ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 1

предавање 1 (04.10.2022.)

Тема: **Увод у торију скупова**

Александра Костић

Катедра за алгебру и математичку логику
Математички факултет, Београд

Скоро све што радимо у математици темељи се, посредно или непосредно, на појму скупа.

Скоро све што радимо у математици темељи се, посредно или непосредно, на појму скупа.

Појам скупа је интуитивно јасан: замишљамо га као колекцију неких објеката. Термин колекција често користимо као синоним за појам скупа.

Међутим, уколико на тај начин посматрамо скупове, брзо наилазимо на проблеме.

Скоро све што радимо у математици темељи се, посредно или непосредно, на појму скупа.

Појам скупа је интуитивно јасан: замишљамо га као колекцију неких објеката. Термин колекција често користимо као синоним за појам скупа.

Међутим, уколико на тај начин посматрамо скупове, брзо наилазимо на проблеме.

Берберинов парадокс: У неком селу берберин брије све становнике тог села који не брију сами себе. Поставља се питање да ли берберин брије сам себе?

Скоро све што радимо у математици темељи се, посредно или непосредно, на појму скупа.

Појам скупа је интуитивно јасан: замишљамо га као колекцију неких објеката. Термин колекција често користимо као синоним за појам скупа.

Међутим, уколико на тај начин посматрамо скупове, брзо наилазимо на проблеме.

Берберинов парадокс: У неком селу берберин брије све становнике тог села који не брију сами себе. Поставља се питање да ли берберин брије сам себе?

- ако је одговор не, дакле берберин не брије сам себе, тада је и он један од становника села који се не брију сами, па мора бријати сам себе, што је противуречност

Скоро све што радимо у математици темељи се, посредно или непосредно, на појму скупа.

Појам скупа је интуитивно јасан: замишљамо га као колекцију неких објеката. Термин колекција често користимо као синоним за појам скупа.

Међутим, уколико на тај начин посматрамо скупове, брзо наилазимо на проблеме.

Берберинов парадокс: У неком селу берберин брије све становнике тог села који не брију сами себе. Поставља се питање да ли берберин брије сам себе?

- ако је одговор не, дакле берберин не брије сам себе, тада је и он један од становника села који се не брију сами, па мора бријати сам себе, што је противуречност
- ако је одговор да, опет долазимо до противуречности јер берберин брије искључиво људе из села који се не брију сами

Скоро све што радимо у математици темељи се, посредно или непосредно, на појму скупа.

Појам скупа је интуитивно јасан: замишљамо га као колекцију неких објеката. Термин колекција често користимо као синоним за појам скупа.

Међутим, уколико на тај начин посматрамо скупове, брзо наилазимо на проблеме.

Берберинов парадокс: У неком селу берберин брије све становнике тог села који не брију сами себе. Поставља се питање да ли берберин брије сам себе?

- ако је одговор не, дакле берберин не брије сам себе, тада је и он један од становника села који се не брију сами, па мора бријати сам себе, што је противуречност
- ако је одговор да, опет долазимо до противуречности јер берберин брије искључиво људе из села који се не брију сами

Парадокс лажљивца: Филозоф Епименид (6 век п.н.е.) са Крита рекао је "Крићани увек лажу". Да ли је говорио истину?

Друга верзија парадокса лажливца: Инспирисана је причом о Пинокију. Поставља се питање шта ће се десити ако Пинокио каже: "Мој нос ће сада порасти."?

Друга верзија парадокса лажливца: Инспирисана је причом о Пинокију. Поставља се питање шта ће се десити ако Пинокио каже: "Мој нос ће сада порасти."?

Грелинг-Нелсонов парадокс: Постоје неки придеви који описују себе, нпр. петнаестословни, вишесложан... Речи које не описују саме себе се зову хетерологичке. Да ли је придев "хетерологички" хетерологичка реч?

Друга верзија парадокса лажљивца: Инспирисана је причом о Пинокију. Поставља се питање шта ће се десити ако Пинокио каже: "Мој нос ће сада порасти."?

Грелинг-Нелсонов парадокс: Постоје неки придеви који описују себе, нпр. петнаестословни, вишесложан... Речи које не описују саме себе се зову хетерологичке. Да ли је придев "хетерологички" хетерологичка реч?

Претходни примери су у вези са чувеним Раселовим парадоксом:

Посматрајмо колекцију S дефинисану са

$$x \in S \text{ акко } x \notin x.$$

Да ли $S \in S$?

Друга верзија парадокса лажливца: Инспирисана је причом о Пинокију. Поставља се питање шта ће се десити ако Пинокио каже: "Мој нос ће сада порасти."?

Грелинг-Нелсонов парадокс: Постоје неки придеви који описују себе, нпр. петнаестословни, вишесложан... Речи које не описују саме себе се зову хетерологичке. Да ли је придев "хетерологички" хетерологичка реч?

Претходни примери су у вези са чувеним Раселовим парадоксом:

Посматрајмо колекцију S дефинисану са

$$x \in S \text{ акко } x \notin x.$$

Да ли $S \in S$?

- ако $S \in S$, на основу дефиниције колекције онда $S \notin S$
- ако $S \notin S$, опет на основу дефиниције колекције S закључујемо да $S \in S$

Закључак: Овако дефинисану колекцију S **не можемо** сматрати скупом у математичком смислу.

Формирање скупова

Основна релација међу скуповима је релација припадности. Скуп A припада скупу B записујемо са $A \in B$. Кажемо да је A елемент од B.

Формирање скупова

Основна релација међу скуповима је релација припадности. Скуп A припада скупу B записујемо са $A \in B$. Кажемо да је A елемент од B.

Скупови се заснивају (дефинишу) аксиоматски.
(Зермело-Френкелова (ЗФ) теорија скупова)

Формирање скупова

Основна релација међу скуповима је релација припадности.
Скуп A припада скупу B записујемо са $A \in B$. Кажемо да је A елемент од B.

Скупови се заснивају (дефинишу) аксиоматски.
(Зермело-Френкелова (ЗФ) теорија скупова)

Аксиома екстензије

Два скупа су једнака ако имају исте елменте.

нпр. скупови $A = \{2, 3\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ су једнаки.

Формирање скупова

Основна релација међу скуповима је релација припадности. Скуп A припада скупу B записујемо са $A \in B$. Кажемо да је A елемент од B.

Скупови се заснивају (дефинишу) аксиоматски. (Зермело-Френкелова (ЗФ) теорија скупова)

Аксиома екстензије

Два скупа су једнака ако имају исте елменте.

нпр. скупови $A = \{2, 3\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ су једнаки.

Аксиома празног скупа

Постоји скуп који нема ниједан елемент.

Овај скуп називамо празан скуп и означавамо га са $\emptyset$. Према аксиоми екстензије овај скуп је јединствен.

Аксиома пара

За све скупове x и y постоји скуп z чији су једини елементи x и y.

Скуп z означавамо са $z = \{x, y\}$. Важи следеће:

$$u \in \{x, y\} \text{ акко } u = x \text{ или } u = y.$$

Можемо формирати скуп са једним елементом ако узмено да је $x = y$. Према аксиоми екстензије важи $\{x, x\} = \{x\}$.

Аксиома пара

За све скупове x и y постоји скуп z чији су једини елементи x и y.

Скуп z означавамо са $z = \{x, y\}$. Важи следеће:

$$u \in \{x, y\} \text{ акко } u = x \text{ или } u = y.$$

Можемо формирати скуп са једним елементом ако узмено да је $x = y$. Према аксиоми екстензије важи $\{x, x\} = \{x\}$.

Аксиома уније

За сваки скуп x постоји скуп z тако да $u \in z$ ако и само ако $u \in y$ за неки $y \in x$. Скуп z представља унију чланова скупа x и означавамо га са $\bigcup x$.

Скуп $z = \bigcup x$ састоји се од елемената елемената скупа x. На пример, ако је $x = \{a, b\}$ тада је $z = \bigcup\{a, b\} = a \cup b$.

Дефиниција

Скуп a је *подскуп* скупа b, у ознаци $a \subseteq b$, ако за све $x \in a$ важи да $x \in b$.

Нпр. скуп $\emptyset$ је подскуп сваког скупа.
Важи да је $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Дефиниција

Скуп a је *подскуп* скупа b, у ознаци $a \subseteq b$, ако за све $x \in a$ важи да $x \in b$.

Нпр. скуп $\emptyset$ је подскуп сваког скупа.
Важи да је $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Аксиома партитивног скупа

За сваки скуп x постоји скуп $\mathcal{P}(x)$, који се састоји од свих подскупова од x.

Ако је $x = \{a, b\}$, тада је

$$\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Ако је $x = \emptyset$, тада је $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Дефиниција

Скуп a је *подскуп* скупа b, у означи $a \subseteq b$, ако за све $x \in a$ важи да $x \in b$.

Нпр. скуп $\emptyset$ је подскуп сваког скупа.
Важи да је $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Аксиома партитивног скупа

За сваки скуп x постоји скуп $\mathcal{P}(x)$, који се састоји од свих подскупова од x.

Ако је $x = \{a, b\}$, тада је

$$\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Ако је $x = \emptyset$, тада је $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Аксиома издвајања подскупа (сепарације)

За сваки скуп a и сваку формулу $\phi(x)$ важи да је $\{x \in a \mid \phi(x)\}$ скуп.

Примене аксиоме издвајања поскупа:

$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} -$ пресек скупова A и B

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} -$ разлика скупова A и B

нека $A \subseteq U$, $\quad A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} -$ комплемент скупа A у скупу U

Примене аксиоме издвајања поскупа:

$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} -$ пресек скупова A и B

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} -$ разлика скупова A и B

нека $A \subseteq U$, $\quad A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} -$ комплемент скупа A у скупу U

Основни скуповни идентитети:

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap B = B \cap A$
7. $A \cup B = B \cup A$
8. $A \triangle B = B \triangle A$
9. $A \cap A = A$
10. $A \cup A = A$
11. $A \cap (A \cup B) = A$
12. $A \cup (A \cap B) = A$
13. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
14. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
15. $(A^c)^c = A$
16. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
17. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Уређени пар

Тврђење

За скупове a, b, c, d важи:

$$\{a, b\} = \{c, d\} \text{ ако и само ако } (a = c \text{ и } b = d) \text{ или } (a = d \text{ и } b = c).$$

Доказ. Ако важи неки од два услова са десне стране, јасно је да је $\{a, b\} = \{c, d\}$. С друге стране, претпоставимо да је $\{a, b\} = \{c, d\}$. Како је $a \in \{a, b\}$, то је $a \in \{c, d\}$, па је $a = c$ или $a = d$. Нека је прво $a = c$. Важи $d \in \{c, d\}$, па $d \in \{a, b\}$, а тиме и $d = a$ или $d = b$. Ако је $b = d$ важи десна страна. Ако је $a = d$, имамо да је $a = c = d$. Из $b \in \{a, b\} = \{c, d\}$ следи $b = c = d$, па важи десна страна. Слично се доказује и други случај, када је $a = d$.

Уређени пар

Тврђење

За скупове a, b, c, d важи:

$$\{a, b\} = \{c, d\} \text{ ако и само ако } (a = c \text{ и } b = d) \text{ или } (a = d \text{ и } b = c).$$

Доказ. Ако важи неки од два услова са десне стране, јасно је да је $\{a, b\} = \{c, d\}$. С друге стране, претпоставимо да је $\{a, b\} = \{c, d\}$. Како је $a \in \{a, b\}$, то је $a \in \{c, d\}$, па је $a = c$ или $a = d$. Нека је прво $a = c$. Важи $d \in \{c, d\}$, па $d \in \{a, b\}$, а тиме и $d = a$ или $d = b$. Ако је $b = d$ важи десна страна. Ако је $a = d$, имамо да је $a = c = d$. Из $b \in \{a, b\} = \{c, d\}$ следи $b = c = d$, па важи десна страна. Слично се доказује и други случај, када је $a = d$.

Дефиниција

Уређени пар (a, b) скупова a и b је скуп $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Уређени пар

Тврђење

За уређене парове (a, b) и (c, d) важи:

$$(a, b) = (c, d) \text{ акко } a = c \text{ и } b = d.$$

Доказ. Ако важи $a = c$ и $b = d$, онда је $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d)$. Нака је сад $(a, b) = (c, d)$. Онда је $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Према претходном тврђењу, важи да је $(\{a\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{c, d\})$ или $(\{a\} = \{c, d\}$ и $\{a, b\} = \{c\}.)$ Ако важи први део, мора бити $a = c$. Такође, важи $(a = c$ и $b = d)$ или $(a = d$ и $b = c)$. У првој случају имамо $a = c$ и$b = d$. У другом случају $d = a = c = b$, па је специјално и $a = c$ и $b = d$. Ако важи други део, онда је $a = b = c = d$, па опет важе тражене једнакости.

Декартов производ два скупа

Дефиниција

Декартов производ скупова A и B је скуп

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

нпр. Декартов производ скупова $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$ је

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

Како је $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$, видимо да не мора важити једнакост између скупова $A \times B$ и $B \times A$.

напомена: $A \times B = \emptyset$ акко $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$

Декартов производ два скупа

Дефиниција

Декартов производ скупова A и B је скуп

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

нпр. Декартов производ скупова $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$ је

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

Како је $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$, видимо да не мора важити једнакост између скупова $A \times B$ и $B \times A$.

напомена: $A \times B = \emptyset$ акко $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$

Особине Декартовог призвода:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

Декартов производ више скупова

Дефиниција

Уређена n-торка елемената a_1, a_2, ..., a_n је објекат $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ такав да важи

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ акко } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Декартов производ више скупова

Дефиниција

Уређена n-торка елемената a_1, a_2, ..., a_n је објекат $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ такав да важи

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ акко } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

уређена n-торка може се дефинисати преко појма уређеног пара:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (a_1, (a_2, (\ldots, (a_{n-1}, a_n) \cdots)))$$

нпр. $(a_1, a_2, a_3) := (a_1, (a_2, a_3))$
$(a_1, a_2, a_3, a_4) := (a_1, (a_2, (a_3, a_4)))$

Декартов производ више скупова

Дефиниција

Уређена n-торка елемената a_1, a_2, …, a_n је објекат $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ такав да важи

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ акко } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

уређена n-торка може се дефинисати преко појма уређеног пара:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) := (a_1, (a_2, (\dots, (a_{n-1}, a_n) \cdots)))$$

нпр. $(a_1, a_2, a_3) := (a_1, (a_2, a_3))$
$(a_1, a_2, a_3, a_4) := (a_1, (a_2, (a_3, a_4)))$

Дефиниција

Декартов производ скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ је скуп

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots a_n \in A_n\}.$$

Аксиома добре заснованости(аксиома регуларности)

Сваки непразан скуп A садржи елемент a такав да је $A \cap a = \emptyset$.

Тврђење

Не постоји скуп x такав да $x \in x$.

Доказ. Ако би скуп x био такав да $x \in x$, тада би скуп $A = \{x\}$ противуречио аксиоми добре заснованости (како $x \in x \cap A$, једини елемент скупа A имао би непразан пресек са скупом A).