}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\,\mathbf{u}_1 + \frac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}_2>}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\,\mathbf{u}_2 + ... + \frac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}_n>}{\|\mathbf{u}_n\|^2}\,\mathbf{u}_n$$

Dokaz ....

- Furijeov koeficijent ili komponenta vektora $\mathbf{v}$ u odnosu na $\mathbf{u}$ je skalar:

$$c = \frac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}>}{<\mathbf{u},\,\mathbf{u}>} = \frac{<\mathbf{u},\,\mathbf{v}>}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

Prethodna formula postaje:

$$\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{u}_1 + c_2\,\mathbf{u}_2 + ... + c_n\,\mathbf{u}_n$$

gde je c_i komponenta vektora $\mathbf{v}$ u odnosu na $\mathbf{u}_i$.

- $\dfrac{<\mathbf{v},\,\mathbf{u}_i>}{\|\mathbf{u}_i\|^2}\,\mathbf{u}_i$ je projekcija vektora $\mathbf{v}$ na vektor $\mathbf{u}_i$, pa teoremu 7.6 možemo izraziti i na sledeći način:

Ako je $\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n\}$ ortogonalna baza vektorskog prostora V tada je svaki $\mathbf{v}\in V$ jednak zbiru svojih projekcija na bazne vektore.

Teorema 7.7. Neka vektori $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ čine ortogonalan skup ne-nula vektora u vektorskom prostoru V i neka je U potprostor generisan njima.

(1) Za svaki $\mathbf{v} \in V$ postoji jedinstven $\mathbf{v}' \in U$ takav da je

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' \perp U \qquad (\text{ t.j. } \ \mathbf{v} - \mathbf{v}' \in U^{\perp})$$

(2) $\quad \mathbf{v}' = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_n\mathbf{u}_n$ gde su c_i Furijeovi koeficijenti:

$$c_1 = \frac{<\mathbf{v},\, \mathbf{u}_1>}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \quad c_2 = \frac{<\mathbf{v},\, \mathbf{u}_2>}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \quad ... \quad c_n = \frac{<\mathbf{v},\, \mathbf{u}_n>}{\|\mathbf{u}_n\|^2}$$

Dokaz ....

- $\mathbf{v}'$ je <u>ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{v}$ na potprostor</u> U; označavamo ga sa $\text{proj}(\mathbf{v}, U)$
- Projekciju vektora $\mathbf{v}$ na potprostor generisan ortogonalnim skupom vektora $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ računamo po formuli:

$$\text{proj}(\mathbf{v}, U) = \frac{<\mathbf{v},\, \mathbf{u}_1>}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{<\mathbf{v},\, \mathbf{u}_2>}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 + ... + \frac{<\mathbf{v},\, \mathbf{u}_n>}{\|\mathbf{u}_n\|^2}\mathbf{u}_n$$

Projekcija na potprostor je zbir projekcija na vektore ortogonalne baze tog potprostora:

$$\text{proj}(\mathbf{v}, U) = \text{proj}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) + \text{proj}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2) + ... + \text{proj}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_n)$$

- Prethodna teorema dokazuje $V = U \oplus U^{\perp}$ što je specijalan slučaj teoreme 7.3 (dodata je pretpostavka da U ima ortogonalnu bazu). Da kompletiramo dokaz teoreme 7.3 preostaje da dokažemo da svaki konačno-dimenzioni unitarni prostor ima ortogonalnu bazu.

- Prethodna teorema garantuje da svaki vektor ima ortogonalnu projekciju na konačno-dimenzioni potprostor. To nije tačno u opštem slučaju beskonačno dimenzionih potprostora.

7.5 Beselova nejednakost

Teorema 7.8. Neka vektori $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ čine ortogonalan skup ne-nula vektora u vektorskom prostoru V. Neka je $\mathbf{v} \in V$ i neka su c_i Furijeovi koeficijenti $\mathbf{v}$ u odnosu na $\mathbf{w}_i$. Tada za sve skalare $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$\|\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathbf{w}_i\| \le \|\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathbf{w}_i\|$$

Dokaz Problem 6.31

Teorema 7.9. (Beselova nejednakost) Neka vektori $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ čine ortogonormiran skup vektora u vektorskom prostoru V. Neka je $\mathbf{v} \in V$ i neka je c_i Furijeov koeficijent vektora $\mathbf{v}$ u odnosu na $\mathbf{e}_i$. Tada :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \le \|\mathbf{v}\|^2$$

Dokaz Problem 6.32

7.6 Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije

Neka je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza unitarnog prostora V. Gram-Šmitovim postupkom nalazimo ortogonalan skup $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ takav da je:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{w}_2 = a_{21}\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

....

$$\mathbf{w}_n = a_{n1}\,\mathbf{v}_1 + ... + a_{n,n-1}\,\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$$

Primetimo da je svaki ovakav skup baza prostora V (pošto se svaki $\mathbf{v}_i$ može izraziti kao linearna kombinacija $\mathbf{w}_i$-ova) pa je $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ ortogonalna baza prostora V.

Postupak je zasnovan na teoremi 7.7:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{<\mathbf{v}_3,\, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 + \frac{<\mathbf{v}_3,\, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\,\mathbf{w}_2\right)$$

....

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \left(\frac{<\mathbf{v}_n,\, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 + ... + \frac{<\mathbf{v}_n,\, \mathbf{w}_{n-1}>}{\|\mathbf{w}_{n-1}\|^2}\,\mathbf{w}_{n-1}\right)$$

- Iz konstrukcije sledi:

$$\mathbf{w}_k = a_{k1}\,\mathbf{v}_1 + ... + a_{k,k-1}\,\mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_k$$

pa je $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ baza za V.

- Primetimo da je

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \mathrm{proj}(\mathbf{v}_k, \mathrm{span}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1}))$$

pa je zbog teoreme 7.7:

$$\mathbf{w}_k \perp \mathrm{span}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1})$$

Sledi da je $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ ortogonalan, pa, prema gornjem, je ortogonalna baza.

- Ukoliko normiramo svaki $\mathbf{w}_i$:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\|\mathbf{w}_i\|}\,\mathbf{w}_i$$

dobijemo ortonormiranu bazu $\{\mathbf{u}_i\}$ (jedinični vektori).

Teorema 7.10. Ako je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza unitarnog prostora V tada postoji ortonormirana baza $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ takva da je matrica promene baze sa $\{\mathbf{v}_i\}$ na $\{\mathbf{u}_i\}$ trougaona; t.j. za svaki k je:

$$\mathbf{u}_k = a_{k1}\,\mathbf{v}_1 + a_{k2}\,\mathbf{v}_2 + ... + a_{kk}\,\mathbf{v}_k$$

Dokaz Problem 6.32

Teorema 7.11. Svaki ortogonalan skup ne-nula vektora konačnodimrnzionog unitarnog prostora V $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k\}$ može biti proširen do ortogonalne baze.

Dokaz Problem 6.33

- Iz prethodne teoreme sledi da svaki konačno-dimenzioni unitarni prostor ima ortogonalnu bazu što u kombinaciji sa teoremom 7.7 daje dokaz teoreme 7.3:

Teorema 7.3. Ako je U potprostor konačno-dimenzionog prostora V tada je

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Dokaz Problem 6.35

- Alternativni način formulacije prethodne teoreme je:

Svaki vektor $\mathbf{v}$ konačno-dimenzionog prostora V se na jedinstven način piše u obliku

$$\mathbf{v} = \mathrm{proj}(\mathbf{v}, W) + \mathrm{proj}(\mathbf{v}, W^{\perp})$$

7.7 Ugao izmedju vektora i potprostora

Ugao izmedju vektora i potprostora definišemo kao ugao izmedju vektora i njegove ortogonalne projekcije na taj potprostor.

Primer 7.6. U standardnom vektorskom prostoru R^4 izračunaćemo ugao izmedju vektora $\mathbf{v} = (6,3,6,3)$ i potprostora U generisanog vektorima $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,1)$ i $\mathbf{u}_2 = (1,2,1,3)$.

(1) Gram-Šmitovim postupkom odredjujemo ortogonalnu bazu potprostora U:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 = (1,1,0,1)$$
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{< \mathbf{u}_2,\, \mathbf{w}_1 >}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 =$$
$$= (1,2,1,3) - \frac{< (1,2,1,3),\, (1,1,0,1) >}{\|(1,1,0,1)\|^2}\,(1,1,0,1) =$$
$$= (1,2,1,3) - 6/3\,(1,1,0,1) = (-1,0,1,1)$$

(2) Računamo projekciju vektora $\mathbf{v}$ na potprostor U (koji je generisan ortogonalnim vektorima $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$):

$$\mathrm{proj}(\mathbf{v}, U) = \frac{< \mathbf{v},\, \mathbf{w}_1 >}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 + \frac{< \mathbf{v},\, \mathbf{w}_2 >}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\mathrm{proj}(\mathbf{v}, U) = \frac{< (6,3,6,3),\, (1,1,0,1) >}{\|(1,1,0,1)\|^2}(1,1,0,1) +$$
$$+ \frac{< (6,3,6,3),\, (-1,0,1,1)) >}{\|(-1,0,1,1)\|^2}(-1,0,1,1) =$$

$$\mathrm{proj}(\mathbf{v}, U) = 4(1,1,0,1) + (-1,0,1,1) = (3,4,1,5)$$

(3) Računamo ugao θ izmedju $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}' = \mathrm{proj}(\mathbf{v}, U)$:

$$\cos\theta = \frac{< (2,1,2,1), (3,4,1,5) >}{\|(2,1,2,1)\|\; \|(3,4,1,5)\|} =$$

$$= \frac{< (2,1,2,1), (3,4,1,5) >}{\|(2,1,2,1)\|\; \|(3,4,1,5)\|} =$$
$$= \frac{17}{\sqrt{10}\,\sqrt{51}} = \frac{17}{\sqrt{510}}$$

7.8 Matrično predstavljanje skalarnog proizvoda

Neka je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza unitarnog prostora V. Gramova matrica je:

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_n \\ . & . & ... & . \\ \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

- Gramovu matricu definišemo na isti način i za bilo koji skup vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ (koji nije obavezno baza).
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ je ortogonalna baza ako i samo ako

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) \text{ je dijagonalna matrica.}$$

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ je ortonormirana baza ako i samo ako

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = I$$

- Gramova matrica predstavlja 'tablicu množenja' u odnosu na bazu:

$$< \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{v}_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j > =$$

(kao proizvod matrica)

$$= (a_1\, a_2\, ...\, a_n)\; G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)\; (b_1\, b_2\, ...\, b_n)^T$$

Ovo je formalizovano u narednoj teoremi, uzimajući vektore kolona:

Teorema 7.12. Ako je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza unitarnog prostora i $[\mathbf{u}]\,[\mathbf{v}]$ koordinatni vektori kolona u odnosu na tu bazu tada je:

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = [\mathbf{u}]^T\, G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)\, [\mathbf{v}]$$

Dokaz. Videti Problem 6.41

- Za kvadratnu matricu A reda n kažemo da je pozitivno definitna ako za svaki ne-nula vektor kolonu $\mathbf{v} \in R^n$ važi:

$$\mathbf{v}^T\, A\, \mathbf{v}\; >\; 0$$

Teorema 7.13. $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ je simetrična i pozitivno definitna.

Dokaz. Videti Problem 6.42.

Važi i tvrdjenje obrnuto teoremi 7.12:

Teorema 7.14. Ako je matrica A simetrična i pozitivno definitna tada je sa

$$\mathbf{u}\, A\, \mathbf{v}^T$$

definisan skalarni proizvod na R^n.

Dokaz. Videti Problem 6.40.

7.9 Promena baze i Gramova matrica

Neka su $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n\}$ i $S = \{\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, ..., \mathbf{s}'_n\}$ baze prostora V. Koordinatne vektore $[\mathbf{v}]_S \in R^n$ posmatramo kao vektor-kolone. Neka je

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ . & . & ... & . \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

matrica promene baze sa baze S na bazu S', ili

$$\mathbf{s}'_1 = c_{11}\mathbf{s}_1 + c_{12}\mathbf{s}_2 + ... + c_{1n}\mathbf{s}_n$$

$$\mathbf{s}'_2 = c_{21}\mathbf{s}_1 + c_{22}\mathbf{s}_2 + ... + c_{2n}\mathbf{s}_n$$

....

$$\mathbf{s}'_n = c_{n1}\mathbf{s}_1 + c_{n2}\mathbf{s}_2 + ... + c_{nn}\mathbf{s}_n$$

Neka je P transponovana matrica ovog 'sistema':

- Podsetimo (videti teoremu 5.27 u knjizi): P je inverzibilna i za svaki vektor $\mathbf{v} \in V$ važi:

$$P\,[\mathbf{v}]_{S'} = [\mathbf{v}]_S \quad \text{i} \quad P^{-1}\,[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{v}]_{S'}$$

Teorema 7.15. $G(\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, ..., \mathbf{s}'_n) = P^T\, G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n)\, P$

Dokaz. Prema teoremi 7.12 imamo:

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = [\mathbf{u}]_S^T\, G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n)\, [\mathbf{v}]_S$$

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = [\mathbf{u}]_{S'}^T\, G(\mathbf{s}_1', \mathbf{s}_2', ..., \mathbf{s}_n')\, [\mathbf{v}]_{S'}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = [\mathbf{u}]_S^T\, G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n)\, [\mathbf{v}]_S = \\ = (P[\mathbf{u}]_{S'})^T\, G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n)\, P[\mathbf{v}]_{S'} = \\ = [\mathbf{u}]_{S'}^T\, P^T\, G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n)\, P[\mathbf{v}]_{S'} = \\ = [\mathbf{u}]_{S'}^T\, \left(P^T\, G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n)\, P\right)\, [\mathbf{v}]_{S'} = \end{gathered}$$

Sledi:

$$G(\mathbf{s}_1', \mathbf{s}_2', ..., \mathbf{s}_n') = P^T\, G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)\, P$$

7.10 Ortogonalne matrice i skalarni proizvod

Podsetimo da je kvadratna matrica A ortogonalna ako i samo ako je $A^T = A^{-1}$; dokazali smo i sledeću teoremu:

- Neka je A kvadratna matrica reda n. Sledeća tri tvrdjenja su ekvivalentna:

(1) A je ortogonalna matrica;

(2) Vektori vrsta matrice A čine ortonormirani skup vektora;

(3) Vektori kolona matrice A čine ortonormirani skup vektora.

Teorema 7.16. Ako je P matrica prelaska sa ortonormirane baze $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ na ortonormiranu bazu $S' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', ..., \mathbf{e}_n'\}$ tada je P ortogonalna matrica.

Dokaz. Videti Problem 6.48. Alternativni dokaz je: kako su S i S' ortonormirani imamo

$$G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n) = G(\mathbf{s}_1', \mathbf{s}_2', ..., \mathbf{s}_n') = I$$

Prema Teoremi 7.15 imamo:

$$\begin{gathered}G(\mathbf{s}_1', \mathbf{s}_2', ..., \mathbf{s}_n') = P^T\, G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)\, P \\ I = P^T\, I\, P \qquad P^T = P^{-1} \quad \square\end{gathered}$$

Važi i obrnuto tvrdjenje:

Teorema 7.17. Ako je $P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ . & . & ... & . \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$ ortogonalna matrica i $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza tada je i $S' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', ..., \mathbf{e}_n'\}$ ortonormirana baza gde je:

$$\mathbf{s}_1' = c_{11}\mathbf{s}_1 + c_{12}\mathbf{s}_2 + ... + c_{1n}\mathbf{s}_n$$

$$\mathbf{s}_2' = c_{21}\mathbf{s}_1 + c_{22}\mathbf{s}_2 + ... + c_{2n}\mathbf{s}_n$$

....

$$\mathbf{s}_n' = c_{n1}\mathbf{s}_1 + c_{n2}\mathbf{s}_2 + ... + c_{nn}\mathbf{s}_n$$

Dokaz. Videti Problem 6.48 (ili napraviti dokaz sličan prethodnom).

7.11 Gramova determinanta

- Za bilo koji skup vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ unitarnog prostora Gramova determinanta je

$$\det G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$$

Teorema 7.18. $\det G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = 0$ ako i samo ako su $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ linearno zavisni.

Dokaz. Prvo, pretpostavimo da su linearno zavisni i dokažimo da je determinanta jednaku nuli. Zbog linearne zavisnosti jedan od $\mathbf{v}_i$-ova (npr. $\mathbf{v}_1$) je linearna kombinacija preostalih:

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

Ako u determinanti

$$\det G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_n \\ . & . & ... & . \\ \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_n \end{vmatrix}$$

od prve vrstu oduzmemo baš tu linearnu kombinaciju preostalih vrsta i primenimo linearnost po prvoj promenljivi dobijamo:

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{v}_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i \mathbf{v}_i) \circ \mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i \mathbf{v}_i) \circ \mathbf{v}_2 & ... & (\mathbf{v}_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i \mathbf{v}_i) \circ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_n \\ . & . & ... & . \\ \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_n \circ \mathbf{v}_n \end{vmatrix}$$

U ovoj determinanti je prva vrsta nula-vrsta, pa je Gramova determinanta jednaka nuli.

Drugi smer se dokazuje slično ... □

Teorema 7.19. Za linearno nezavisne vektore važi:

$$\det G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) > 0$$

U prostoru R^n sa standardnim skalarnim proizvodom $\det G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ je kvadrat zapremine generalisanog paralelepipeda odredjenog vektorima $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ linearno nezavisan skup i neka je $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza potprostora $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$. Neka je P matrica prelaska sa baze E na bazu S. Prema teoremi 7.15 važi:

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = P^T\, G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)\, P$$

Kako je E ortonormirana, imamo $G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) = I$ pa je:

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{s}_n) = P^T\, P$$

Primenimo Koši-Binea i $\det(P^T) = \det(P)$:

$$\det\, G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = \det(P)^2 > 0$$

Da dokažemo drugi deo (u R^n) primetimo da je P^T matrica u kojoj su vektori vrsta $\mathbf{v}_i$-ovi... □

7.12 NORMIRANI PROSTORI

Definicija 7.4. Neka je V vektorski prostor i neka je svakom $\mathbf{v} \in V$ odredjen realan broj $\|\mathbf{v}\|$. Funkcija $\| - \|$ je norma ukoliko su zadovoljeni sledeći uslovi:

(1) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ i $\|\mathbf{v}\| = 0$ ako i samo ako $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(2) $\|k\, \mathbf{v}\| = |k|\, \|\mathbf{v}\|$

(3) $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$

U tom slučaju V je normirani vektorski prostor.

Primer 7.7. Slede tri važna primera normi na R^n:

(1) $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_\infty = \max(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)$

(2) $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_1 = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$

(3) $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + ... + |a_n|^2}$

Rastojanje izmedju vektora **u** i **v** u normiranom prostoru je

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Teorema 7.20. Rastojanje zadovoljava sledeće uslove:

(1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ i $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ako i samo ako $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

(3) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

Primer 7.8. Odredjujemo skup tačaka C prostora R^2 koje su na rastojanju 1 od koordinatnog početka u odnosu na norme iz prethodnog primera:

(1) $\|(a_1, a_2)\|_\infty = \max(|a_1|, |a_2|)$
C je kvadrat sa temenima u tačkama $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$

(2) $\|(a_1, a_2)\|_1 = |a_1| + |a_2|$
C je kvadrat sa temenima u tačkama $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$

(3) $\|(a_1, a_2)\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}$
Ovo je 'obično' rastojanje i C je jedinična kružnica.

8 DIJAGONALIZACIJA

Primer 8.1. Posmatrajmo linearno preslikavanje $T: R^2 \longrightarrow R^2$ definisano sa:

$$T(x, y) = (5x - 6y, 2x - 2y)$$

U odnosu na standardnu bazu ono je predstavljeno sa

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Neka je $\mathbf{v}_1 = (2,1)$ i $\mathbf{v}_2 = (3,2)$. Tada je

$$T(\mathbf{v}_1) = (4,2) = 2\,\mathbf{v}_1 \qquad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$$

pa je

$$T(a\,\mathbf{v}_1 + b\,\mathbf{v}_2) = 2\,a\,\mathbf{v}_1 + b\,\mathbf{v}_2$$

U odnosu na bazu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ T je predstavljeno dijagonalnom matricom

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Podsetimo da skup svih kvadratnih matrica reda n sa elementima iz polja F, u oznaci $\mathbf{M_n}(F)$, u odnosu na sabiranje, množenje i množenje skalarima čini algebru matrica:

1. Ako $A, B \in \mathbf{M_n}(F)$ tada i $A+B$, $A\,B \in \mathbf{M_n}(F)$;

2. Ako $k \in F$ i $A \in \mathbf{M_n}(F)$ tada $k\,A \in \mathbf{M_n}(F)$.

- Ako je $f(t) = a_n\,t^n + ... + a_1\,t + a_0$ polinom sa koeficijentima iz F i $A \in \mathbf{M_n}(F)$ tada $f(A)$ označava matricu

$$f(A) = a_n\,A^n + ... + a_1\,A + a_0 I$$

gde $f(A) \in \mathbf{M_n}(F)$.

- Matrica A je nula polinoma $p(t)$ ako važi $p(A) = \mathbf{0}$; utom slučaju kažemo i da A poništava polinom $p(t)$.

Teorema 8.1. Ako su f i g polinomi i A kvadratna matrica, tada važi:

(1) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$

(2) $(f\,g)(A) = f(A)\,g(A)$

(3) $(k\,f)(A) = k\,f(A)$

(4) $f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A)$.

Dokaz. Videti Problem 8.26

8.1 Karakteristični (sopstveni) polinom matrice

Definicija 8.1. Neka je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadratna matrica. Njena karakteristična matrica je:

$$t\,I_n - A = \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & ... & -a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom (ili sopstveni polinom) matrice A, u oznaci $\Delta_A(t)$, je determinanta njene karakteristične matrice:

$$\Delta_A(t) = \det(t\,I_n - A)$$

Primer 8.2. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Njena karakteristična matrica je:

$$t\,I - A = \begin{pmatrix} t-1 & -3 \\ -4 & t-2 \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -4 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 12 = t^2 - 3\,t - 10$$

- $\Delta_A(t)$ je 'običan' polinom.

- $\Delta_A(t)$ je moničan (monic) t.j. koeficijent uz najveći stepen je 1 i važi:

$$\Delta_A(t) = t^n - \mathrm{tr}(A)\,t^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$$

Teorema 8.2. Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Dokaz. Pretpostavimo da su kvadratne matrice (istog reda) A i B slične:

$$A = P^{-1}\,B\,P$$

Tada je:

$$\begin{aligned}\Delta_A(t) &= \det(t\,I - A) = \det(t\,I - P^{-1}\,B\,P)\\ &= \det(t\,P^{-1}\,I\,P - P^{-1}\,B\,P) = \det(P^{-1}(t\,I - B)\,P)\\ &= \det P^{-1}\det(t\,I - B)\det P = \Delta_B(t)\end{aligned}$$

(zbog $\det P^{-1}\det P = \det(P^{-1}P) = \det I = 1$) □

Teorema 8.3. Ako je A gornje-trougaona blok matrica tada je njen karakteristični polinom jednak proizvodu karakterističnih polinoma njenih dijagonalnih blokova.

Dokaz. Sledi iz činjenice da je determinanta dijagonalne blok matrice jednaka proizvodu determinanti dijagonalnih blokova. □

8.2 Teorema Kejli-Hamiltona

Teorema 8.4. (Kejli-Hamilton) Svaka kvadratna matrica je nula svog karakterističnog polinoma.

Dokaz. Videti Problem 8.27

Primer 8.3. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ iz prethodnog primera. Tada je

$$\Delta_A(t) = t^2 - 3\,t - 10$$

pa Kejli-Hamilton tvrdi da je

$$A^2 - 3\,A - 10\,I = 0$$

Ovo može i neposredno da se proveri:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 10\,I =$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

8.3 Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori

Neka je A kvadratna matrica reda n. Skalar $\lambda \in F$ je sopstvena vrednost matrice A (eigenvalue) ako postoji ne-nula vektor kolona $\mathbf{v} \in R^n$ takav da je:

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$$

Ovakav $\mathbf{v} \in R^n$ je sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ (eigenvector), kaže se i karakteristična vrednost, karakteristični vektor.

- Neka je λ sopstvena vrednost matrice A. Tada je skup svih sopstvenih vektora koji odgovaraju λ potprostor od R^n; nazivamo ga sopstveni potprostor za A i λ i označavamo sa E_λ.

Teorema 8.5. Za kvadratnu matricu A reda n sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) Skalar λ je sopstvena vrednost matrice A;

(2) $\det(\lambda\,I - A) = 0$ (t.j. matrica $M = \lambda\,I - A$ je singularna);

(3) λ je koren karakterističnog polinoma matrice A ($\Delta_A(\lambda) = 0$).

Dokaz. Videti problem 8.28

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) daje recept za izračunavanje sopstvenih vrednosti: to su rešenja jednačine $\Delta_A(t) = 0$.
- (3) $\Rightarrow$ (1) znači da svakoj sopstvenoj vrednosti odgovara bar jedan sopstveni (ne-nula) vektor.

8.4 Algebarska i geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti

- Ako se karakteristični polinom razlaže na proizvod različitih nerastavljivih faktora:

$$\Delta_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} ... (t-\lambda_k)^{m_k} q_1(t) ... q_s(t)$$

tada je m_k algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ_k.

Geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti je dimenzija njenog sopstvenog potprostora.

Teorema 8.6. Algebarska višestrukost sopstvene vrednosti nije manja od njene geometrijske višestrukosti.

Dokaz. Ostavljema za kasnije (videti Problem 11.12) .

- Drugim rečima ne možemo imati više od m_i linearno nezavisnih sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_i.

8.5 Dijagonalizabilnost

Kvadratna matrica A je dijagonalizabilna ako postoji inverzibilna matrica P takva da je $P^{-1} A P$ dijagonalna matrica (t.j. van glavne dijagonale ima samo nule).

Naredna teorema daje osnovu za praktično rešavanje pitanja dijagonalizabilnosti date matrice.

Teorema 8.7. (1) Kvadratna matrica A reda n je dijagonalizabilna ako i samo ako A ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora.

(2) U tom slučaju dijagonalni elementi te dijagonalne matrice D odgovaraju sopstvenim vrednostima matrice A i

$$D = P^{-1} A P$$

gde je P matrica sastavljena od sopstvenih vektora-kolona matrice A.

Dokaz. Videti Problem 8.29

- U matrici P iz prethodne teoreme redosled redjanja sopstvenih vektora (kolona) nije bitan!

Primer 8.4. Neka je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ispitujemo da li je A dijagonalizabilna.

Prvo izračunamo $\Delta_A(t)$:

$$\Delta_A(t) = \det(t\,I - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-4)$$

Tražimo sopstvene vektore za $\lambda = 4$ i $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rešavanjem sistema dobijamo skup rešenja (sopstveni potprostor):

$$E_4 = \{(a,a,a) \,|\, a \in R\}$$

koji je generisan sopstvenim vektorom $(1,1,1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rešavanjem sistema dobijamo skup rešenja (sopstveni potprostor):

$$E_1 = \{(-a-b,b,a) \,|\, a,b \in R\} = \{a(-1,0,1) + b(-1,1,0) \,|\, a,b \in R\}$$

koji je generisan sopstvenim vektorima $(-1,0,1)$ i $(-1,1,0)$.

$(-1,0,1)$, $(-1,1,0)$ i $(1,1,1)$ su linearno nezavisni pa, prema Teoremi 8.7(1), matrica A je dijagonalizabilna. Poredjamo ove vektore u kolone matrice P:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prema teoremi 8.7(2) matrica $P^{-1}\,A\,P$ je dijagonalna. Izračunamo

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\,A\,P = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Primer 8.5. Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nije dijagonalizabilna:

$$\Delta_A(t) = \det(t\,I - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2$$

Jedina sopstvena vrednost je $\lambda = 1$. Tražimo sopstvene vektore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

se svodi na sistem

$$x + y = x \qquad y = y$$

čije je rešenje $(a,-a) \,|\, a \in R\}$ pa ova matrica nema dva linearno nezavisna sopstvena vektora. Prema teoremi 8.7 ona nije dijagonalizabilna.

Na sličan način se može videti i da Žordanova matrica

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a \end{pmatrix}$$

nije dijagonalizabilna ni za jedan $a \in R$

- Stepen dijagonalne matrice se lako računa:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a_1^m & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2^m & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & a_n^m \end{pmatrix}$$

Slično, ako je $p(t)$ polinom tada je:

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(a_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & p(a_2) & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & p(a_n) \end{pmatrix}$$

- Za dijagonalizabilnu matricu A izračunavanje A^m se svodi na izračunavanje stepena dijagonalne matrice. Neka je $D = P^{-1}\, A\, P$ tada je $A = P\, D\, P^{-1}$ i važi:

$$A^m = (P\, D\, P^{-1})^m = P\, D\, P^{-1}\, P\, D\, P^{-1} ... P\, D\, P^{-1} = P\, D^m\, P^{-1}$$

Za svaki polinom $p(t)$ važi:

$$p(A) = P^{-1}\, p(D)\, P$$

Teorema 8.8. Ako su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ matrice A tada su oni linearno nezavisni.

Dokaz. Videti Problem 8.30

Teorema 8.9. Ako karakteristični polinom kvadratne matrice A reda n ima n različitih korena $a_1, a_2, ..., a_n$ u polju skalara tada je

$$\Delta_A(t) = (t - a_1)(t - a_2) ... (t - a_n)$$

i A je slična dijagonalnoj matrici kojoj su dijagonalni elementi (u nekom rasporedu) $a_1, a_2, ..., a_n$.

Dokaz. Videti Problem 8.31

8.6 Dijagonalizacija realnih simetričnih matrica

Osnovna teorema algebre tvrdi da se svaki polinom sa kompleksnim koeficijentima može napisati kao proizvod linearnih polinoma sa kompleksnim koeficijentima. Slično važi za karakteristične polinome simetričnih realnih matrica:

Teorema 8.10. Karakteristični polinom realne simetrične matrice se može rastaviti na proizvod realnih linearnih polinoma.

Teorema 8.11. Sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima realne simetrične matrice su medjusobno ortogonalni.

8.7 Minimalni polinom matrice

Neka je A kvadratna matrica reda n nad poljem F i neka je $\mathcal{I}(A)$ skup svih polinoma $p(t)$ takvih da je $p(A) = \mathbf{0}$. Kejli-Hamilton teorema garantuje da sadrži karakterističan polinom matrice A. Minimalan polinom matrice A je moničan polinom najmanjeg stepena koji pripada $\mathcal{I}(A)$.

Narednu teorema opisuje vezu dijagonalizacije i minimalnog polinoma. Njen dokaz ostavljamo za naredno predavanje

Teorema 8.12. Matrica A je dijagonalizabilna ako i samo ako se njen minimalni polinom faktoriše na proizvod različitih linearnih faktora:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)...(t - \lambda_n)$$

gde su λ_i-ovi različiti.

Naredne teoreme opisuju vezu minimalnog i sopstvenog polinoma matrice.

Teorema 8.13. Neka je $m(t)$ minimalan polinom matrice A, koja je reda n i $\Delta_A(t)$ njen karakterističan polinom. Tada $m(t)$ deli svaki polinom iz $\mathcal{I}$, pa i karakteristični polinom $\Delta_A(t)$ (oznaka za 'deli' je $|$; $m_A(t) \,|\, \Delta_A(t)$).

Dokaz. Videti Problem 8.32.

Teorema 8.14. Neka je $m(t)$ minimalan polinom matrice A, koja je reda n i $\Delta_A(t)$ njen karakterističan polinom. Tada :

$$\Delta_A(t) \,|\, (m(t))^n$$

$m(t)$ i $\Delta_A(t)$ imaju iste nerastavljive faktore.

Dokaz. Videti Problem 8.33

- Sopstvene vrednosti matrice A su koreni minimalnog polinoma.

8.8 Dijagonalizacija linearnog operatora

Neka je V n-dimenzioni vektorski prostor nad poljem F. Linearni operator $T : V \longrightarrow V$ je dijagonalizabilan ako se može predstaviti dijagonalnom matricom u odnosu na neku bazu: postoji baza $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ i skalari λ_i tako da je:

$$T(\mathbf{v}_i) = \lambda\,\mathbf{v}_i \qquad \text{za } \imath = 1, 2, ..., n$$

Sledeći niz definicija i teorema je analogan odgovarajućim tvrdjenjima za matrice.

Skalar $\lambda \in F$ je sopstvena vrednost operatora T ako postoji ne-nula vektor $\mathbf{v} \in V$ takav da je $T(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$. U tom slučaju $\mathbf{v}$ je sopstveni vektor preslikavanja T. Skup svih sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ je sopstveni potprostor operatora T koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ, u oznaci E_λ.

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)$$

Svake dve matrice koje predstavljaju operator u odnosu na neke baze su slične; prema teoremi 8.2 one imaju isti karakterističan polinom. Taj polinom ne zavisi od izbora baze, već zavisi samo od operatora i naziva se **karakteristični polinom operatora** (ili sopstveni).

Teorema 8.15. T je dijagonalizabilan (može biti predstavljen dijagonalnom matricom D) ako i samo ako V ima bazu sastavljenu od sopstvenih vektora. U tom slučaju dijagonalni elementi matrice D su odgovarajuće sopstvene vrednosti.

Teorema 8.16. Ako su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ sopstveni (ne-nula) vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima tada su oni linearno nezavisni.

Teorema 8.17. T je nula svog karakterističnog polinoma.

Teorema 8.18. $\lambda \in F$ je sopstvena vrednost ako i samo ako je nula karakterističnog polinoma.

Teorema 8.19. Geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti nije veća od algebarske višestrukosti.

Dokaz. Videti Problem 11.12

Teorema 8.20. Ako je A matrica koja predstavlja T u odnosu na neku bazu tada je A dijagonalizabilna ako i samo ako je T dijagonalizabilan.

- Minimalan polinom operatora T je moničan polinom najmanjeg stepena $m(t)$ takav de je $m(T)$ nula-preslikavanje.
- Minimalan polinom operatora je i minimalan polinom bilo koje matrice koja ga predstavlja.

9 KANONSKE FORME OPERATORA

Polinom $f(t) \in F[t]$ se rastavlja na proizvod linearnih činilaca ako postoje $a_i \in F$ takvi da je

$$f(t) = (t - a_1)(t - a_2).....(t - a_k)$$

(gde neki od a_i-ova mogu biti jednaki).

Primer matrica (linearnog operatora) čiji se karakteristični polinom rastavlje na proizvod linearnih činilaca su gornje-trougaone matrice; polinom matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je $\Delta(t) = (t - a_{11}(t - a_{22})...(t - a_{nn})$.

U ovom delu ćemo, izmedju ostaloga, dokazati i obrnuto tvrdjenje: ako se karakteristični polinom linearnog operatora rastavlja na proizvod linearnih činilaca tada on mozhe biti predstavljen trougaonom matricom (u odnosu na neku bazu).

Dokazaćemo i jače tvrdjenje:

Žordanova kanonska forma Neka je V konačno-dimenzioni vektorski prostor i $T : V \longrightarrow V$ linearni operator čiji se karakteristični polinom rastavlja na proizvod linearnih činilaca. Tada postoji baza prostora V u odnosu na koju je T predstavljen dijagonalnom blok matricom oblika

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & J_m \end{pmatrix} \quad \text{gde su } J_i \text{ oblika} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

(Matrice istog oblika kao J_i se nazivaju Zhordanove matrice).

Ekvivalentne formulacije su:

- Svaka matrica čiji se karakteristični polinom faktoriše na proizvod linearnih činilaca je slična trougaonoj matrici.
- Svaka matrica čiji se karakteristični polinom faktoriše na proizvod linearnih činilaca je slična dijagonalnoj blok matrici čiji su dijagonalni blokovi Žordanove matrice.

9.1 Invarijantni potprostori linearnog operatora

Neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator na konačno dimenzionom vektorskom prostoru V.

- Potprostor $W \subset V$ je T-invarijantan (ili invarijantan u odnosu na T) ako T preslikava W u samog sebe (t.j $T(\mathbf{w}) \in W$ za svaki $\mathbf{w} \in W$). Ako je W invarijantan onda je restrikcija operatora T na W, u oznaci $T \restriction W$ ili $\hat{T}$, linearni operator na W:

$$\hat{T} : W \longrightarrow W \quad \text{definisan sa} \quad \hat{T}(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w}) \;\text{ za } \mathbf{w} \in W$$

Teorema 9.1. Ako je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator i $f(t)$ ma koji polinom tada je $\mathrm{Ker}(f(T))$ invarijantan u odnosu na T.

Dokaz. Videti Problem 11.3

Teorema 9.2. Ako je potprostor W invarijantan u odnosu na $T : V \longrightarrow V$ tada se T mozhe predstaviti blok matricom oblika

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

gde je A matrica linearnog operatora $\hat{T}$.

Dokaz. Videti Problem 11.5

- U prethodnoj teoremi baza prostora V u odnosu na koju je T predstavljen matricom gornjeg oblika biramo tako da prvo izaberemo bazu za W a potom je produzhimo do baze za V. Pri tome mozhemo uzeti proizvoljnu bazu za W.

Podsetimo: vektorski prostor V je direktna suma svojih potprostora $W_1, W_2, ..., W_k$ ako se svaki $\mathbf{v} \in V$ na jedinstven način mozhe napisati u obliku:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + ... + \mathbf{w}_k \qquad \mathbf{w}_i \in W_i \;\imath = 1, 2, ..., k$$

Oznaka: $V = \oplus_{i=1}^{k} W_i$

Teorema 9.3. Neka su $W_1, W_2, ..., W_k$ potprostori vektorskog prostora V i neka je $\mathcal{B}_i = \mathbf{w}_{i1}, \mathbf{w}_{i2}, ..., \mathbf{w}_{im_i}$ baza prostora W_i (za $i = 1, 2, ..., k$). Tada je $V = \oplus_{i=1}^{k} W_k$ ako i samo ako je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 ... \mathcal{B}_k$ baza za V :

$$\mathcal{B} = \mathbf{w}_{11}, ..., \mathbf{w}_{1m_1}, \mathbf{w}_{21}, ..., \mathbf{w}_{2m_2}, ..., \mathbf{w}_{k1}, ..., \mathbf{w}_{km_k}$$

Dokaz. Videti Problem 11.7

Teorema 9.4. Neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator i neka su $W_1, W_2, ..., W_k$ invarijantni potprostori takvi da je $V = \oplus_{i=1}^{k} W_i$. Ako je $\mathcal{B}_i$ baza potprostora W_i i matrica A_i predstavlja $T \restriction W_i$ tada matrica

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{pmatrix}$$

predstavlja T u odnosu na bazu $\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 ... \mathcal{B}_k$.

9.2 Osnovna dekompozicija linearnog operatora

Podsetimo da su polinomi $g(t)$ i $h(t)$ uzajamno prosti ako ne postoji nekonstantan polinom $p(t)$ koji deli i $g(t)$ i $h(t)$.

Teorema 9.5. Neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator, $f(T) = 0$ i $f(t) = g(t)\,h(t)$ gde su polinomi $g(t)$ i $h(t)$ uzajamno prosti. Tada je $V = U \oplus W$ gde je $U = \ker(g(T))$ i $W = \mathrm{Ker}(h(t))$.

Dokaz. Videti Problem 11.9

Teorema 9.6. Ako je $f(t)$ u prethodnoj teoremi minimalni polinom operatora T i ako su $g(t)$ i $h(t)$ monični tada je $g(t)$ minimalni polinom operatora $T \restriction U$, a $h(t)$ minimalni polinom operatora $T \restriction W$

Dokaz. Videti Problem 11.10

Teorema 9.7. (Osnovna dekompozicija linearnog operatora) neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator čiji je minimalan polinom

$$m(t) = f_1(t)^{n_1} f_2(t)^{n_2} ... f_k(t)^{n_k}$$

gde su $f_i(t)$ različiti monični nerastavljivi polinomi. Tada je V direktna suma invarijantnih potprostora $W_i = \mathrm{Ker}(f(T)^{n_i})$. Shtaviše $f_i(t)^{n_i}$ je minimalni polinom operatora $T \restriction W_i$.

Dokaz. Videti Problem 11.11

Prva posledica ove teoreme je Teorema 8.13 čiji smo dokaz ostavili za kasnije:

Teorema 9.8. Matrica A je dijagonalizabilna ako i samo ako se njen minimalni polinom faktoriše na proizvod različitih linearnih faktora:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)...(t - \lambda_n)$$

gde su λ_i-ovi različiti.

Dokaz. Videti Problem 11.12

- Ekvivalentna formulacija ove teoreme je: Linearni operator je dijagonalizabilan ako i samo ako je njegov minimalan polinom proizvod linearnih činilaca.

9.3 Nilpotentni operatori

Linearni operator $T : V \restriction V$ je nilpotentan ako je $T^n = \mathbf{0}$ (t.j. nula-operator, koji sve preslika u $\mathbf{0}$) za neki prirodan broj n. U tom slučaju, najmanji takav n je indeks nilpotentnosti operatora T. Slično, kvadratna matrica A je nilpotentna ako postoji prirodan broj n takav da je $A^n = 0$, a najmanji takav broj je indeks nilpotentnosti matrice.

- Ako je $T^n = 0$ tada je $T^{n+1} = 0, T^{n+2} = 0$,...

- Neka je $T^n = 0$ i neka je $m(t)$ je minimalan polinom operatora T. Znamo da $m(t)$ deli t^n (deli svaki polinom koji poništava operator T). Zaključak je: minimalni polinom nilpotentnog operatora indeksa n je $m(t) = t^n$.

Primer 9.1. Kvadratna matrica reda n koja, na glavnoj dijagonali i ispod nje, ima sve nule je nilpotentna reda $\leq n$. Matrica (reda n):

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ima jedinice odmah iznad glavne dijagonale i sve ostale nule) je nilpotentna reda n.

Teorema 9.9. Neka je $T : V \longrightarrow V$ nilpotentan linearni operator linearni operator indeksa k. Tada T ima dijagonalnu reprezentaciju:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ . & .. & ... & . \\ 0 & 0 & ... & A_m \end{pmatrix} \quad \text{gde su } A_i\text{-ovi oblika} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pri tome sve matrice A_i su reda $\leq k$ a bar jedna je reda $= k$.

Dokaz. Videti Problem 11.16

9.4 Žordanova forma linearnog operatora

Teorema 9.10. Neka je $T : V \longrightarrow V$ linearni operator čiji su karakteristični i minimalni polinom redom:

$$\Delta(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}...(t-\lambda_r)^{n_r} \quad m(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}...(t-\lambda_r)^{m_r}$$

(λ_i-ovi su različiti). Tada postoji baza prostora V u odnosu na koju je T predstavljen dijagonalnom blok matricom J čiji su dijagonalni blokovi oblika

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Pri tome za svaki λ_i, odgovarajući dijagonalni blokovi zadovoljavaju:

(1) Za bar jedan j je J_{ij} reda m_i, ostali J_{ij}-evi su reda $\leq m_i$;

(2) Za fiksno i suma redova svih J_{ij}-ova je n_i;

(3) Za fiksno i ima J_{ij}-ova kolika je geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti λ_i;

Ovo predstavljanje je jedinstveno do na permutaciju dijagonalnih blokova.

Dokaz. Videti Problem 11.18

- Matrica J je Žordanova kanonska matrica operatora T a matrice $J-ij$ su Žordanovi blokovi koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_i.

- Primetimo da je $J_{ij} = \lambda_i I + N$ gde je N nilpotentna matrica iz primera 9.1

10 ISPITNA PITANJA

1. Linearne jednačine i sistemi (osnovni pojmovi)
2. Elementarne transformacije sistema jednačina, Gausov postupak
3. Vektorski prostor R^n: sabiranje, množenje skalarom, baza, koordinate u odnosu na bazu
4. Linearne kombinacije, linearna zavisnost vektora u R^n; veza sa sistemima linearnih jednačina
5. Norma vektora i skalarni proizvod u R^n
6. Nejednakosti Koši-Švarca i Minkovskog u R^n
7. Rastojanje, ugao izmedju vektora
8. Projekcija vektora, površina paralelograma u R^n
9. Vektorski proizvod, mešoviti proizvod
10. Prave i hiper-ravni
11. Rastojanje tačke od prave u R^n, prava u R^2
12. Medjusobni položaj ravni
13. Medjusobni položaj pravih u R^3
14. Medjusobni položaj prave i ravni, ugao izmedju prave i ravni
15. Sabiranje i množenje matrica skalarom, množenje matrica
16. Matrični zapis sistema linearnih jednačina, veza izmedju skupa rešenja sistema i skupa rešenja pridruženog homogenog sistema
17. Blok matrice, determinanta trougaone blok matrice
18. Kvadratne matrice, trag kvadratne matrice
19. Transponovanje matrice, elementarne transformacije vrsta (kolona) matrice
20. Inverzna matrica, izrachunavanje inverzne matrice elementarnim transformacijama vrsta
21. Specijalni tipovi kvadratnih matrica
22. Vektorski prostori, definicija i osnovni primeri
23. Potprostori, linearne kombinacije vektora, lineal
24. Linearna zavisnost, baza, koordinate vektora, dimenzija
25. Jednakobrojnost baza konačno dimenzionog prostora
26. Prostor vrsta matrice, odredjivanje baze i dimenzije potprostora od R^n
27. Rang matrice
28. Sistemi linearnih jednačina i vektorski prostori, Kroneker-Kapelijeva teorema
29. Presek, suma i direktna suma potprostora
30. Grasmanova formula
31. Koordinate vektora u odnosu na bazu, promena baze
32. Linearni operatori, definicija i primeri
33. Izomorfizam vektorskih prostora
34. Slika i jezgro linearnog operatora

35. Operacije sa linearnim preslikavanjima, $Hom(U, V)$
36. Algebra $\mathcal{A}(V)$
37. Matrično predstavljanje linearnog operatora
38. Uticaj promene baze na matricu linearnog operatora, sličnost matrica
39. Determinante, definicija i osnovna svojstva
40. Bine-Košijeva teorema
41. Minori i kofaktori, izračunavanje determinante
42. Adjungovana matrica, Laplasova teorema, izračunavanje inverzne matrice
43. Kramerova teorema
44. Unitarni prostor, definicija i primeri
45. Koši-Švarcova nejednakost, ugao izmedju vektora i potprostora
46. Ortogonalnost, ortogonalni komplement
47. Ortogonalni skupovi i baze, Pitagorina teorema
48. Fourijeovi koeficijenti
49. Beselova nejednakost
50. Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije
51. Ugao izmedju vektora i potprostora
52. Gramova matrica
53. Veza ortogonalnih matrica i baza unitarnih prostora
54. Pozitivnost Gramove determinante
55. Normirani prostori
56. Karakteristični polinom, sopstvene vrednosti i sopstveni vektori linearnog operatora (matrice)
57. Teorema Kejli-Hamiltona
58. Dijagonalizabilnost linearnog operatora (matrice)
59. Minimalni polinom, veza sa karakterističnim polinomom linearnog operatora (matrice)
60. Invarijantni potprostori linearnog operatora, direktna suma invarijantnih potprostora
61. Osnovna dekompozicija linearnog operatora
62. Nilpotentni operatori, Žordanova forma