Дискретне структуре 1

предавање 12 (27.01.2026.)

Тема: ИСКАЗНА ЛОГИКА

Александра Костић Матијевић

Катедра за алгебру и математичку логику

Математички факултет, Београд

Исказна алгебра

исказна алгебра: $\mathbf{2} = \{0, 1\}$

Исказна алгебра

исказна алгебра: $\mathbf{2} = \{0, 1\}$

унарна операциј:

p	$\neg p$
0	1
1	0

бинарне операције:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Језик исказне алгебре $\mathcal{L}$:

- логичке константе $\{\top, \bot\}$
- пребројиви скуп исказних слова $\mathcal{P}$
- логички везници
- заграде $(,)$

Језик исказне алгебре $\mathcal{L}$:

- логичке константе $\{\top, \bot\}$
- пребројиви скуп исказних слова $\mathcal{P}$
- логички везници
- заграде $(,)$

Формуле језика $\mathcal{L}$:

1° исказна слова и логичке константе су исказне формуле

2° ако су A и B исказне формуле, тада су исказне формуле и

$$\neg A, \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B), \quad (A \Leftrightarrow B), \quad (A \veebar B)$$

- исказне формуле се добијају једино коначном применом правила 1° и 2°

$\mathrm{For}\,\mathcal{L}$ – скуп формула над језиком $\mathcal{L}$

Језик исказне алгебре $\mathcal{L}$:

- логичке константе $\{\top, \bot\}$
- пребројиви скуп исказних слова $\mathcal{P}$
- логички везници
- заграде $(,)$

Формуле језика $\mathcal{L}$:

1° исказна слова и логичке константе су исказне формуле

2° ако су A и B исказне формуле, тада су исказне формуле и

$$\neg A, \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B), \quad (A \Leftrightarrow B), \quad (A \veebar B)$$

- исказне формуле се добијају једино коначном применом правила 1° и 2°

$\mathrm{For}\,\mathcal{L}$ – скуп формула над језиком $\mathcal{L}$

Да бисмо избегли гомилање заграда уводимо правило брисања спољасњих заграда и приоритет операција. Највећи приоритет има операција $\neg$, средњег приоритета су операције $\wedge$ и $\vee$, а најмањег операције $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar$.

Језик исказне алгебре $\mathcal{L}$:

- логичке константе $\{\top, \bot\}$
- пребројиви скуп исказних слова $\mathcal{P}$
- логички везници
- заграде $(,)$

Формуле језика $\mathcal{L}$:

1° исказна слова и логичке константе су исказне формуле

2° ако су A и B исказне формуле, тада су исказне формуле и

$$\neg A, \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B), \quad (A \Leftrightarrow B), \quad (A \veebar B)$$

- исказне формуле се добијају једино коначном применом правила 1° и 2°

For $\mathcal{L}$ – скуп формула над језиком $\mathcal{L}$

Да бисмо избегли гомилање заграда уводимо правило брисања спољасњих заграда и приоритет операција. Највећи приоритет има операција $\neg$, средњег приоритета су операције $\wedge$ и $\vee$, а најмањег операције $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar$.

$$\begin{array}{cc} (\neg p) \wedge q & \neg p \wedge q \\ (p \vee q) \Leftrightarrow r & p \vee q \Leftrightarrow r \\ ((p \veebar q) \wedge (\neg r)) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r)) & (p \veebar q) \wedge \neg r \Rightarrow p \vee (q \wedge r) \end{array}$$

дефиниција: *Валуација* је било која функција $v : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$.

Пример: $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$.

Са $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ и $v(r) = 0$ је задата једна валуација.

$$v : \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

дефиниција: *Валуација* је било која функција $v : \mathcal{P} \to \{0,1\}$.

Пример: $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$.

Са $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ и $v(r) = 0$ је задата једна валуација.

$$v : \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сваку валуацију $v : \mathcal{P} \to \{0,1\}$ можемо продужити до функције $v : For \to \{0,1\}$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} v(\neg A) &= \neg v(A) \\ v(A \wedge B) &= v(A) \wedge v(B) \\ v(A \vee B) &= v(A) \vee v(B) \\ v(A \Rightarrow B) &= v(A) \Rightarrow v(B) \\ v(A \Leftrightarrow B) &= v(A) \Leftrightarrow v(B) \\ v(A \veebar B) &= v(A) \veebar v(B), \end{aligned}$$

за све $A, B \in For$.

Пример: $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$

$v : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ дата са $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ и $v(r) = 0$.

$v' : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ дата са $v'(p) = 0$, $v'(q) = 0$ и $v'(r) = 1$

Пример: $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$

$v : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ дата са $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ и $v(r) = 0$.

$v' : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ дата са $v'(p) = 0$, $v'(q) = 0$ и $v'(r) = 1$

$$\begin{aligned} v\big((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)\big) &= v(p \vee q) \Rightarrow v(p \vee r) \\ &= (v(p) \vee v(q)) \Rightarrow (v(p) \vee v(r)) \\ &= (0 \vee 1) \Rightarrow (0 \vee 0) \\ &= 1 \Rightarrow 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

Пример: $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$

$v : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ дата са $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ и $v(r) = 0$.

$v' : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ дата са $v'(p) = 0$, $v'(q) = 0$ и $v'(r) = 1$

$$\begin{aligned} v\big((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)\big) &= v(p \vee q) \Rightarrow v(p \vee r) \\ &= (v(p) \vee v(q)) \Rightarrow (v(p) \vee v(r)) \\ &= (0 \vee 1) \Rightarrow (0 \vee 0) \\ &= 1 \Rightarrow 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'\big((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)\big) &= v'(p \vee q) \Rightarrow v'(p \vee r) \\ &= (v'(p) \vee v'(q)) \Rightarrow (v'(p) \vee v'(r)) \\ &= (0 \vee 0) \Rightarrow (0 \vee 1) \\ &= 0 \Rightarrow 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

дефиниција: Формула A је *тautологија* ако је $v(A) = 1$ за све валуације v. Ако за сваку валуацију v важи $v(A) = 0$, онда кажемо да је A *контрадикција*.

дефиниција: Формула A је *тautологија* ако је $v(A) = 1$ за све валуације v. Ако за сваку валуацију v важи $v(A) = 0$, онда кажемо да је A *контрадикција*.

дефиниција: Формула A је *задовољива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$. Скуп формула Φ је задовољив ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$ за све формуле $A \in \Phi$.

дефиниција: Формула A је *тautологија* ако је $v(A) = 1$ за све валуације v. Ако за сваку валуацију v важи $v(A) = 0$, онда кажемо да је A *контрадикција*.

дефиниција: Формула A је *задовољива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$. Скуп формула Φ је задовољив ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$ за све формуле $A \in \Phi$.

дефиниција: Формула A је *порецива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 0$.

дефиниција: Формула A је *тautологија* ако је $v(A) = 1$ за све валуације v. Ако за сваку валуацију v важи $v(A) = 0$, онда кажемо да је A *контрадикција*.

дефиниција: Формула A је *задовољива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$. Скуп формула Φ је задовољив ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$ за све формуле $A \in \Phi$.

дефиниција: Формула A је *порецива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 0$.

дефиниција: Формуле A и B су *логички (елементарно, семантички) еквивалентне* ако за сваку валуацију v важи $v(A) = v(B)$. Пишемо $A \equiv B$.

дефиниција: Формула A је *тautологија* ако је $v(A) = 1$ за све валуације v. Ако за сваку валуацију v важи $v(A) = 0$, онда кажемо да је A *контрадикција*.

дефиниција: Формула A је *задовољива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$. Скуп формула Φ је задовољив ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$ за све формуле $A \in \Phi$.

дефиниција: Формула A је *порецива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 0$.

дефиниција: Формуле A и B су *логички (елементарно, семантички) еквивалентне* ако за сваку валуацију v важи $v(A) = v(B)$. Пишемо $A \equiv B$.

$\equiv$ је релација еквиваленције

$(\mathrm{For}\,\mathcal{L}/\equiv, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ – Линденбаум-Тарски алгебра

дефиниција: Формула A је *таутологија* ако је $v(A) = 1$ за све валуације v. Ако за сваку валуацију v важи $v(A) = 0$, онда кажемо да је A *контрадикција*.

дефиниција: Формула A је *задовољива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$. Скуп формула Φ је задовољив ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 1$ за све формуле $A \in \Phi$.

дефиниција: Формула A је *порецива* ако постоји валуација v тако да је $v(A) = 0$.

дефиниција: Формуле A и B су *логички (елементарно, семантички) еквивалентне* ако за сваку валуацију v важи $v(A) = v(B)$. Пишемо $A \equiv B$.

$\equiv$ је релација еквиваленције

$(\mathrm{For}\,\mathcal{L}/\equiv, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ – Линденбаум-Тарски алгебра

дефиниција: Формула A је *логичка (семантичка) последица* формуле B ако за сваку валуацију v за коју је $v(B) = 1$ важи да је $v(A) = 1$.
ознака: $B \models A$

формула A је логичка последица формуле B ако и само ако је $B \Rightarrow A$ таутологија

Следеће формуле су таутологије:

$p \wedge p \Leftrightarrow p$	закон идемпотентности за конјункцију
$p \vee p \Leftrightarrow p$	закон идемпотентности за дисјункцију
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	закон асоцијативности за дисјункцију
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	закон асоцијативности за конјункцију
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	закон комутативности за конјункцију
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	закон комутативности за дисјункцију
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	закон дистрибуције конјункције према дисјункцији
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	закон дистрибуције дисјункције према конјункцији
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	закон двоструке негације
$p \vee \neg p$	закон искључења трећег
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	Де Морганов закон
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Де Морганов закон
$p \wedge q \Rightarrow p$	слабљење конјункције
$p \Rightarrow p \vee q$	увођење дисјункције
$p \Rightarrow p$	закон рефлексивности за импликацију
$p \Leftrightarrow p$	закон рефлексивности за еквиваленцију
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	закон апсорпције конјункције према дисјункцији
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	закон апсорпције дисјункције према конјункцији
$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	модус поненс
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	правило уклањања импликације
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	правило уклањања еквиваленције
$(p \veebar q) \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$	правило уклањања ексклузивне дисјункције
$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	закон транзитивности за импликацију
$((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$	закон транзитивности за еквиваленцију
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	закон контрапозиције

Нормалне форме

Литерал – логичко слово или негација логичког слова

Нормалне форме

Литерал – логичко слово или негација логичког слова

дефиниција: Логичка формула је у *дисјунктивној нормалној форми*, краће ДНФ, ако је облика

$$F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_k,$$

где је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, формула F_i конјункција литерала.

Нормалне форме

Литерал – логичко слово или негација логичког слова

дефиниција: Логичка формула је у *дисјунктивној нормалној форми*, краће ДНФ, ако је облика

$$F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_k,$$

где је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, формула F_i конјункција литерала.

дефиниција: Логичка формула је у *конјунктивној нормалној форми*, краће КНФ, ако је облика

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k,$$

где је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, формула F_i дисјункција литерала.

Пример:

формула $\neg p \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ је у дисјунктивној нормалној форми

формула $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$ у конјунктивној нормалној форми.

КНФ-ДНФ алгоритам

свака логичка формула еквивалентна је некој формули која је у дисјунктивној/конјунктивној нормалној форму

КНФ-ДНФ алгоритам

свака логичка формула еквивалентна је некој формули која је у дисјунктивној/конјунктивној нормалној форми

КНФ-ДНФ алгоритам:

1° елиминишемо везнике који се примењују на логичке константе $\top$ и $\bot$

2° елиминишемо $\veebar$ користећи $p \veebar q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$

3° елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

4° елиминишемо $\Rightarrow$ користећи $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

5° примењујемо Де Морганове законе $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ и $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ докле год је могуће

6° елиминишемо дупле негације користећи $\neg\neg p \equiv p$

7° у зависности од тога да ли желимо да добијемо КНФ или ДНФ примењујемо законе дистрибуције:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Пример: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

$$
\begin{aligned}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \top)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \vee \neg p \vee r) \wedge \top) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \vee r \\
&\equiv (p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p \vee r)
\end{aligned}
$$

ДНФ: $(p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \vee r$,

КНФ: $(p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p \vee r)$.

Пример: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

$$\begin{aligned}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \top)) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \vee \neg p \vee r) \wedge \top) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \vee r \\
&\equiv (p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p \vee r)
\end{aligned}$$

ДНФ: $(p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \vee r$,
КНФ: $(p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p \vee r)$.

конјунктивна и дисјунктивна нормална форма нису јединствене у синтаксном смислу:

$(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$ и $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$ су логички еквивалентне
$(p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$ и $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$ су логички еквивалентне

Савршене нормалне форме

исказна формула A у којој се појављују искључиво исказна слова $p_1, p_2, \ldots, p_k$ може се представити у следеће две форме:

1° $SDNF(A) = \bigvee_{u \in \{v \mid v(A)=1\}} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \cdots \wedge p_k^{u(p_k)} \right)$ – савршена (или канонска или потпуна) дисјунктивна нормална форма формуле A (краће СДНФ),

2° $SKNF(A) \equiv \bigwedge_{u \in \{v \mid v(A)=0\}} \left(p_1^{u(\neg p_1)} \vee p_2^{u(\neg p_2)} \vee \cdots \vee p_k^{u(\neg p_k)} \right)$ – савршена (или канонска или потпуна) конјунктивна нормална форма формуле A (краће СКНФ),

где је $p_i^0 := \neg p_i$, а $p_i^1 := p_i$.

Пример: $A = p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

	p	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$A = p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
v_1	0	0	0	1	0
v_2	0	0	1	0	1
v_3	0	1	0	0	1
v_4	0	1	1	1	0
v_5	1	0	0	1	1
v_6	1	0	1	0	0
v_7	1	1	0	0	0
v_8	1	1	1	1	1

$\{v \mid v(A) = 1\} = \{v_2, v_3, v_5, v_8\}$ па је СДНФ формуле A:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$\{v \mid v(A) = 0\} = \{v_1, v_4, v_6, v_7\}$ па је СКНФ формуле A:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$