Дискретне структуре 1

предавање 2 (14.11.2025.)

Тема: РЕЛАЦИЈЕ

Александра Костић Матијевић

Катедра за алгебру и математичку логику

Математички факултет, Београд

Дефиниција и примери

Неформално речено, појам релације бави се остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

Дефиниција и примери

Неформално речено, појам релације бави се остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

дефиниција: Нека су A и B скупови. **Релација** ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A \times B$. Дакле, $\rho \subseteq A \times B$. Ако је $A = B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

Чињеницу да $(a, b) \in \rho$ пишемо и $a\rho b$.

Дефиниција и примери

Неформално речено, појам релације бави се остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

дефиниција: Нека су A и B скупови. **Релација** ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A \times B$. Дакле, $\rho \subseteq A \times B$. Ако је $A = B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

Чињеницу да $(a, b) \in \rho$ пишемо и $a \rho b$.

Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\}$ је једна релација са скупа A на скуп B.
$\sigma = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$ је једна бинарна релација на скупу A

Дефиниција и примери

Неформално речено, појам релације бави се остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

дефиниција: Нека су A и B скупови. **Релација** ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A \times B$. Дакле, $\rho \subseteq A \times B$. Ако је $A = B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

Чињеницу да $(a, b) \in \rho$ пишемо и $a\rho b$.

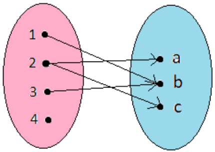
Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\}$ је једна релација са скупа A на скуп B.
$\sigma = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$ је једна бинарна релација на скупу A

Различити начини представљања релација:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\} \subseteq A \times B$$

	a	b	c
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0
4	0	0	0

табелари приказ



приказ помоћу дијаграма

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Инверзна релација релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a,b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a,b) \in \rho\}.$$

Инверзна релација релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\rho^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

Композиција релација $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$:

$$\sigma \circ \rho = \{(a,c) \in A \times C \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да } (a,b) \in \rho \text{ и } (b,c) \in \sigma\} \subseteq A \times C.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a,b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a,b) \in \rho\}.$$

Инверзна релација релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\rho^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

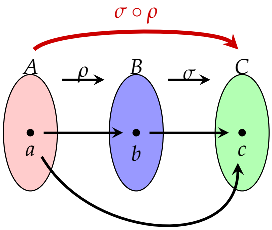
Композиција релација $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$:

$$\sigma \circ \rho = \{(a,c) \in A \times C \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да } (a,b) \in \rho \text{ и } (b,c) \in \sigma\} \subseteq A \times C.$$

Пример:
$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{x,y,z\},\ C = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ $\rho = \{(1,y),(2,z),(2,x),(3,y)\} \subseteq A \times B$,
$\sigma = \{(x,\beta),(y,\beta)\} \subseteq B \times C$

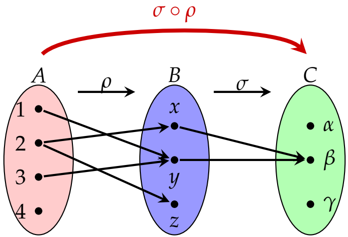
$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{1,2,3\} \qquad \rho^{-1} = \{(y,1),(z,2),(x,2),(y,3)\}$$
$$\mathrm{Im}(\rho) = \{x,y,z\}$$

Композиција релација



$$a\ (\sigma \circ \rho)\ c \quad \text{акко} \quad a\,\rho\,b \text{ и } b\,\sigma\,c \text{ за неко } b \in B$$

Пример:
$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\}$
$C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
$\rho = \{(1, y), (2, z), (2, x), (3, y)\} \subseteq A \times B,$
$\sigma = \{(x, \beta), (y, \beta)\} \subseteq B \times C$
$\sigma \circ \rho = \{(1, \beta), (2, \beta), (3, \beta)\}$



Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho,\sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$
- $(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$.

  Докази: на часу

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$
- $(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$.

  Докази: на часу

Особине композиције:

Нека је $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$ и $\tau \subseteq C \times D$, тада важи:

- $(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$
- $(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$.

  Докази: на часу

Особине композиције:

Нека је $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$ и $\tau \subseteq C \times D$, тада важи:

- $(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$
- $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$

  Докази: на часу

Особине релација

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ

- рефлексивна, ако је $(a,a) \in \rho$ за свако $a \in A$;
- антирефлексивна, ако је $(a,a) \notin \rho$ за свако $a \in A$;
- симетрична, ако за све $a,b \in A$ из $(a,b) \in \rho$ следи $(b,a) \in \rho$;
- антисиметрична, ако за све $a,b \in A$ из $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho$ следи да је $a = b$;
- транзитивна, ако за све $a,b,c \in A$ из $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$ следи да $(a,c) \in \rho$.

Особине релација

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ

- рефлексивна, ако је $(a, a) \in \rho$ за свако $a \in A$;
- антирефлексивна, ако је $(a, a) \notin \rho$ за свако $a \in A$;
- симетрична, ако за све $a, b \in A$ из $(a, b) \in \rho$ следи $(b, a) \in \rho$;
- антисиметрична, ако за све $a, b \in A$ из $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$ следи да је $a = b$;
- транзитивна, ако за све $a, b, c \in A$ из $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho$ следи да $(a, c) \in \rho$.

Нека је $\triangle_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, релација ρ је

- рефлексивна, ако је $\triangle_A \subseteq \rho$;
- антирефлексивна, ако је $\triangle_A \cap \rho = \emptyset$;
- симетрична, ако је $\rho \subseteq \rho^{-1}$;
- антисиметрична, ако је $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \triangle_A$;
- транзитивна, ако је $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Примери

	$\leq$ на $\mathbb{R}$	паралелност правих на скупу правих у простору	нормалност правих на скупу правих у простору
рефлексивност	да	да	не
антирефлексивност	не	не	да
симетричност	не	да	да
антисиметричност	да	не	не
транзитивност	да	да	не

Примери

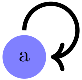
	$\leq$ на $\mathbb{R}$	паралелност правих на скупу правих у простору	нормалност правих на скупу правих у простору
рефлексивност	да	да	не
антирефлексивност	не	не	да
симетричност	не	да	да
антисиметричност	да	не	не
транзитивност	да	да	не

$A = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\} \subseteq A^2$
$\sigma = \{(a, c), (b, a)\} \subseteq A^2$

	ρ	σ
рефлексивност	не	не
антирефлексивност	не	да
симетричност	да	не
антисиметричност	не	да
транзитивност	да	не

Матрични приказ особина релације

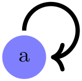
Рефлексивност:



$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

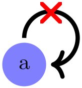
Матрични приказ особина релације

Рефлексивност:



$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

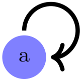
Антирефлексивност:



$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

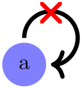
Матрични приказ особина релације

Рефлексивност:



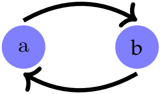
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Антирефлексивност:



$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

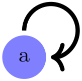
Симетричност:



$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

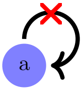
Матрични приказ особина релације

Рефлексивност:



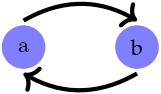
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Антирефлексивност:



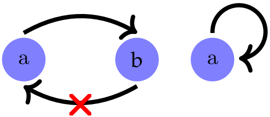
$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Симетричност:



$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Антисиметричност:



$$\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ 1 & & & 1 & \\ & 0 & & & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Матрица композиције релација

Нека $R, S \in M_n(\{0,1\})$. **Булов производ матрица** $R = [r_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ и $S = [s_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, у ознаци $R \otimes S$, је матрица $T = [t_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ таква да је

$$t_{ij} = (r_{i,1} \wedge s_{1,j}) \vee (r_{i,2} \wedge s_{2,j}) \vee \cdots \vee (r_{i,n} \wedge s_{n,j}),$$

при чему су бинарна операције $\wedge, \vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ дефинисане на следећи начин:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Матрица композиције релација

Нека $R, S \in M_n(\{0,1\})$. **Булов производ матрица** $R = [r_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ и $S = [s_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, у ознаци $R \otimes S$, је матрица $T = [t_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ таква да је

$$t_{ij} = (r_{i,1} \wedge s_{1,j}) \vee (r_{i,2} \wedge s_{2,j}) \vee \cdots \vee (r_{i,n} \wedge s_{n,j}),$$

при чему су бинарна операције $\wedge, \vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ дефинисане на следећи начин:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

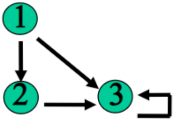
$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Матрицу релације ρ означаваћемо са M_ρ.

теорема: Нека је ρ бинарна релација на произвољном скупу A, тада је $M_{\sigma\circ\rho} = M_\rho \otimes M_\sigma$.

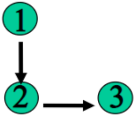
Доказ. На часу.

Транзитивност и матрица релације



ТРАНЗИТИВНА РЕЛАЦИЈА

$$\underset{\mathbf{R}}{\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}} \otimes \underset{\mathbf{R}}{\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}} = \underset{\mathbf{R}^2 \subseteq \mathbf{R}}{\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}}$$



РЕЛАЦИЈА НИЈЕ ТРАНЗИТИВНА

$$\underset{\mathbf{R}}{\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}} \otimes \underset{\mathbf{R}}{\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}} = \underset{\mathbf{R}^2 \not\subseteq \mathbf{R}}{\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}}$$