ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 8 (19.11.2022.)
Тема: **Природни бројеви**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Аксиома избора

Тврђење

Нека је A непразан скуп. Постоји $A \stackrel{1-1}{\rightarrow} B$ ако и само ако $B \stackrel{на}{\rightarrow} A$.

Доказ: на часу.

Аксиома избора

Тврђење

Нека је A непразан скуп. Постоји $A \overset{1-1}{\rightarrow} B$ ако и само ако $B \overset{на}{\rightarrow} A$.

Доказ: на часу.

Аксиома избора

Нека је дат скупа F чији су сви елементи непразни и међусобно дисјунктни скупови. Тада постоји скуп C такав да је $C \cap X$ једночлан я све $X \in F$. Тај скуп се назива **изборни скуп** или **трансверзала**.

Аксиома регуларности

Аксиома доброг заснивања или регуларности

Сваки непразни скуп A садржи елемент a такав да је $A \cap a = \emptyset$.

Тврђење (последице аксиоме регуларности)

1. Не постоји скуп x такав да је $x \in x$.
2. Не постоје скупови x и y такви да $x \in y$ и $y \in x$.
3. Не постоји низ скупова $x_0, x_1, x_2, \ldots$ таквих да је $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$.

Доказ: на часу.

Аксиома регуларности

Аксиома доброг заснивања или регуларности

Сваки непразни скуп A садржи елемент a такав да је $A \cap a = \emptyset$.

Тврђење (последице аксиоме регуларности)

1. Не постоји скуп x такав да је $x \in x$.
2. Не постоје скупови x и y такви да $x \in y$ и $y \in x$.
3. Не постоји низ скупова $x_0, x_1, x_2, \ldots$ таквих да је $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$.

Доказ: на часу.

Тврђење

Ако је $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$, онда је $x = y$.

Доказ: на часу.

Природни бројеви

Пеанове аксиоме:

П1 0 је природан број.

П2 Ако је x природан број, онда је и x' природан број.

П3 Ако су x и y природни бројеви и $x' = y'$, онда је $x = y$.

П4 За сваки природан број x важи $x' \neq 0$.

П5 Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) 0 има својство Φ;
2) Ако природан број x има својство Φ, тада и x' има својство Φ.

Тада сваки природни број има својство Φ.

0 - симбол константе
$'$ - унарни функцијски симбол

Природни бројеви

Пеанове аксиоме:

П1 0 је природан број.

П2 Ако је x природан број, онда је и x' природан број.

П3 Ако су x и y природни бројеви и $x' = y'$, онда је $x = y$.

П4 За сваки природан број x важи $x' \neq 0$.

П5 Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) 0 има својство Φ;
2) Ако природан број x има својство Φ, тада и x' има својство Φ.

Тада сваки природни број има својство Φ.

0 - симбол константе
$'$ - унарни функцијски симбол

Пеанове аксиоме описују природне бројеве али не говоре на коју структуру се тачно мисли!

Природни бројеви

Пеанове аксиоме:

П1 0 је природан број.

П2 Ако је x природан број, онда је и x' природан број.

П3 Ако су x и y природни бројеви и $x' = y'$, онда је $x = y$.

П4 За сваки природан број x важи $x' \neq 0$.

П5 Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) 0 има својство Φ;
2) Ако природан број x има својство Φ, тада и x' има својство Φ.

Тада сваки природни број има својство Φ.

0 - симбол константе
$'$ - унарни функцијски симбол

Пеанове аксиоме описују природне бројеве али не говоре на коју структуру се тачно мисли!

Фон Нојманов модел природних бројева заснован на теорији скупова:

$$0 := \emptyset,\ \ 1 := \{0\},\ \ 2 := \{0, 1\},\ \ 3 := \{0, 1, 2\}, \ldots$$

Прецизније, $0 := \emptyset$, $n' = n \cup \{n\}$ и $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Природни бројеви

Пеанове аксиоме:

П1 0 је природан број.

П2 Ако је x природан број, онда је и x' природан број.

П3 Ако су x и y природни бројеви и $x' = y'$, онда је $x = y$.

П4 За сваки природан број x важи $x' \neq 0$.

П5 Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) 0 има својство Φ;
2) Ако природан број x има својство Φ, тада и x' има својство Φ.

Тада сваки природни број има својство Φ.

0 - симбол константе
$'$ - унарни функцијски симбол

Пеанове аксиоме описују природне бројеве али не говоре на коју структуру се тачно мисли!

Фон Нојманов модел природних бројева заснован на теорији скупова:

$$0 := \emptyset,\ \ 1 := \{0\},\ \ 2 := \{0, 1\},\ \ 3 := \{0, 1, 2\}, \ldots$$

Прецизније, $0 := \emptyset$, $n' = n \cup \{n\}$ и $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Тврђење

Фон Нојманов модел природних бројева задовољава Пеанове аксиоме.

Доказ: на часу.

Принцип математичке индукције

Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) тачно је $\Phi(0)$;
2) ако за природни број n тачно $\Phi(n)$, онда и тачно и $\Phi(n+1)$.

Тада је за сваки природни број n тачно $\Phi(n)$.

Услов 1. се назива база индукције, а услов 2. индуктивни корак. Формула $\Phi(n)$ у индуктивном кораку се назива индуктивна претпоставка. Има аритметичких тврђења која нису тачна за неколико најмањих природних бројева, али су тачна за све остале. У тим случајевима можемо користити мало измењени принцип матаматичке индукције, који гласи овако:

Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) тачно је $\Phi(k)$;
2) ако за природни број $n \geq k$ тачно $\Phi(n)$, онда и тачно и $\Phi(n+1)$.

Тада је за сваки природни број $n \geq k$ тачно $\Phi(n)$.

Принцип математичке индукције

Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) тачно је $\Phi(0)$;
2) ако за природни број n тачно $\Phi(n)$, онда и тачно и $\Phi(n+1)$.

Тада је за сваки природни број n тачно $\Phi(n)$.

Услов 1. се назива база индукције, а услов 2. индуктивни корак. Формула $\Phi(n)$ у индуктивном кораку се назива индуктивна претпоставка. Има аритметичких тврђења која нису тачна за неколико најмањих природних бројева, али су тачна за све остале. У тим случајевима можемо користити мало измењени принцип матаматичке индукције, који гласи овако:

Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) тачно је $\Phi(k)$;
2) ако за природни број $n \geq k$ тачно $\Phi(n)$, онда и тачно и $\Phi(n+1)$.

Тада је за сваки природни број $n \geq k$ тачно $\Phi(n)$.

Принцип потпуне индукције

Нека је Φ својство природних бројева и нека важи: ако је $\Phi(0), \Phi(1), \ldots, \Phi(n)$ тачно, тачно је и $\Phi(n')$, за све $n \in \mathbb{N}$. Тада важи $\Phi(n)$ за све природне бројеве n.

Принцип математичке индукције

Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) тачно је $\Phi(0)$;
2) ако за природни број n тачно $\Phi(n)$, онда и тачно и $\Phi(n+1)$.

Тада је за сваки природни број n тачно $\Phi(n)$.

Услов 1. се назива база индукције, а услов 2. индуктивни корак. Формула $\Phi(n)$ у индуктивном кораку се назива индуктивна претпоставка. Има аритметичких тврђења која нису тачна за неколико најмањих природних бројева, али су тачна за све остале. У тим случајевима можемо користити мало измењени принцип матаматичке индукције, који гласи овако:

Нека је Φ својство природних бројева за које важи:

1) тачно је $\Phi(k)$;
2) ако за природни број $n \geq k$ тачно $\Phi(n)$, онда и тачно и $\Phi(n+1)$.

Тада је за сваки природни број $n \geq k$ тачно $\Phi(n)$.

Принцип потпуне индукције

Нека је Φ својство природних бројева и нека важи: ако је $\Phi(0), \Phi(1), \ldots, \Phi(n)$ тачно, тачно је и $\Phi(n')$, за све $n \in \mathbb{N}$. Тада важи $\Phi(n)$ за све природне бројеве n.

За природне бројеве x и y операција сабирања дефинише се са:

$$\begin{aligned} m+0 &:= m \\ m+n' &:= (m+n)'. \end{aligned}$$

Тврђење(особине сабирања)

За све природне бројеве m, n и k важи:

1. $(m+n)+k = m+(n+k)$
2. $m+0 = 0+m = m$
3. $m+1 = 1+m$
4. $m+n = n+m$
5. $m+n = 0 \Rightarrow m = 0$ и $n = 0$
6. $m+k = n+k \Rightarrow m = n$

Докази: на часу.

За природне бројеве x и y операција сабирања дефинише се са:

$$\begin{aligned} m + 0 &:= m \\ m + n' &:= (m+n)'. \end{aligned}$$

Тврђење(особине сабирања)

За све природне бројеве m, n и k важи:

1. $(m+n)+k = m+(n+k)$
2. $m+0 = 0+m = m$
3. $m+1 = 1+m$
4. $m+n = n+m$
5. $m+n = 0 \Rightarrow m = 0$ и $n = 0$
6. $m+k = n+k \Rightarrow m = n$

Докази: на часу.

За бројеве $x, y \in \mathbb{N}$ за које је $x = y + z$, за неко $z \in \mathbb{N}$, дефинишемо разлику броја x и броја y као

$$x - y \stackrel{\text{def}}{=} z.$$

За природне бројеве x и y операција множења дефинише се са:

$$m \cdot 0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$$

$$m \cdot n' \stackrel{def}{=} m \cdot n + m.$$

За природне бројеве x и y операција множења дефинише се са:

$$m \cdot 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$m \cdot n' \stackrel{def}{=} m \cdot n + m.$$

Тврђење(особине множења)

За све природне бројеве m, m и k важи:

1. $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$
2. $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$
3. $0 \cdot m = 0$
4. $1 \cdot m = m$
5. $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$
6. $m \cdot n = n \cdot m$
7. $m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \vee n = 0$