ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 13 (26.12.2022.)
Тема: **Булове алгебре.**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Булово уређење

Нека је структура $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ Булова алгебра. На скупу B можемо дефинисати релацију парцијалног уређења на следећи начин:

$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad x \curlywedge y = x.$$

Булово уређење

Нека је структура $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ Булова алгебра. На скупу B можемо дефинисати релацију парцијалног уређења на следећи начин:

$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad x \curlywedge y = x.$$

Пар $(B, \preccurlyeq)$ је парцијално уређени скуп. Уколико је домен B коначан, Булову алгебру $\mathbf{B}$ можемо представити графички помоћу Хасеовог дијаграма.

Булово уређење

Нека је структура $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ Булова алгебра. На скупу B можемо дефинисати релацију парцијалног уређења на следећи начин:

$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad x \curlywedge y = x.$$

Пар $(B, \preccurlyeq)$ је парцијално уређени скуп. Уколико је домен B коначан, Булову алгебру $\mathbf{B}$ можемо представити графички помоћу Хасеовог дијаграма.

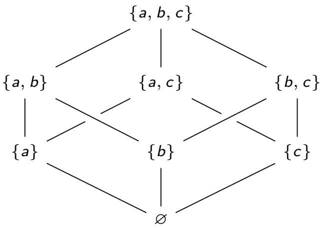
Пример: Посматрајмо Булову алгебру

$$\boldsymbol{\mathscr{P}(\{a, b, c\})} = (\mathscr{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \{a, b, c\}).$$

Важи да је $\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. На скупу $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$ дефинисано је Булово уређење $\preccurlyeq$ са:

$$A \preccurlyeq B \quad \text{акко} \quad A \cap B = A \quad \text{акко} \quad A \subseteq B.$$

Булову алгебру $\boldsymbol{\mathscr{P}(\{a, b, c\})}$ представљамо помоћу Хасеовог дијаграма на следећи начин:



Пример: На скупу $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ (тј. скупу делилаца броја 30), дефинисане су бинарне операције $\text{нзс}(x, y)$ и $\text{нзд}(x, y)$, као и унарна операција $30/x$, за све $x, y \in B$. Структура $\mathbf{D_{30}} = (D_{30}, \text{нзс}, \text{нзд}, 30/, 1, 30)$ је Булова алгебра.За све $x, y \in D_{30}$, испуњени су следећу услови:

A1: $\text{нзс}(x, y) = \text{нзс}(y, x)$,

A2: $\text{нзд}(x, y) = \text{нзд}(y, x)$,

A3: $\text{нзс}(x, \text{нзд}(y, z)) = \text{нзд}(\text{нзс}(x, y), \text{нзс}(x, z))$,

A4: $\text{нзд}(x, \text{нзс}(y, z)) = \text{нзс}(\text{нзд}(x, y), \text{нзд}(x, z))$,

A5: $\text{нзс}(x, 1) = x$,

A6: $\text{нзд}(x, 30) = x$,

A7: $\text{нзс}(x, 30/x) = 30$,

A8: $\text{нзд}(x, 30/x) = 1$,

A9: $1 \neq 30$.

Пример: На скупу $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ (тј. скупу делилаца броја 30), дефинисане су бинарне операције нзс(x, y) и нзд(x, y), као и унарна операција $30/x$, за све $x, y \in B$. Структура $\mathbf{D_{30}} = (D_{30}, \text{нзс}, \text{нзд}, 30/, 1, 30)$ је Булова алгебра.За све $x, y \in D_{30}$, испуњени су следећу услови:

A1: нзс$(x, y) =$ нзс(y, x),

A2: нзд$(x, y) =$ нзд(y, x),

A3: нзс$(x,$ нзд$(y, z)) =$ нзд(нзс(x, y), нзс$(x, z))$,

A4: нзд$(x,$ нзс$(y, z)) =$ нзс(нзд(x, y), нзд$(x, z))$,

A5: нзс$(x, 1) = x$,

A6: нзд$(x, 30) = x$,

A7: нзс$(x, 30/x) = 30$,

A8: нзд$(x, 30/x) = 1$,

A9: $1 \neq 30$.

Генерално, уколико је природан број n производ различитих простих бројева и D_n скуп свих делилаца броја n, тада је структура $\mathbf{D_n} = (D_n, \text{нзс}, \text{нзд}, n/, 1, n)$ Булова алгебра. Булово уређење $\preccurlyeq$ на скупу D_n дефинисано је са:

$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad \text{нзд}(x, y) = x \quad \text{акко} \quad x \mid y.$$

Пример: На скупу $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ (тј. скупу делилаца броја 30), дефинисане су бинарне операције нзс(x, y) и нзд(x, y), као и унарна операција $30/x$, за све $x, y \in B$. Структура $\mathbf{D_{30}} = (D_{30}, \text{нзс}, \text{нзд}, 30/, 1, 30)$ је Булова алгебра.За све $x, y \in D_{30}$, испуњени су следеђу услови:

A1: нзс$(x, y) =$ нзс(y, x),

A2: нзд$(x, y) =$ нзд(y, x),

A3: нзс$(x,$ нзд$(y, z)) =$ нзд(нзс(x, y), нзс$(x, z))$,

A4: нзд$(x,$ нзс$(y, z)) =$ нзс(нзд(x, y), нзд$(x, z))$,

A5: нзс$(x, 1) = x$,

A6: нзд$(x, 30) = x$,

A7: нзс$(x, 30/x) = 30$,

A8: нзд$(x, 30/x) = 1$,

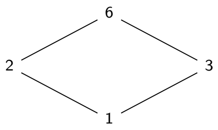
A9: $1 \neq 30$.

Генерално, уколико је природан број n производ различитих простих бројева и D_n скуп свих делилаца броја n, тада је структура $\mathbf{D_n} = (D_n, \text{нзс}, \text{нзд}, n/, 1, n)$ Булова алгебра. Булово уређење $\preccurlyeq$ на скупу D_n дефинисано је са:

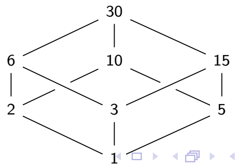
$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad \text{нзд}(x, y) = x \quad \text{акко} \quad x \mid y.$$

Хасеови дијаграми парцијално уређених скупова $(D_6, |)$ и $(D_{30}, |)$. ($D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ и $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$)

$\mathbf{D_6}$:



$\mathbf{D_{30}}$:



Атоми

Дефиниција

Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ произвољна Булова алгебра. Елемент $a \in B$ је **атом** уколико важи следеће:

1) $0 \prec a$;
2) ако постоји $y \in B$такво да је $0 \preccurlyeq y \preccurlyeq a$, тада је $y = 0$ или је $y = a$.

У генералном случају, Булова алгебра не мора да садржи атоме. Уколико Булова алгебра не садржи ниједан атом, кажемо да је **безатомична**. Коначне Булове алгебре увек имају атоме. Шта више, сваки елемент произвољне коначне Булове алгебре може се представити као буловска дисјункција атома.

Атоми

Дефиниција

Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ произвољна Булова алгебра. Елемент $a \in B$ је **атом** уколико важи следеће:

1) $0 \prec a$;

2) ако постоји $y \in B$ такво да је $0 \preccurlyeq y \preccurlyeq a$, тада је $y = 0$ или је $y = a$.

У генералном случају, Булова алгебра не мора да садржи атоме. Уколико Булова алгебра не садржи ниједан атом, кажемо да је **безатомична**. Коначне Булове алгебре увек имају атоме. Шта више, сваки елемент произвољне коначне Булове алгебре може се представити као буловска дисјункција атома.

Тврђење

Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ коначна Булова алгебра, тада важи следеће:

1. Ако је $x \neq 0$ и $x \in B$, тада постоји атом $a \in B$ такав да је $a \preccurlyeq x$.
2. Ако је $x \neq 0$ и $x \in B$, тада је $x = \curlyvee\{a \mid a \in B \text{ је атом и } a \preccurlyeq x\}$.

Доказ: на часу.

Изоморфизам Булових алгебри

Хасеови дијаграми Булових алгебри

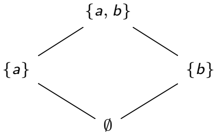
$$\boldsymbol{\mathscr{P}(\{a,b\})} = \big(\mathscr{P}(\{a,b\}), \cup, \cap, {}^{C}, \emptyset, \{a,b\}\big) \quad \text{и} \quad \mathbf{D_6} = (\{1,2,3,6\}, \text{нзс}, \text{нзд}, 6/, 1, 6)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{a,b\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{a\} \arrow[dr, dash] & & \{b\} \arrow[dl, dash] \\
 & \emptyset &
\end{tikzcd}
\qquad \text{и} \qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 6 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
2 \arrow[dr, dash] & & 3. \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

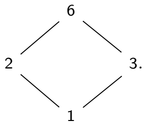
Изоморфизам Булових алгебри

Хасеови дијаграми Булових алгебри

$$\boldsymbol{\mathscr{P}(\{a,b\})} = \left(\mathscr{P}(\{a,b\}), \cup, \cap, {}^{C}, \emptyset, \{a,b\}\right) \quad \text{и} \quad \mathbf{D_6} = (\{1,2,3,6\}, \text{нзс}, \text{нзд}, 6/, 1, 6)$$



и



Претходна два дијаграма су идентична (до на ознаку елемената). Табеле операција ових Булових алгебри разликују се до на ознаку елемената и ознаку операција.

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

$\longleftrightarrow$

нзс	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

$\longleftrightarrow$

нзд	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

A	A^C
$\emptyset$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$

$\longleftrightarrow$

x	$6/x$
1	6
2	3
3	2
6	1

Изоморфизам Булових алгебри

Дефиниција

Булове алгебре $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ и $\mathbf{B^*} = (B^*, \curlyvee^*, \curlywedge^*, '^*, 0^*, 1^*)$ су *изоморфне* уколико постоји бијекција $f : B \to B^*$ за коју важи:

1) $f(x \curlyvee y) = f(x) \curlyvee^* f(y)$,
2) $f(x \curlywedge y) = f(x) \curlywedge^* f(y)$,
3) $f(x') = f(x)'^*$,

за све $x, y \in B$. Изоморфизам Булових алгебри $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B^*}$ означавамо са: $\mathbf{B} \cong \mathbf{B^*}$.

Изоморфизам Булових алгебри

Дефиниција

Булове алгебре $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ и $\mathbf{B^*} = (B^*, \curlyvee^*, \curlywedge^*, '^*, 0^*, 1^*)$ су *изоморфне* уколико постоји бијекција $f : B \to B^*$ за коју важи:

1) $f(x \curlyvee y) = f(x) \curlyvee^* f(y)$,
2) $f(x \curlywedge y) = f(x) \curlywedge^* f(y)$,
3) $f(x') = f(x)'^*$,

за све $x, y \in B$. Изоморфизам Булових алгебри $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B^*}$ означавамо са: $\mathbf{B} \cong \mathbf{B^*}$.

Стонова теорема

Ако је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ коначна Булова алгебра тада постоји коначан скуп S такав да је $\mathbf{B} \cong \mathscr{P}(S)$.

Доказ: на часу.

Изоморфизам Булових алгебри

Дефиниција

Булове алгебре $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ и $\mathbf{B^*} = (B^*, \curlyvee^*, \curlywedge^*, '^*, 0^*, 1^*)$ су *изоморфне* уколико постоји бијекција $f : B \to B^*$ за коју важи:

1) $f(x \curlyvee y) = f(x) \curlyvee^* f(y)$,
2) $f(x \curlywedge y) = f(x) \curlywedge^* f(y)$,
3) $f(x') = f(x)'^*$,

за све $x, y \in B$. Изоморфизам Булових алгебри $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B^*}$ означавамо са: $\mathbf{B} \cong \mathbf{B^*}$.

Стонова теорема

Ако је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ коначна Булова алгебра тада постоји коначан скуп S такав да је $\mathbf{B} \cong \mathscr{P}(\boldsymbol{S})$.

Доказ: на часу.

Коначну Булова алгебру могуће је конструисати само на скуповима који имају 2^m елеменатам, где је $m \geq 1$.