ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 3 (17.10.2022.)
Тема: **Релације еквиваленције**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација ρ је релација еквиваленције на скупу A акко важи

$$\triangle_A \subseteq \rho, \qquad \rho = \rho^{-1}, \qquad \rho \circ \rho = \rho.$$

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација ρ је релација еквиваленције на скупу A акко важи

$$\triangle_A \subseteq \rho, \qquad \rho = \rho^{-1}, \qquad \rho \circ \rho = \rho.$$

Примери релација еквиваленције:

- Релација једнакости реалних бројева.
- Релација сличности у скупу троуглова еуклидске равни.
- Нека је $m \geq 2$. Релација $\equiv_m$ дефинисана на скупу $\mathbb{Z}$ са:

  $$x \equiv_m y \quad \text{акко} \quad m \mid x - y$$

  је релација еквиваленције.

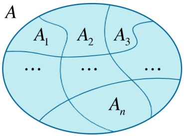
Класе еквиваленције

A – скуп људи који живе у једној држави X

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скуп градова државе X

На скупу A дефинисана је релација $\sim \subseteq A^2$ на следећи начин:

$$P_1 \sim P_2 \quad \text{акко} \quad \text{особа } P_1 \text{ живи у истом граду као и особа } P_2.$$



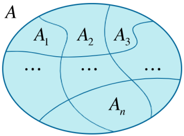
Класе еквиваленције

A – скуп људи који живе у једној држави X

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скуп градова државе X

На скупу A дефинисана је релација $\sim \subseteq A^2$ на следећи начин:

$$P_1 \sim P_2 \quad \text{акко} \quad \text{особа } P_1 \text{ живи у истом граду као и особа } P_2.$$



Дефиниција

Нека је $\sim$ релација еквиваленције на скупу A. **Класа еквиваленције елемента** $a \in A$ је скуп

$$C_a = \{x \in A \mid a \sim x\} \subseteq A.$$

Означавамо је и са $[a]$ и кажемо да је елемент a **представник класе** C_a.

$\sim$ – релација еквиваленције на скупу A

Особине релације $\sim$:

1. Све класе еквиваленције су непразни скупови.
2. Нека је $a, b \in A$. Ако је $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, онда је $C_a = C_b$.
3. Унија свих класа еквиваленције је једнака скупу A.

Доказ. На часу.

$\sim$ – релација еквиваленције на скупу A

Особине релације $\sim$:

1. Све класе еквиваленције су непразни скупови.
2. Нека је $a, b \in A$. Ако је $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, онда је $C_a = C_b$.
3. Унија свих класа еквиваленције је једнака скупу A.

Доказ. На часу.

Свака релација еквиваленције дели скуп на коме је дефинисана на непразне, дисјунктне скупове чија унија је једнака целом скупу. Таква подела се назива **партиција скупа**.

$\sim$ – релација еквиваленције на скупу A

Особине релације $\sim$:

1. Све класе еквиваленције су непразни скупови.
2. Нека је $a, b \in A$. Ако је $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, онда је $C_a = C_b$.
3. Унија свих класа еквиваленције је једнака скупу A.

Доказ. На часу.

Свака релација еквиваленције дели скуп на коме је дефинисана на непразне, дисјунктне скупове чија унија је једнака целом скупу. Таква подела се назива **партиција скупа**.

Дефиниција

Количнички скуп скупа A за релацију еквиваленције $\sim$ је

$$A/_{\sim} = \{C_x \mid x \in A\}.$$

Приметимо да је $A/_{\sim} \subseteq \mathcal{P}(A)$, јер важи да је $C_a \subseteq A$, за све $a \in A$.

Особине количничког скупа:

1. Ако $X, Y \in A/_\sim$ и $X \neq Y$, тада је $X \cap Y = \emptyset$.
2. Важи да је $\bigcup A/_\sim = \bigcup\limits_{X \in A/_\sim} X = A$.