ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 4 (24.10.2022.)
Тема: **Релације поретка**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Скуп A на коме је дефинисана релација парцијалног уређења ρ називамо **парцијално уређен скуп** или **посет**.

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Скуп A на коме је дефинисана релација парцијалног уређења ρ називамо **парцијално уређен скуп** или **посет**.

Релација ρ је релација поретка на скупу A ако и само ако важи:

$$\triangle_A \subseteq \rho \qquad \rho \cap \rho^{-1} = \triangle_A \qquad \rho \circ \rho = \rho.$$

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Скуп A на коме је дефинисана релација парцијалног уређења ρ називамо **парцијално уређен скуп** или **посет**.

Релација ρ је релација поретка на скупу A ако и само ако важи:

$$\triangle_A \subseteq \rho \qquad \rho \cap \rho^{-1} = \triangle_A \qquad \rho \circ \rho = \rho.$$

Примери релација парцијалног уређења:

1. Релација мање или једнако на скупу реалних бројева: $\leq$.
2. Релација дељивости на скупу природних бројева: $|$.
3. Релација инклузије на партитивном скупу неког скупа: $\subseteq$.

Нека је $\rho \subseteq A^2$ поредак. Елементи a и b су **упоредиви** ако важи $a \, \rho \, b$ или $b \, \rho \, a$. У супротном, a и b су **неупоредиви**.

$a \, \rho \, b$ читамо: a је ρ-мање од b, односно, b је ρ-веће од a.

Нека је $\rho \subseteq A^2$ поредак. Елементи a и b су **упоредиви** ако важи $a\,\rho\,b$ или $b\,\rho\,a$. У супротном, a и b су **неупоредиви**.

$a\,\rho\,b$ читамо: a је ρ-мање од b, односно, b је ρ-веће од a.

Поредак је **линеаран** (**тоталан**) ако су свака два елемента упоредива. Уколико нису свака два елемента упоредива, поредак је **парцијалан**. Линеарно уређен подскуп неког парцијално уређен скуп назива се **ланац**. Подскупове парцијално уређеног скупа у којима су свака два елемента неупоредива називамо **антиланци**.

Нека је $\rho \subseteq A^2$ поредак. Елементи a и b су **упоредиви** ако важи $a \,\rho\, b$ или $b \,\rho\, a$. У супротном, a и b су **неупоредиви**.

$a \,\rho\, b$ читамо: a је ρ-мање од b, односно, b је ρ-веће од a.

Поредак је **линеаран** (**тоталан**) ако су свака два елемента упоредива. Уколико нису свака два елемента упоредива, поредак је **парцијалан**. Линеарно уређен подскуп неког парцијално уређен скуп назива се **ланац**. Подскупове парцијално уређеног скупа у којима су свака два елемента неупоредива називамо **антиланци**.

Примери:

1. $\leq$ је линеаран поредак на $\mathbb{R}$,
2. $|$ није линеаран поредак на $\mathbb{N}$,
   скуп $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ је један ланац на $\mathbb{N}$
3. $\subseteq$ није линеаран поредак на $\mathcal{P}(X)$, за произвољан скуп X,
   скуп свих једночланих подскупова од X је један антиланац у $\mathcal{P}(X)$

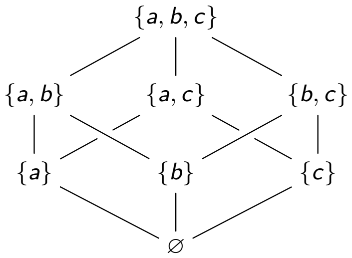
Парцијално уређени скупови могу се представити графички помоћу **Хасеовог дијаграма**. Ако је A скуп на коме је дато парцијално уређење ρ, Хасеов дијаграм посета A формира се на следећи начин:

- сваком елементу скупа A одговара једна тачка у равни;
- тачке које одговарају елементима $x, y \in A$ су спојене линијом ако и само ако је $x \rho y$, при чему се x налази ниже на цртежу од y.

Парцијално уређени скупови могу се представити графички помоћу **Хасеовог дијаграма**. Ако је A скуп на коме је дато парцијално уређење ρ, Хасеов дијаграм посета A формира се на следећи начин:

- сваком елементу скупа A одговара једна тачка у равни;
- тачке које одговарају елементима $x, y \in A$ су спојене линијом ако и само ако је $x\rho y$, при чему се x налази ниже на цртежу од y.

Пример: Нека је $X = \{a, b, c\}$. Скуп $\mathcal{P}(X)$ уређен је релацијом $\subseteq$ и у односу на ову релацију представља се помоћу Хасеовог дијаграма на следећи начин:



Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
  ако је $x \,\rho\, a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;

Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
  ако је $x \,\rho\, a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
  ако је $a \,\rho\, x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;

Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
  ако је $x \,\rho\, a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
  ако је $a \,\rho\, x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **најмањи елемент (минимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $a \,\rho\, x$;

Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи: ако је $x \,\rho\, a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи: ако је $a \,\rho\, x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **најмањи елемент (минимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $a \,\rho\, x$;
- **највећи елемент (максимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $x \,\rho\, a$;

Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи: ако је $x \,\rho\, a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи: ако је $a \,\rho\, x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **најмањи елемент (минимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $a \,\rho\, x$;
- **највећи елемент (максимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $x \,\rho\, a$;

Примери:

	$\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ \subseteq$	$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\},\ \subseteq$	$\mathrm{N},\ \mid$	$\mathrm{N} \setminus \{1\},\ \mid$
минимум	$\emptyset$	нема	1	нема
максимум	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	0	0
минимални елемент(и)	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	1	прости бројеви
максимални елемент(и)	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	0	0

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B, тада и једини минималан елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B, тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B, тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B, онда је он јединствен.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B, тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B, онда је он јединствен.
5. Ако постоји највећи елемент скупа B, тада и једини максималан елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B, тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B, онда је он јединствен.
5. Ако постоји највећи елемент скупа B, тада и једини максималан елемент.
6. Уколико постоји максималан елемент, не мора нужно постојати највећи елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B, онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B, тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B, онда је он јединствен.
5. Ако постоји највећи елемент скупа B, тада и једини максималан елемент.
6. Уколико постоји максималан елемент, не мора нужно постојати највећи елемент.

Доказ: на часу

Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног уређење на скупу A, $B \subseteq A$ и $a \in A$. Кажемо да је елемент a

- **доње ограничење** скупа B ако $a \, \rho \, b$ за све $b \in B$;
- **горње ограничење** скупа B ако $b \, \rho \, a$ за све $b \in B$.

Ако постоји највеће доње ограничење, називамо га **инфимум** скупа B. Ако постоји најмање горње ограничење називамо га **супремум** скупа B. Инфимум и супремум скупа B редом означавамо са $\inf(B)$ и $\sup(B)$.

Дефиниција

Нека је ρ релација парцијалног уређење на скупу A, $B \subseteq A$ и $a \in A$. Кажемо да је елемент a

- **доње ограничење** скупа B ако $a \, \rho \, b$ за све $b \in B$;
- **горње ограничење** скупа B ако $b \, \rho \, a$ за све $b \in B$.

Ако постоји највеће доње ограничење, називамо га **инфимум** скупа B. Ако постоји најмање горње ограничење називамо га **супремум** скупа B. Инфимум и супремум скупа B редом означавамо са $\inf(B)$ и $\sup(B)$.

Важи следеће:

1. Ако постоји минимум у скупу B, онда је он једнак инфинуму скупа B.
2. Ако постоји максимум у скупу B, онда је он једнак супремуму скупа B.

Доказ: на часу.