ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 6 (7.11.2022.)
Тема: **Карактеристична функција. Кардиналност скупова.**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Карактеристична функција скупа

Дефиниција

Нека је X било који скуп и $A \subseteq X$. **Карактеристична функција скупа** A је $\chi_A : X \to \{0,1\}$ таква да је

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A. \end{cases}.$$

Пример: $X = \{a,b,c,d,e,f\}$, $A = \{c,d,f\} \subseteq X$. Карактеристична функција скупа A:

$$\chi_A : X \to \{0,1\} \qquad \begin{array}{rcl} \chi_A(a) & = & 0 \\ \chi_A(b) & = & 0 \\ \chi_A(c) & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \chi_A(d) & = & 1 \\ \chi_A(e) & = & 0 \\ \chi_A(f) & = & 1. \end{array}$$

Тврђење

За скупове A и B важи: $A = B$ ако и само ако $\chi_A = \chi_B$.

Доказ: на часу.

$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$ - скуп функција које сликају скуп X у скуп Y

Тврђење

Функција $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ дефинисана са $\Phi(A) = \chi_A$ је бијекција.

Доказ: на часу.

$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$ - скуп функција које сликају скуп X у скуп Y

Тврђење

Функција $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ дефинисана са $\Phi(A) = \chi_A$ је бијекција.

Доказ: на часу.

Нека су операције сабирања и множења на скупу $\{0,1\}$ дефинисане на следећи начин:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Збир $f+g$ и производ $f \cdot g$ функција $f, g \in \{0,1\}^X$ дефинисан је са:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$ - скуп функција које сликају скуп X у скуп Y

Тврђење

Функција $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ дефинисана са $\Phi(A) = \chi_A$ је бијекција.

Доказ: на часу.

Нека су операције сабирања и множења на скупу $\{0,1\}$ дефинисане на следећи начин:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Збир $f+g$ и производ $f \cdot g$ функција $f, g \in \{0,1\}^X$ дефинисан је са:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Нека $f, g, h \in \{0,1\}^X$. Тада важи:

$$\begin{array}{ccc} f+g = g+f & f+(g+h) = (f+g)+h & f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h \\ f \cdot g = g \cdot f & f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h & (g+h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f \end{array}$$

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A^c} = \mathbf{1} + \chi_A$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A^c} = \mathbf{1} + \chi_A$,
- $\chi_{A\setminus B} = \chi_A + \chi_A \chi_B$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A^c} = \mathbf{1} + \chi_A$,
- $\chi_{A\setminus B} = \chi_A + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A^c} = \mathbf{1} + \chi_A$,
- $\chi_{A \setminus B} = \chi_A + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B$,
- $\chi_A + \chi_A = \mathbf{0}$,

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A^c} = \mathbf{1} + \chi_A$,
- $\chi_{A\setminus B} = \chi_A + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B$,
- $\chi_A + \chi_A = \mathbf{0}$,
- $\chi_A \chi_A = \chi_A$.

Докази: на часу.

Применом претходних једнакости на карактеристичне функције добијамо следеће важне једнакости:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$, $\chi_X = \mathbf{1}$,
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A^c} = \mathbf{1} + \chi_A$,
- $\chi_{A\setminus B} = \chi_A + \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B$,
- $\chi_A + \chi_A = \mathbf{0}$,
- $\chi_A \chi_A = \chi_A$.

Докази: на часу.

Канторова теорема

Нека је X произвољан скуп. Постоји injекција из X у $\mathcal{P}(X)$, али не постоји бијекција између тих скупова.

Доказ: на часу.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{\text{"1-1"}} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{\text{"1-1"}} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.
2. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.
2. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$.
3. Ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, тада је $|A| = |C|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.
2. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$.
3. Ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, тада је $|A| = |C|$.
4. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \underset{"\text{на}"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.
2. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$.
3. Ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, тада је $|A| = |C|$.
4. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$.
5. Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, онда је $|A| \leq |C|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.
2. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$.
3. Ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, тада је $|A| = |C|$.
4. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$.
5. Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, онда је $|A| \leq |C|$.
6. (Кантор-Бернштајнова теорема) Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, онда је $|A| = |B|$.

Кардиналност скупова

Дефиниција

Нека су A и B скупови.

- Кажемо да је скуп A кардиналности мање или једнаке од B, и пишемо $|A| \leq |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow{"1-1"} B$.
- Кажемо да је кардиналност скуп A једнака кардиналности скупа B, и пишемо $|A| = |B|$, ако постоји функција $A \xrightarrow[\text{"на"}]{"1-1"} B$.
- Кажемо да је скуп A кардиналности строго мање од B, и пишемо $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Особине кардиналности:

Нека су A, B, C скупови. Тада важи:

1. $|A| = |A|$.
2. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$.
3. Ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, тада је $|A| = |C|$.
4. Ако је $|A| = |B|$, онда је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$.
5. Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, онда је $|A| \leq |C|$.
6. (Кантор-Бернштајнова теорема) Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, онда је $|A| = |B|$.
7. (Берштајнова теорема) За свака два скупа A и B важи $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$.

Доказ: на часу.