ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 5 (31.10.2022.)
Тема: **Функције**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Дефиниција

Нека је $f \subseteq A \times B$ релација. Кажемо да је f **функција** која скуп A слика у скуп B ако за свако $a \in A$ постоји тачно једно $b \in B$ тако да $(a, b) \in f$. Елемент b називамо слика елемента a при функцији f и означавамо га са $b = f(a)$.

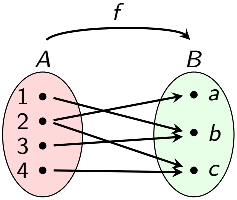
Ако је $f \subseteq A \times B$ функција која слика скуп A у скуп B пишемо $f : A \to B$ и кажемо да је A **домен** (ознака $\mathrm{Dom}(f)$) а B **кодомен** функције. Слика функције f је скуп $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

Дефиниција

Нека је $f \subseteq A \times B$ релација. Кажемо да је f **функција** која скуп A слика у скуп B ако за свако $a \in A$ постоји тачно једно $b \in B$ тако да $(a, b) \in f$. Елемент b називамо слика елемента a при функцији f и означавамо га са $b = f(a)$.

Ако је $f \subseteq A \times B$ функција која слика скуп A у скуп B пишемо $f : A \to B$ и кажемо да је A **домен** (ознака $\mathrm{Dom}(f)$) а B **кодомен** функције. Слика функције f је скуп $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f \subseteq A \times B$



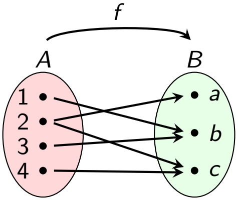
f није функција

Дефиниција

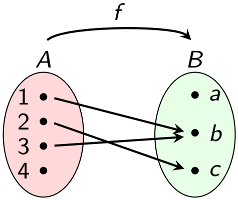
Нека је $f \subseteq A \times B$ релација. Кажемо да је f **функција** која скуп A слика у скуп B ако за свако $a \in A$ постоји тачно једно $b \in B$ тако да $(a, b) \in f$. Елемент b називамо слика елемента a при функцији f и означавамо га са $b = f(a)$.

Ако је $f \subseteq A \times B$ функција која слика скуп A у скуп B пишемо $f : A \to B$ и кажемо да је A **домен** (ознака $\mathrm{Dom}(f)$) а B **кодомен** функције. Слика функције f је скуп $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f \subseteq A \times B$



f није функција



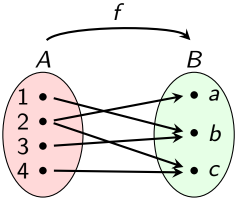
f није функција

Дефиниција

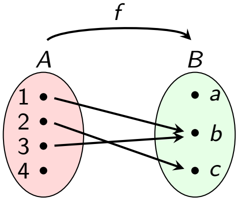
Нека је $f \subseteq A \times B$ релација. Кажемо да је f **функција** која скуп A слика у скуп B ако за свако $a \in A$ постоји тачно једно $b \in B$ тако да $(a, b) \in f$. Елемент b називамо слика елемента a при функцији f и означавамо га са $b = f(a)$.

Ако је $f \subseteq A \times B$ функција која слика скуп A у скуп B пишемо $f : A \to B$ и кажемо да је A **домен** (ознака $\mathrm{Dom}(f)$) а B **кодомен** функције. Слика функције f је скуп $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

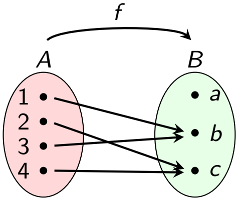
Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f \subseteq A \times B$



f није функција



f није функција



f је функција

Ако је $f : A \to B$ функција, f^{-1} је инверзна релација. Али f^{-1} не мора бити и функција.

Пример: Релација $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дефинисана са $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ је функција. Међутим, релација $f^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ није финкција.

Ако је $f : A \to B$ функција, f^{-1} је инверзна релација. Али f^{-1} не мора бити и функција.

Пример: Релација $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дефинисана са $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ је функција. Међутим, релација $f^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ није финкција.

Дефиниција

Функција $f : A \to B$ је **сурјекција**, или "на" функција, ако важи

$$\text{за свако } b \in B \text{ постоји } a \in A \text{ тако да је } f(a) = b.$$

Функција $f : A \to B$ је **инјекција**, или "1-1" функција, ако важи

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2, \text{ за све } a_1, a_2 \in A.$$

За функцију $f : A \to B$ кажемо да је **бијекција** ако је инјекција и сурјекција.

Тврђење

Релација $f^{-1} \subseteq B \times A$ је функција која слика скуп B у скуп A ако и само ако је $f : A \to B$ бијекција.

Доказ: на часу.

Тврђење

Релација $f^{-1} \subseteq B \times A$ је функција која слика скуп B у скуп A ако и само ако је $f : A \to B$ бијекција.

Доказ: на часу.

Тврђење

Ако су релације $f \subseteq A \times B$ и $g \subseteq B \times C$ функције, онда је и релација $g \circ f$ функција и важи $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, за свако $a \in A$.

Доказ: на часу.

Тврђење

Релација $f^{-1} \subseteq B \times A$ је функција која слика скуп B у скуп A ако и само ако је $f : A \to B$ бијекција.

Доказ: на часу.

Тврђење

Ако су релације $f \subseteq A \times B$ и $g \subseteq B \times C$ функције, онда је и релација $g \circ f$ функција и важи $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, за свако $a \in A$.

Доказ: на часу.

Тврђење

Нека је $f : A \to B$. Тада важи: f је бијекција ако и само ако постоји функција $g : B \to A$ тдј. $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$. (у том случају је $g = f^{-1}$)

Доказ: на часу.

Директна и инверзна слика

Дефиниција

Нека је $f : X \to Y$ и $A \subseteq X$. **Директна слика** скупа A је скуп

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Нека је $f : X \to Y$ и $B \subseteq Y$. **Инверзна слика** скупа B је скуп

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Инверзна слика скупа $f^{-1}[B]$ је појам који је дефинисан без обзира на то да ли постоји инверзна функција f^{-1}.

Директна и инверзна слика

Дефиниција

Нека је $f : X \to Y$ и $A \subseteq X$. **Директна слика** скупа A је скуп

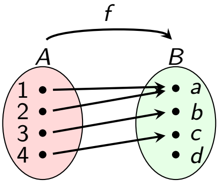
$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Нека је $f : X \to Y$ и $B \subseteq Y$. **Инверзна слика** скупа B је скуп

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Инверзна слика скупа $f^{-1}[B]$ је појам који је дефинисан без обзира на то да ли постоји инверзна функција f^{-1}.

Пример:



$$f[\{1\}] = \{f(1)\} = \{a\}$$
$$f[\{1,2\}] = \{f(1), f(2)\} = \{a\}$$
$$f[\{1,3\}] = \{f(1), f(3)\} = \{a, b\}$$
$$f^{-1}[\{a\}] = \{1,2\}$$
$$f^{-1}[\{a,b\}] = \{1,2,3\}$$
$$f^{-1}[\{a,b,d\}] = \{1,2,3\}$$

Особине директне и инверзне слике:

Нека је $f : X \to Y$ и $A, A_1, A_2 \subseteq X, B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Тада важи:

1. Ако је $A_1 \subseteq A_2$, онда је $f[A_1] \subseteq f[A_2]$.
2. Ако је $B_1 \subseteq B_2$, онда је $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$.
3. Важи да је $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$. Ако је f инјективна, тада је $f^{-1}[f[A]] = A$.
4. Важи да је $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$. Ако је f сурјективна, тада је $f[f^{-1}[B]] = B$.