ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 2 (10.10.2022.)
Тема: **Релације**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Неформално речено, појам релације бави остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

Неформално речено, појам релације бави остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

Дефиниција

Нека су A и B скупови. **Релација** ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A \times B$. Дакле, $\rho \subseteq A \times B$. Ако је $A = B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

Чињеницу да $(a, b) \in \rho$ пишемо и $a\rho b$.

Неформално речено, појам релације бави остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

Дефиниција

Нека су A и B скупови. **Релација** ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A \times B$. Дакле, $\rho \subseteq A \times B$. Ако је $A = B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

Чињеницу да $(a, b) \in \rho$ пишемо и $a\rho b$.

Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\}$ је једна релација са скупа A на скуп B.
$\sigma = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$ је једна бинарна релација на скупу A

Неформално речено, појам релације бави остваривањем веза између неких елемената скупова које посматрамо.

Дефиниција

Нека су A и B скупови. **Релација** ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A \times B$. Дакле, $\rho \subseteq A \times B$. Ако је $A = B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

Чињеницу да $(a, b) \in \rho$ пишемо и $a\rho b$.

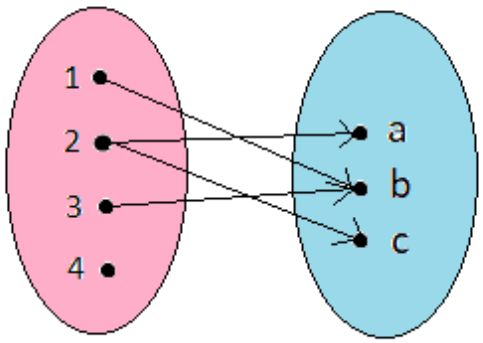
Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\}$ је једна релација са скупа A на скуп B.
$\sigma = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$ је једна бинарна релација на скупу A

Различити начини представљања релација:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\} \subseteq A \times B$$

	a	b	c
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0
4	0	0	0

табелари приказ



приказ помоћу дијаграма

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Инверзна релација релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Инверзна релација релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

Композиција релација $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$:

$$\sigma \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да } (a, b) \in \rho \text{ и } (b, c) \in \sigma\} \subseteq A \times C.$$

Домен релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Слика релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{постоји } a \in A \text{ тако да је } (a, b) \in \rho\}.$$

Инверзна релација релације $\rho \subseteq A \times B$:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

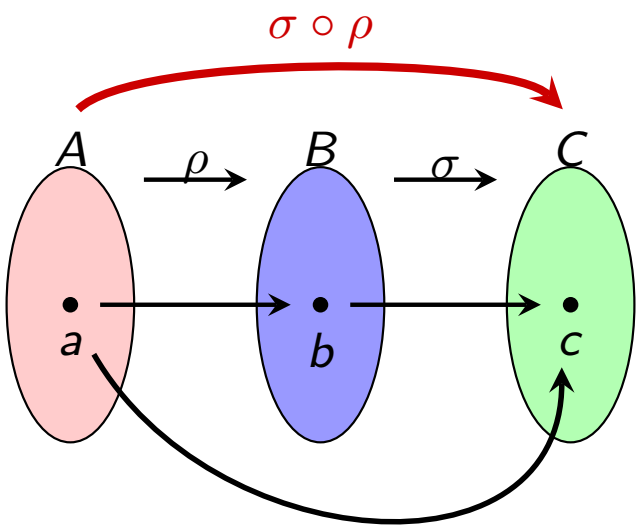
Композиција релација $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$:

$$\sigma \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{постоји } b \in B \text{ тако да } (a, b) \in \rho \text{ и } (b, c) \in \sigma\} \subseteq A \times C.$$

Пример:
$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\},\ C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
$\rho = \{(1, y), (2, z), (2, x), (3, y)\} \subseteq A \times B,$
$\sigma = \{(x, \beta), (y, \beta)\} \subseteq B \times C$

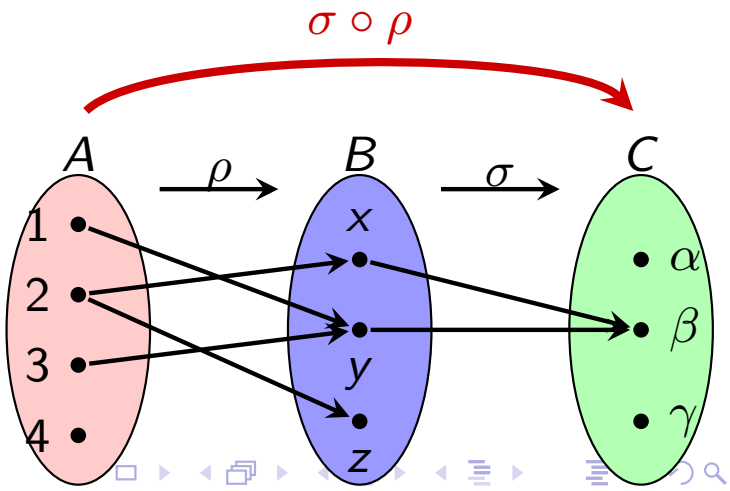
$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{1, 2, 3\} \qquad \rho^{-1} = \{(y, 1), (z, 2), (x, 2), (y, 3)\}$$
$$\mathrm{Im}(\rho) = \{x, y, z\}$$

Композиција релација



$a\ (\sigma \circ \rho)\ c$ акко $a\,\rho\,b$ и $b\,\sigma\,c$ за неко $b \in B$

Пример:
$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\}$
$C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
$\rho = \{(1, y), (2, z), (2, x), (3, y)\} \subseteq A \times B,$
$\sigma = \{(x, \beta), (y, \beta)\} \subseteq B \times C$
$\sigma \circ \rho = \{(1, \beta), (2, \beta), (3, \beta)\}$



Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$
- $(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$.

  Докази: на часу

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$
- $(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$.

  Докази: на часу

Особине композиције:

Нека је $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$ и $\tau \subseteq C \times D$, тада важи:

- $(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$

Особине инверзне релације:

Нека су дате релације $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ тада важи:

- Ако је $\rho \subseteq \sigma$, онда је $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.
- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- $(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}$
- $(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$.

  Докази: на часу

Особине композиције:

Нека је $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$ и $\tau \subseteq C \times D$, тада важи:

- $(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$
- $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$

  Докази: на часу

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ

- рефлексивна, ако је $(a, a) \in \rho$ за свако $a \in A$;
- антирефлексивна, ако је $(a, a) \notin \rho$ за свако $a \in A$;
- симетрична, ако за све $a, b \in A$ из $(a, b) \in \rho$ следи $(b, a) \in \rho$;
- антисиметрична, ако за све $a, b \in A$ из $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$ следи да је $a = b$;
- транзитивна, ако за све $a, b, c \in A$ из $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho$ следи да $(a, c) \in \rho$.

Дефиниција

Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ

- рефлексивна, ако је $(a, a) \in \rho$ за свако $a \in A$;
- антирефлексивна, ако је $(a, a) \notin \rho$ за свако $a \in A$;
- симетрична, ако за све $a, b \in A$ из $(a, b) \in \rho$ следи $(b, a) \in \rho$;
- антисиметрична, ако за све $a, b \in A$ из $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$ следи да је $a = b$;
- транзитивна, ако за све $a, b, c \in A$ из $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho$ следи да $(a, c) \in \rho$.

Нека је $\triangle_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, релација ρ је

- рефлексивна, ако је $\triangle_A \subseteq \rho$;
- антирефлексивна, ако је $\triangle_A \cap \rho = \emptyset$;
- симетрична, ако је $\rho \subseteq \rho^{-1}$;
- антисиметрична, ако је $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \triangle_A$;
- транзитивна, ако је $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Примери:

	$\leq$ на $\mathbb{R}$	паралелност правих на скупу правих у простору	нормалност правих на скупу правих у простору
рефлексивност	да	да	не
антирефлексивност	не	не	да
симетричност	не	да	да
антисиметричност	да	не	не
транзитивност	да	да	не

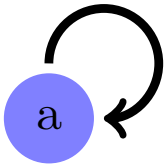
Примери:

	$\leq$ на $\mathbb{R}$	паралелност правих на скупу правих у простору	нормалност правих на скупу правих у простору
рефлексивност	да	да	не
антирефлексивност	не	не	да
симетричност	не	да	да
антисиметричност	да	не	не
транзитивност	да	да	не

$A = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\} \subseteq A^2$
$\sigma = \{(a, c), (b, a)\} \subseteq A^2$

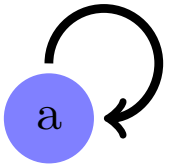
	ρ	σ
рефлексивност	не	не
антирефлексивност	не	да
симетричност	да	не
антисиметричност	не	да
транзитивност	да	не

Рефлексивност:



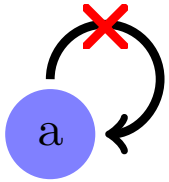
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Рефлексивност:



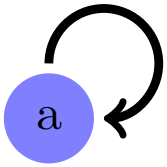
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Антирефлексивност:



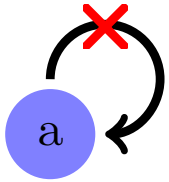
$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Рефлексивност:



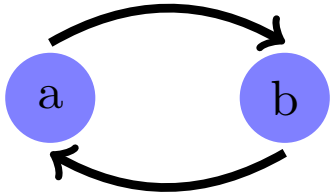
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Антирефлексивност:



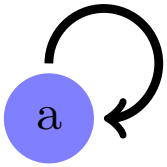
$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Симетричност:



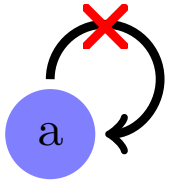
$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Рефлексивност:



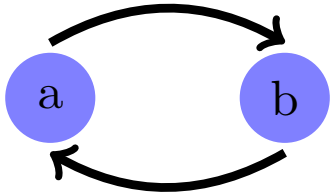
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Антирефлексивност:



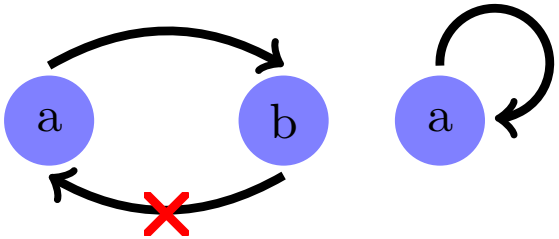
$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Симетричност:



$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Антисиметричност:



$$\begin{pmatrix} & 0 & & \\ 1 & & 1 & \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & \end{pmatrix}$$

Нека $R, S \in M_n(\{0,1\})$. **Булов производ матрица** $R = [r_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ и $S = [s_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, у ознаци $R \otimes S$, је матрица $T = [t_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ таква да је

$$t_{ij} = (r_{i,1} \wedge s_{1,j}) \vee (r_{i,2} \wedge s_{2,j}) \vee \cdots \vee (r_{i,n} \wedge s_{n,j}),$$

при чему су бинарна операције $\wedge, \vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ дефинисане на следећи начин:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Нека $R, S \in M_n(\{0,1\})$. **Булов производ матрица** $R = [r_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ и $S = [s_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, у ознаци $R \otimes S$, је матрица $T = [t_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ таква да је

$$t_{ij} = (r_{i,1} \wedge s_{1,j}) \vee (r_{i,2} \wedge s_{2,j}) \vee \cdots \vee (r_{i,n} \wedge s_{n,j}),$$

при чему су бинарна операције $\wedge, \vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ дефинисане на следећи начин:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

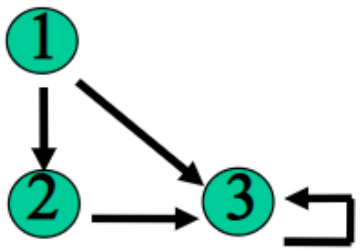
Матрицу релације ρ означаваћемо са M_ρ.

Тврђење

Нека је ρ бинарна релација на произвољном скупу A, тада је $M_{\rho\circ\rho} = M_\rho \otimes M_\rho$.

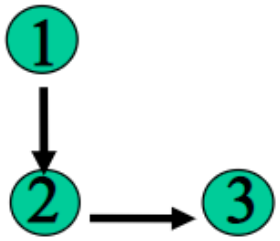
Доказ. На часу.

Транзитивност и матрица релације



ТРАНЗИТИВНА РЕЛАЦИЈА

$$\underset{R}{\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}} \otimes \underset{R}{\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}} = \underset{R^2 \subseteq R}{\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}}$$



РЕЛАЦИЈА НИЈЕ ТРАНЗИТИВНА

$$\underset{R}{\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \otimes \underset{R}{\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}} = \underset{R^2 \not\subseteq R}{\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$