0.1 Дефиниција и примери Булових алгебри

Булове алгебре увео је Џорџ Бул[1] средином XIX века са идејом да логику и њене законитости преведе на језик алгебре. Првобитни назив за теорију Булових алгебри био је управо алгебра логике. Временом су Булове алгебре примењене на широк спектар дисциплина, од теорије скупова до статистике, при чему је најважнија област примене рачунарство и информатика. У овом поглављу даћемо дефиницију, основна својства и најпознатије примере Булових алгебри.

Дефиниција 0.1 Алгебарска структура $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$, где је $B \neq \emptyset$, $0, 1 \in B$, $\curlyvee$ и $\curlywedge$ су бинарне а $'$ је унарна операција на скупу B, је *Булова алгебра* уколико су задовољене следеће аксиоме:

A1: $x \curlyvee y = y \curlyvee x$,

A2: $x \curlywedge y = y \curlywedge x$,

A3: $x \curlyvee (y \curlywedge z) = (x \curlyvee y) \curlywedge (x \curlyvee z)$,

A4: $x \curlywedge (y \curlyvee z) = (x \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge z)$,

A5: $x \curlyvee 0 = x$,

A6: $x \curlywedge 1 = x$,

A7: $x \curlyvee x' = 1$,

A8: $x \curlywedge x' = 0$,

A9: $0 \neq 1$.

за свако $x, y, z \in B$.

Операције $\curlyvee$, $\curlywedge$ и $'$ редом називамо буловска дисјункција, буловска конјункција и буловски комплемент. Када је у неком контексту јасно да се ради о буловским операцијама тада их краће називамо конјункција, дисјункција и комплемент. Скуп B називамо домен. Уколико је скуп B коначан, тада је кажемо да је Булова алгебра $\mathbb{B}$ коначна, иначе кажемо да је бесконачна.

Пример 0.2 Алгебарска структура $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, где су операције $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ дефинисане на следећи начин:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

је Булова алгебра. Овако дефинисане операције су, у ствари, логичка дисјункција ($\vee$), логичка конјункција ($\wedge$) и негација ($\neg$). За $x, y, z \in \{0, 1\}$, једнакости

[1] George Boole (1815-1864), енглески математичар и филозоф

A1: $x \vee y = y \vee x$,

A2: $x \wedge y = y \wedge x$,

A3: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

A4: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

A5: $x \vee 0 = x$,

A6: $x \wedge 1 = x$,

A7: $x \vee x' = 1$,

A8: $x \wedge x' = 0$,

A9: $0 \neq 1$

су добро познати закони исказне логике. Ова дво-елементна Булова алгебра се назива још и *прекидачка алгебра*, или *алгебра исказа* и представља најједноставнији пример Булове алгебре (тј. Булову алгебру са најмањим бројем елемената). ♣

Пример 0.3 Булова алгебра $\mathbf{2^n} = (2^n, \bigvee, \bigwedge, ', 0, 1)$, где су операције $\bigvee$, $\bigwedge$ и $'$ дефинисане на следећи начин:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bigvee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bigwedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)' = (\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$$

представља пример алгебре која има 2^n елемената. Касније ћемо се уверити да свака коначна Булова алгебра има 2^n елемената. ♣

Пример 0.4 Нека је X произвољан непразан скуп и $\mathcal{P}(X)$ партитивни скуп скупа X. Скуп $\mathcal{P}(X)$ заједно са операцијама уније, пресека и скуповног комплементирања (у односу на скуп X) и истакнутим елементима $\emptyset$ и X чини Булову алгебру $\boldsymbol{\mathcal{P}(X)} = (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$. Ако $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, једнакости Булове алгебре

A1: $A \cup B = B \cup A$,

A2: $A \cap B = B \cap A$,

A3: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

A4: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

A5: $A \cup \emptyset = A$,

A6: $A \cap X = A$,

A7: $A \cup A^c = X$,

A8: $A \cap A^c = \emptyset$,

A9: $X \neq \emptyset$.

су добро познати скуповни идентитети. Ова Булова алгебра је једна од најпознатијих и назива се још и *алгебром партитивног скупа*. Уколико је скуп X коначан, тада ова алгебра има 2^n елемената. Уколико је скуп X бесконачан, онда је одговарајућа алгебра партитивног скупа бесконачна. ♣

Пример 0.5 Нека је X непразан скуп. Фамилија $F_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ је *поље скупова* над X ако:

1) $\emptyset, X \in F_X$;

2) ако је $A, B \in F_X$, тада и $A \cup B, A \cap B, A^C \in F_X$.

На пример, скуп $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ испуњава горња два услова и представља једно поље скупова.

Ако је фамилија F_X поље скупова, није тешко уверити се да је тада структура $\mathbf{F_X} = (F_X, \cup, \cap, ^C, \emptyset, X)$ Булова алгебра (важе исте аксиоме као у претходном примеру). Ову Булову алгебру називамо *алгебра скупова* или *поље скупова*. Приметимо да је алгебра партитивног скупа специјалан случај поља скупова.

Пример 0.6 На скупу $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ (тј. скупу делилаца броја 30), дефинисане су бинарне операције нзс(x, y) и нзд(x, y), као и унарна операција $30/x$, за све $x, y \in B$. Структура $\mathbf{D_{30}} = (D_{30}, \text{нзс}, \text{нзд}, 30/, 1, 30)$ је Булова алгебра. Заиста, за све $x, y \in D_{30}$, испуњени су следећу услови:

A1: $\text{нзс}(x, y) = \text{нзс}(y, x)$,

A2: $\text{нзд}(x, y) = \text{нзд}(y, x)$,

A3: $\text{нзс}(x, \text{нзд}(y, z)) = \text{нзд}(\text{нзс}(x, y), \text{нзс}(x, z))$,

A4: $\text{нзд}(x, \text{нзс}(y, z)) = \text{нзс}(\text{нзд}(x, y), \text{нзд}(x, z))$,

A5: $\text{нзс}(x, 1) = x$,

A6: $\text{нзд}(x, 30) = x$,

A7: $\text{нзс}(x, 30/x) = 30$,

A8: $\text{нзд}(x, 30/x) = 1$,

A9: $1 \neq 30$.

Једнакости $A1, A2, A5, A6$ и $A9$ тривијано важе. Једнакости A3 и A4 важе на основу Тврђења **??**. Уверимо се да важе и једнакости A7 и A8. Сваки елемент $x \in D_{30}$ је облика $x = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0, 1\}$, и је његов комплемент је $30/x = 2^{1-\alpha_1}3^{1-\alpha_2}5^{1-\alpha_3}$. Приметимо да важи да ако је $\alpha_i = 1$, тада је $1 - \alpha_i = 0$ и обрнуто, за све $i \in \{1, 2, 3\}$. Према томе, следи да је

$$\begin{aligned} \text{нзс}(x, 30/x) &= \text{нзс}(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}, 2^{1-\alpha_1}3^{1-\alpha_2}5^{1-\alpha_3}) \\ &= 2^{\max\{\alpha_1, 1-\alpha_1\}}3^{\max\{\alpha_2, 1-\alpha_2\}}5^{\max\{\alpha_3, 1-\alpha_3\}} \\ &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30. \end{aligned}$$

Слично,

$$\begin{aligned} \text{нзд}(x, 30/x) &= \text{нзд}(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}, 2^{1-\alpha_1}3^{1-\alpha_2}5^{1-\alpha_3}) \\ &= 2^{\min\{\alpha_1, 1-\alpha_1\}}3^{\min\{\alpha_2, 1-\alpha_2\}}5^{\min\{\alpha_3, 1-\alpha_3\}} \\ &= 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1, \end{aligned}$$

па је $\mathbf{D_{30}}$ заиста једна Булова алгебра.

Генерално, уколико је природан број n производ различитих простих бројева и D_n скуп свих делилаца броја n, тада је структура $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}} = (D_n, \text{нзс}, \text{нзд}, n/, 1, n)$ Булова алгебра. Доказ једнакости A1–A9 је аналоган доказу у претходном конкретном случају. ♣

Пример 0.7 Нека је X непразан скуп и $Y \subseteq X$. Означимо са

$$B_X = \{k_Y \mid Y \in \mathcal{P}(X)\},$$

где је $k_Y : X \to \{0, 1\}$ карактеристична функција скупа Y. На скупу B_X дефинишимо бинарне операције $\curlyvee$ и $\curlywedge$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} k_Y \curlyvee k_Z &:= k_{Y \cup Z}, \\ k_Y \curlywedge k_Z &:= k_{Y \cap Z} \end{aligned}$$

и унарну операцију $'$ са:

$$k'_Y := k_{X \setminus Y}.$$

Тада, на основу основних скуповних идентитета и својстава карактеристичне функције важе следеће једнакости:

A1: $k_Y \curlyvee k_Z = k_Z \curlyvee k_Y$,

A2: $k_Y \curlywedge k_Z = k_Z \curlywedge k_Y$,

A3: $k_Y \curlyvee (k_Z \curlywedge k_T) = (k_Y \curlyvee k_Z) \curlywedge (k_Y \curlyvee k_T)$,

A4: $k_Y \curlywedge (k_Z \curlyvee k_T) = (k_Y \curlywedge k_Z) \curlyvee (k_Y \curlywedge k_T)$,

A5: $k_Y \curlyvee k_\emptyset = k_Y$,

A6: $k_Y \curlywedge k_X = k_Y$,

A7: $k_Y \curlyvee k_Y' = k_X$,

A8: $k_Y \curlywedge k_Y' = k_\emptyset$,

A9: $k_\emptyset \neq k_X$.

за све $k_Y, k_Z, k_T \in B_X$. Према томе, структура $\mathbf{B_X} = (B_X, \curlyvee, \curlywedge, ', k_\emptyset, k_X)$ је још један пример Булове алгебре. ♣

Пример 0.8 Нека је P пребројив скуп исказних слова и $For(P)$ скуп логичих формула на језику P. На скупу $For(P)$ можемо дефинисати релацију еквиваленције $\equiv$ на следећи начин:

$$A \equiv B \quad \text{акко} \quad A \Leftrightarrow B \text{ је таутологија.}$$

Калса формуле A је скуп

$$[A] = \{B \mid A \equiv B\}.$$

Уочимо скуп $\mathcal{K} = \{[A] \mid A \in For(P)\}$. На скупу $\mathcal{K}$ дефинишимо операције $\curlyvee, \curlywedge$ и $'$ са:

$$\begin{aligned} [A] \curlyvee [B] &:= [A \vee B], \\ [A] \curlywedge [B] &:= [A \wedge B] \\ [A]' &:= [\neg A], \end{aligned}$$

за све $A, B \in For(P)$. Покажимо да су ове операције добро дефнисане, тј. да не зависе од избора представника класа. Ако је $[A] = [A']$ и $[B] = [B']$, операција $\curlyvee$ је добро дефинисана ако је $[A] \curlyvee [B] = [A'] \curlyvee [B']$, односно ако је $[A \vee B] = [A' \vee B']$. Како је $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$, следи да је $A \vee B \equiv A' \vee B'$, па је одатле $[A \vee B] = [A' \vee B']$. Слично се доказује да су $\curlywedge$ и $'$ добро дефинисане.

Посматрајмо структуру $\mathbf{K} = (\mathcal{K}, \curlyvee, \curlywedge, ', [\bot], [\top])$, где је $[\bot]$ класа контрадикција а $[\top]$ класа таутологија. Није тешко проверити да важе једнакости:

A1: $[A] \curlyvee [B] = [A \vee B] = [B \vee A] = [B] \curlyvee [A]$,

A2: $[A] \curlywedge [B] = [A \wedge B] = [B \wedge A] = [B] \curlywedge [A]$,

A3: $[A] \curlyvee ([B] \curlywedge [C]) = [A \vee (B \wedge C)] = [(A \vee B) \wedge (A \vee C)] = ([A] \curlyvee [B]) \curlywedge ([A] \curlyvee [C])$,

A4: $[A] \curlywedge ([B] \curlyvee [C]) = [A \wedge (B \vee C)] = [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)] = ([A] \curlywedge [B]) \curlyvee ([A] \curlywedge [C])$,

A5: $[A] \curlyvee [\bot] = [A \vee \bot] = [A]$,

A6: $[A] \curlywedge [\top] = [A \wedge \top] = [A]$,

A7: $[A] \curlyvee [A]' = [A \vee \neg A] = [\top]$,

A8: $[A] \curlywedge [A]' = [A \wedge \neg A] = [\bot]$,

A9: $[\bot] \neq [\top]$.

за све $[A], [B], [C] \in \mathcal{K}$. Према томе, структура $\mathbf{K}$ је Булова алгебра. Ова Булова алгебра назива се *Линденбаумова алгебра*. ♣

0.2 Основна својства

Уколико пажљиво погледамо аксиоме можемо приметити одређене сличности између парова аксиома A1 и A2, A3 и A4, A5 и A6, као и пара аксиома A7 и A8. Кажемо да су ови парови аксиома дуални. Идентитети F_1 и F_2 су *дуални* ако се идентитет F_2 може добити од идентитета F_1 тако што се свако појављивање операције $\curlyvee$ замени са $\curlywedge$, свако појављивање операције $\curlywedge$ замени са $\curlyvee$, свако појављивање 0 замени са 1 и свако појављивање 1 замени са 0. На пример, $(x \curlyvee y) \curlywedge y' = x$ и $(x \curlywedge y) \curlyvee y' = x$ су дуални идентитети, као и идентитети $(x \curlywedge 0) \curlywedge (1 \curlyvee x) = x' \curlyvee 0$ и $(x \curlyvee 1) \curlyvee (0 \curlywedge x) = x' \curlywedge 1$. Директна последица дуалности аксиома је следећи важан принцип.

Теорема 0.9 (Принцип дуалности) Нека је $\phi(\curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ произвољан Булов исказ. Тада је $\phi(\curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ теорема акко је $\phi(\curlywedge, \curlyvee, ', 1, 0)$ теорема.

Дакле, за сваку теорему у Буловој алгебри аутоматски мора важити и њој дуална теорема, тј. теорема која садржи дуални идентитет. Како свака аксиома има свој дуал, уколико се у доказу неког индентитета свако позивање на аксиому замени њој дуалном аксиомом, добијамо доказ за дуални идентитет.

У наставку наводимо неке од најважнијих законитости које важе у Буловим алгебрама.

Теорема 0.10 У произвољној Буловој алгебри $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ за све $x, y, z \in B$ важе следећи идентитети:

1. $0' = 1,\ 1' = 0$;
2. $x \curlyvee x = x,\ x \curlywedge x = x$ (*закон идемпотеције*);
3. $x \curlyvee (x \curlywedge y) = x,\ x \curlywedge (x \curlyvee y) = x$ (*закон апсорпције*);
4. Ако је $x \curlyvee y = 1$ и $x \curlywedge y = 0$, тада је $x = y'$. (*јединственост комплемента*)
5. $(x')' = x$ (закон инволуције);
6. $x \curlyvee (y \curlyvee z) = (x \curlyvee y) \curlyvee z,\ x \curlywedge (y \curlywedge z) = (x \curlywedge y) \curlywedge z$ (*закон асоцијативности*);
7. $(x \curlywedge y)' = x' \curlyvee y',\ (x \curlyvee y)' = x' \curlywedge y'$ (*Де Моргнови закони*).

Доказ. 1. $0' \overset{A5}{=} 0' \curlyvee 0 \overset{A1}{=} 0 \curlyvee 0' \overset{A7}{=} 1, \quad 1' \overset{A6}{=} 1' \curlywedge 1 \overset{A2}{=} 1 \curlywedge 1' \overset{A8}{=} 0.$

2. $x \overset{A5}{=} x \curlyvee 0 \overset{A8}{=} x \curlyvee (x \curlywedge x') \overset{A3}{=} (x \curlyvee x) \curlywedge (x \curlyvee x') \overset{A7}{=} (x \curlyvee x) \curlywedge 1 \overset{A6}{=} x \curlyvee x.$

Други идентитет добијамо применом дуалних аксиома:

$$x \overset{A6}{=} x \curlywedge 1 \overset{A7}{=} x \curlywedge (x \curlyvee x') \overset{A4}{=} (x \curlywedge x) \curlyvee (x \curlywedge x') \overset{A8}{=} (x \curlywedge x) \curlyvee 0 \overset{A5}{=} x \curlywedge x.$$

3. Најпре ћемо доказати да да важи $1 \curlyvee x = 1$, а тиме и $0 \curlywedge x = 0$, на основу принципа дуалности. Важи следеће:

$$1 \curlyvee x \overset{A6}{=} (1 \curlyvee x) \curlywedge 1 \overset{A7}{=} (1 \curlyvee x) \curlywedge (x' \curlyvee x) \overset{A3}{=} (1 \curlywedge x') \curlyvee x \overset{A6}{=} x' \curlyvee x \overset{A7}{=} 1.$$

Користећи претходни резултат доказујемо закон апсорпције:

$$x \curlyvee (x \curlywedge y) \overset{A6}{=} (x \curlywedge 1) \curlyvee (x \curlywedge y) \overset{A4}{=} x \curlywedge (1 \curlyvee y) = x \curlywedge 1 \overset{A6}{=} x.$$

4. $y \overset{A5}{=} y \curlyvee 0 \overset{A8}{=} y \curlyvee (x \curlywedge x') \overset{A3}{=} (y \curlyvee x) \curlywedge (y \curlyvee x') = 1 \curlywedge (y \curlyvee x') \overset{A7}{=} (x \curlyvee x') \curlywedge (y \curlyvee x') \overset{A3}{=} (x \curlywedge y) \curlyvee x' = 0 \curlyvee x' \overset{A5}{=} x'$.

5. $(x')' \overset{A5}{=} (x')' \curlyvee 0 \overset{A8}{=} (x')' \curlyvee (x \curlywedge x') \overset{A3}{=} ((x')' \curlyvee x) \curlywedge ((x')' \curlyvee x') \overset{A7}{=} ((x')' \curlyvee x) \curlywedge 1 \overset{A7}{=} ((x')' \curlyvee x) \curlywedge (x' \curlyvee x) \overset{A3}{=} ((x')' \curlywedge x') \curlyvee x \overset{A8}{=} 0 \curlyvee x \overset{A5}{=} x$.

6. Пре него што пређемо на доказивање закона асоцијативности доказаћемо следеће помоћно тврђење: ако је $y \curlywedge x = z \curlywedge x$ и $y \curlywedge x' = z \curlywedge x'$, следи да је $y = z$. Заиста, важи следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} y &\overset{A6}{=} y \curlywedge 1 \overset{A7}{=} y \curlywedge (x \curlyvee x') \overset{A4}{=} (y \curlywedge x) \curlyvee (y \curlywedge x') = (z \curlywedge x) \curlyvee (y \curlywedge x') \\ &\overset{A3}{=} z \curlywedge (x \curlyvee x') \overset{A7}{=} z \curlywedge 1 \overset{A6}{=} z. \end{aligned}$$

Означимо са $L = x \curlyvee (y \curlyvee z)$ и $D = (x \curlyvee y) \curlyvee z$. Покажимо да је $L \curlywedge x = D \curlywedge x$ и $L \curlywedge x' = D \curlywedge x'$. На основу претходног помоћног тврђења важиће да је $L = D$, чиме ће бити доказан закон асоцијативности.

$$\begin{aligned} L \curlywedge x &= (x \curlyvee (y \curlyvee z)) \curlywedge x = x \quad \text{(на основу закона апсорпције)} \\ D \curlywedge x &= ((x \curlyvee y) \curlyvee z) \curlywedge x \overset{A4}{=} ((x \curlyvee y) \curlywedge x) \curlyvee (z \curlywedge x) \overset{3.}{=} x \curlyvee (z \curlywedge x) \overset{3.}{=} x. \\ L \curlywedge x' &= (x \curlyvee (y \curlyvee z)) \curlywedge x' \overset{A4}{=} (x \curlywedge x') \curlyvee ((y \curlyvee z) \curlywedge x') \\ &\overset{A8}{=} 0 \curlyvee ((y \curlyvee z) \curlywedge x') \overset{A5}{=} (y \curlyvee z) \curlywedge x' \\ D \curlywedge x' &= ((x \curlyvee y) \curlyvee z) \curlywedge x \overset{A4}{=} ((x \curlyvee y) \curlywedge x') \curlyvee (z \curlywedge x') \\ &\overset{A4}{=} ((x \curlywedge x') \curlyvee (y \curlywedge x')) \curlyvee (z \curlywedge x') \overset{A4}{=} (0 \curlyvee (y \curlywedge x')) \curlyvee (z \curlywedge x') \\ &\overset{A5}{=} (y \curlywedge x') \curlyvee (z \curlywedge x') \overset{A4}{=} (y \curlyvee z) \curlywedge x'. \end{aligned}$$

7. Нека је $L = x \curlywedge y$ и $D = x' \curlyvee y'$. Уколико је $L \curlywedge D = 0$ и $L \curlyvee D = 1$, тада, на основу закона о јединствености комплемента, можемо закључити да је $D = L'$.

$$\begin{aligned} L \curlywedge D &= (x \curlywedge y) \curlywedge (x' \curlyvee y') \overset{A4}{=} ((x \curlywedge y) \curlywedge x') \curlyvee ((x \curlywedge y) \curlywedge y') \\ &\overset{A2}{=} ((y \curlywedge x) \curlywedge x') \curlyvee ((x \curlywedge y) \curlywedge y') \overset{6.}{=} (y \curlywedge (x \curlywedge x')) \curlyvee (x \curlywedge (y \curlywedge y')) \\ &\overset{A8}{=} (y \curlywedge 0) \curlyvee (x \curlywedge 0) = 0 \curlyvee 0 \overset{A5}{=} 0 \\ L \curlyvee D &= (x \curlywedge y) \curlyvee (x' \curlyvee y') \overset{A3}{=} (x \curlyvee (x' \curlyvee y')) \curlywedge (y \curlyvee (x' \curlyvee y')) \\ &\overset{A1}{=} (x \curlyvee (x' \curlyvee y')) \curlywedge (y \curlyvee (y' \curlyvee x')) \overset{6.}{=} ((x \curlyvee x') \curlyvee y') \curlywedge ((y \curlyvee y') \curlyvee x') \\ &(1 \curlyvee y') \curlywedge (1 \curlyvee x') = 1 \curlywedge 1 \overset{A6}{=} 1. \end{aligned}$$

$\square$

Надаље у доказима нећемо посебно наглашавати које аксиоме или њихове последице (законитости) користимо. Такође, комутативност и асоцијативност нећемо посебно записивати.

0.3 Булово уређење

Нека је структура $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ Булова алгебра. На скупу B можемо дефинисати релацију парцијалног уређења на следећи начин:

$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad x \curlywedge y = x.$$

Наиме, како је $x \curlywedge x = x$, релација $\preccurlyeq$ је рефлексивна. Ако је $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$, тада је $x \curlywedge y = x$ и $y \curlywedge x = y$, па је $x = y$. Према томе, релација $\leq$ је антисиметрична. Ако је $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z$, тада је $x \curlywedge y = x$ и $y \curlywedge z = y$. Одатле је $x \curlywedge z = (x \curlywedge y) \curlywedge z = x \curlywedge (y \curlywedge z) = x \curlywedge y = x$, па је $x \preccurlyeq z$. Закључујемо да је релација $\preccurlyeq$ и транзитивна.

Булов исказ $x \curlywedge y = x$ еквивалентан је исказу $x \curlyvee y = y$, за свака два елемента x, y произвољне Булове алгебре $\mathbb{B}$. Ако претпоставимо да важи $x \curlywedge y = x$, тада је $x \curlyvee y = (x \curlywedge y) \curlyvee y = y$. Обрнуто, ако је $x \curlyvee y = y$, следи да је $x \curlywedge y = x \curlywedge (x \curlyvee y) = x$. На основу претходног разматрања, уређење $\preccurlyeq$ можемо дефинисати и на следећи, еквивалентан начин:

$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad x \curlyvee y = y.$$

Уколико је $x \preccurlyeq y$ и $x \neq y$ користићемо ознаки $x \prec y$.

У неким конкретним Буловим алгебрама Буловом уређењу $\preccurlyeq$ одговарају неке познате релације уређења. Тако је, на пример, у алгебри партитивног скупа релација $\preccurlyeq$ заправо релација $\subseteq$. Заиста, ако $A, B \in \mathcal{P}(X)$ тада је $A \cap B = A$ ако и само ако је $A \subseteq B$. Исто важи и у пољу скупова. У Линденбаумовој алгебри за све $[A], [B] \in \mathcal{K}$ имамо следећи низ еквивалентних тврдњи:

$$\begin{aligned}
[A] \preccurlyeq [B] \quad & \text{акко} \quad [A] \curlywedge [B] = [A] \\
& \text{акко} \quad [A \wedge B] = [A] \\
& \text{акко} \quad A \wedge B \equiv A \\
& \text{акко} \quad A \wedge B \Leftrightarrow A \text{ је таутологија} \\
& \text{акко} \quad (A \wedge B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow A \wedge B) \text{ је таутологија} \\
& \text{акко} \quad A \Rightarrow A \wedge B \text{ је таутологија} \\
& \text{акко} \quad A \Rightarrow B \text{ је таутологија.}
\end{aligned}$$

Према томе, у овој алгебри је $[A] \preccurlyeq [B]$ ако и само ако је $A \Rightarrow B$ таутологија. Када је у питању Булова алгебра $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$ у њој је за све $x, y \in D_n$ уређење $x \preccurlyeq y$ дефинисано са: $x \preccurlyeq y$ ако и само ако је нзд$(x, y) = x$. Другим речима, $x \preccurlyeq y$ ако и само ако $x \mid y$.

Уверили смо се да је за произвољну Булову алгебру $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$, пар $(B, \preccurlyeq)$ парцијално уређени скуп. Према томе, уколико је домен B коначан, Булову алгебру $\mathbf{B}$ можемо представити графички помоћу Хасеовог дијаграма.

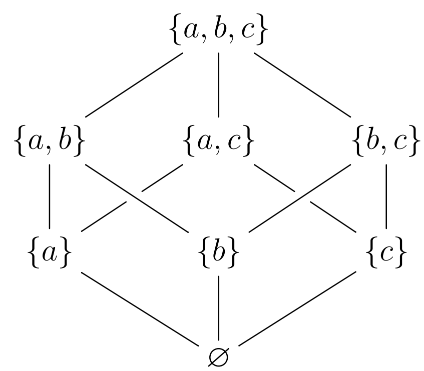
Пример 0.11 Посматрајмо Булову алгебру

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a,b,c\})} = (\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \{a,b,c\}).$$

Важи да је $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Као што смо већ рекли, на скупу $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ дефинисано је Булово уређење $\preccurlyeq$ са:

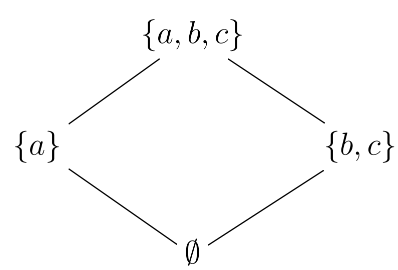
$$A \preccurlyeq B \quad \text{акко} \quad A \subseteq B.$$

Према томе, Булову алгебру $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a,b,c\})}$ представљамо помоћу Хасеовог дијаграма на следећи начин:



♣

Пример 0.12 Структура $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\{a,b,c\}}} = (F_{\{a,b,c\}}, \cup, \cap, ^C, \emptyset, \{a,b,c\})$ је поље скупова са Буловим уређењем $\subseteq$. Хасеов дијаграм ове Булове алгебре је:



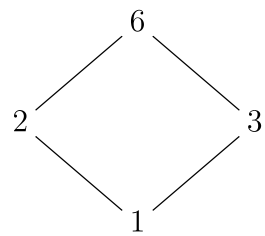
♣

Пример 0.13 У Буловој алгебри $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}} = (D_n, \text{нзс}, \text{нзд}, n/, 1, n)$ Булово уређење $\preccurlyeq$ на скупу D_n дефинисано је са:

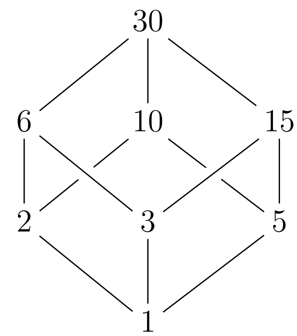
$$x \preccurlyeq y \quad \text{акко} \quad x \mid y.$$

У наставку дајемо графички приказ Булових алгебри $\mathbf{D_6}$ и $\mathbf{D_{30}}$, тј. одговарајуће Хасеове дијаграме парцијално уређених скупова $(D_6, |)$ и $(D_{30}, |)$. Присетимо се да је $D_6 = \{1,2,3,6\}$ и $D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.

$\mathbf{D_6}$:



$\mathbf{D_{30}}$:



♣

Тврђење 0.14 Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ произвољна Булова алгебра, уређени пар $(B, \preccurlyeq)$ је парцијално уређен скуп и важи:

1. Елемент 0 је најмањи елемент скупа B.

2. Елемент 1 је највећи елемент скупа B.

3. За све елементе $x, y \in B$ важи $\sup\{x, y\} = x \curlyvee y$.

4. За све елементе $x, y \in B$ важи $\inf\{x, y\} = x \curlywedge y$.

Доказ. 1. За прозвољан елемент x Булове алгебре $\mathbb{B}$ важи да је $x \curlywedge 0 = 0$, па можемо закључити да је $0 \preccurlyeq x$. Другим речима, 0 је најмањи скупа B у односу на уређење $\preccurlyeq$.

2. Из чињенице да је $x \curlywedge 1 = 1$ следи да је $x \preccurlyeq 1$, па је 1 је највећи елемент скупа B.

3. Најпре ћемо показати да је $x \curlyvee y$ једно горње ограничење скупа $\{x, y\}$. На основу закона апсорпције важи $x \curlywedge (x \curlyvee y) = x$ и $y \curlywedge (x \curlyvee y) = y$, односно, важи да је $x \curlyvee y \preccurlyeq x$ и $x \curlyvee y \preccurlyeq y$. Према томе, $x \curlyvee y$ јесте једно горње ограничење. Нека је $x, y \preccurlyeq z$, тј. нека је z такође горње ограничење скупа $\{x, y\}$. Тада је $(x \curlyvee y) \curlywedge z = (x \curlywedge z) \curlyvee (y \curlywedge z) = x \curlyvee y$, па је $x \curlyvee y \preccurlyeq z$. Дакле, $x \curlyvee y$ је најмање горње ограничење.

4. Како је $(x \curlywedge y) \curlyvee x = x$ и $(x \curlywedge y) \curlyvee y = y$, важи да је $x \curlywedge y \preccurlyeq x$ и $x \curlywedge y \preccurlyeq y$, па елемент $x \curlywedge y$ јесте једно доње ограничење скупа $\{x, y\}$. Ако је $z \in B$ такође доње ограничење скупа B, тј. $z \preccurlyeq x, y$, тада је $(x \curlywedge y) \curlyvee z = (x \curlyvee z) \curlywedge (x \curlyvee z) = x \curlywedge y$. Закључујемо да је елемент $x \curlywedge y$ највеће доње ограничење. □

Уређење $\preccurlyeq$ на скупу B слаже се са операцијама $\curlyvee, \curlywedge$ и $'$, о чему говори наредно тврђење.

Тврђење 0.15 Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ произвољна Булова алгебра, за било које елементе $x, y, z \in B$ важи:

1. ако је $x \preccurlyeq y$ и $u \preccurlyeq v$, тада је $x \curlyvee u \preccurlyeq y \curlyvee v$ и $x \curlywedge u \preccurlyeq y \curlywedge v$;

2. $x \preccurlyeq y$ ако и само ако $y' \preccurlyeq x'$.

Доказ.
1. Нека је $x \preccurlyeq y$ и $u \preccurlyeq v$, тада је $x \curlywedge y = x$ и $u \curlywedge v = u$, али и $x \curlyvee y = y$ и $u \curlyvee v = v$. Следи да је
$$(x \curlyvee u) \curlyvee (y \curlyvee v) = (x \curlyvee y) \curlyvee (u \curlyvee v) = y \curlyvee v,$$
односно, $x \curlyvee u \preccurlyeq y \curlyvee v$. Слично, важи да је
$$(x \curlywedge u) \curlywedge (y \curlywedge v) = (x \curlywedge y) \curlywedge (u \curlywedge v) = x \curlywedge u,$$
тј. $x \curlywedge u \preccurlyeq y \curlywedge v$.

2. Важи да је $x \preccurlyeq y$ ако и само ако је $x \curlywedge y = x$, тј. ако и само ако је $(x \curlywedge y)' = x'$, што је даље еквивалентно $x' \curlyvee y' = x'$, односно $y' \preccurlyeq x'$. □

За произвољан коначан скуп X, приметимо да се сваки елемент $A \in \mathcal{P}(X)$ Булове алгебре $\boldsymbol{\mathcal{P}(X)}$ може записати као коначна унија једночланих подскупова од X (такозваних синглтона). Такође, за произвољно n, сваки елемент $x \in D_n$ Булове алгебре $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$, може се представити као највећи заједнички садржалац степена простих бројева који деле n. Другим речима, синглтони, односно прости бројеви који деле n представљају градивне елеменате у Буловим алгебрама $\boldsymbol{\mathcal{P}(X)}$, односно и $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$. У произвољној Буловој алгебри $\mathbf{B}$, улогу градивног елемента имају атоми, елементи чију дефиницију дајемо у наставку.

Дефиниција 0.16 Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ произвољна Булова алгебра. Елемент $a \in B$ је *атом* уколико важи следеће:

1) $0 \prec a$;

2) ако постоји $y \in B$такво да је $0 \preccurlyeq y \preccurlyeq a$, тада је $y = 0$ или је $y = a$.

У генералном случају, Булова алгебра не мора да садржи атоме. Уколико Булова алгебра не садржи ниједан атом, кажемо да је *безатомична*. Коначне Булове алгебре увек имају атоме. Шта више, сваки елемент произвољне коначне Булове алгебре може се представити као буловска дисјункција атома.

Тврђење 0.17 Нека је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ коначна Булова алгебра, тада важи следеће:

1. Ако је $x \neq 0$ и $x \in B$, тада постоји атом $a \in B$ такав да је $a \preccurlyeq x$.

2. Ако је $x \neq 0$ и $x \in B$, тада је $x = \bigvee\{a \mid a \in B \text{ је атом и } a \preccurlyeq x\}$.

Доказ. 1. Уколико је x атом, тада је $a = x$. У супротном, постоји елемент $x_1 \in B$ такав да је $0 \prec x_1 \prec x$. У случају да је x_1 атом, следи да је $a = x_1$, иначе постоји елемент $x_2 \in B$ такав да је $0 \prec x_2 \prec x_1 \prec x$. Уколико x_2 није атом, настављамо поступак анализом елемента $x_3 \in B$ за који важи $0 \prec x_3 \prec x_2 \prec x_1 \prec x$. Овај поступак се мора завршити у коначно много корака јер домен B садржи само коначно много елемената. Односно, мора постојати елемент x_n, за $n \in \mathbb{N}$, такав да је $0 \prec x_n \prec \cdots \prec x_3 \prec x_2 \prec x_1 \prec x$ и x_n је атом.

2. Нека је $\{a \mid a \in B \text{ је атом и } a \preccurlyeq x\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Обележимо са

$$y = \curlyvee\{a \mid a \in B \text{ је атом и } a \preccurlyeq x\} = a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k.$$

Како је $a_i \preccurlyeq x$, следи да је $a_i \curlywedge x = a_i$, за све $i \in \{1, \ldots, k\}$. Према томе,

$$\begin{aligned} y \curlywedge x &= (a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k) \curlywedge x \\ &= (a_1 \curlywedge x) \curlyvee (a_2 \curlywedge x) \curlyvee \ldots \curlyvee (a_k \curlywedge x) \\ &= a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k \\ &= y. \end{aligned}$$

Дакле, $y \curlywedge x = y$, тј. $y \preccurlyeq x$. Покажимо да је, заправо, $y = x$.

Претпоставимо супротно, нека је $y \prec x$. Посматрајмо елемент $y' \curlywedge x$. Наравно, важи да је $0 \preccurlyeq y' \curlywedge x$, јер је 0 најмањи елемент скупа B. Покажимо да је $y' \curlywedge x \neq 0$. Ако би било тачно да је $y' \curlywedge x = 0$, тада би следило да је $y \curlywedge x = (y \curlywedge x) \curlyvee 0 = (y \curlywedge x) \curlyvee (y' \curlywedge x) = (y \curlyvee y') \curlywedge x = 1 \curlywedge x = x$, тј. $x \preceq y$, што је у контрадикцији са почетном предпоставком. Дакле, $y' \curlywedge x \neq 0$, па на основу првог дела теореме, постоји атом $c \in B$ такав да је $c \preccurlyeq y' \curlywedge x$, тј. $c \curlywedge y' \curlywedge x = c$. Тада је

$$\begin{aligned} c \curlywedge y' = c \curlywedge y' \curlywedge x \curlywedge y' = c \curlywedge y' \curlywedge x = c, \\ c \curlywedge x = c \curlywedge y' \curlywedge x \curlywedge x = c \curlywedge y' \curlywedge x = c. \end{aligned}$$

Другим речима, $c \preccurlyeq y'$ и $c \preccurlyeq x$. С обзиром на то да је c атом и да је $c \preccurlyeq x$, закључујемо да је $c = a_i$, за неко $i \in \{1, \ldots, k\}$. Даље, на основу закона апсорпције, следи да је

$$c \curlywedge y = a_i \curlywedge (a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k) = a_1 = c, \text{ тј. } c \preccurlyeq y.$$

На основи претходног, закључујемо да је $c \preccurlyeq y'$ и $c \preccurlyeq y$, па је

$$c = c \curlywedge c = (c \curlywedge y') \curlywedge (c \curlywedge y) = c \curlywedge y \curlywedge y' = c \curlywedge 0 = 0.$$

Како је c атом, мора важити да је $c \neq 0$, па долазимо до контрадикције. Дакле, $x = y$, чиме је доказано тврђење теореме. □

Бесконачне Булове алгебре не морају садржати атоме, о чему сведочи наредни пример.

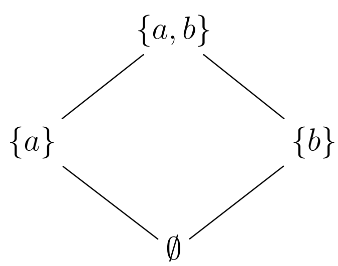
Пример 0.18 Линденбаумова алгебра не садржи атоме. Ако је $[\bot] \prec [A]$, покажимо да $[A]$ није атом. Формула A садржи само коначно много исказних слова, означимо та исказна слова са $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Јасно је да формула A није контрадикција, јер би у супротном важило да је $[\bot] = [A]$. Према томе, постоји избор вредности исказних променљивих $p_1, p_2, \ldots, p_n$ за које је формула A тачна.

Нека је q исказно слово које се не појављује у формули A. Формула $q \wedge A$ није контрадикција. На пример, формула $q \wedge A$ биће тачна ако за $p_1, p_2, \ldots, p_n$ изаберемо вредности тако да је формула A тачна, а за $q = \top$. Дакле, $[\bot] \prec [q \wedge A]$. Са друге стране, формула $q \wedge A$ биће нетачна ако за $p_1, p_2, \ldots, p_n$ изаберемо вредности тако да је формула A тачна, а за $q = \bot$. Из претходног закључујемо да формуле A и $q \wedge A$ нису логички еквивалентне, односно да је $[A] \neq [q \wedge A]$. Како је још $[q \wedge A] \curlywedge [A] = [(q \wedge A) \wedge A] = [q \wedge A]$, закључујемо да је $[q \wedge A] \prec [A]$.

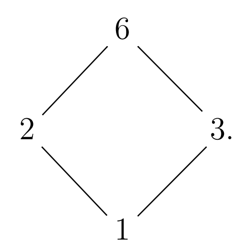
На основу претходних разматрања имамо да је $[\bot] \prec [q \wedge A] \prec [A]$, одакле следи да $[A]$ није атом. Са обзиром на то да је $[A]$ био произвољан елемент Линденбаумове алгебре, закључујемо да она нема атоме. ♣

0.4 Изоморфизам Булових алгебри

Хасеови дијаграми Булових алгебри $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a,b\})} = \big(\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \cup, \cap, ^C, \emptyset, \{a,b\}\big)$ и $\mathbf{D_6} = (\{1,2,3,6\}, \text{нзс}, \text{нзд}, 6/, 1, 6)$ редом су



и



Приметимо да су претходна два дијаграма идентична (до на ознаку елемената). Ако посматрамо табеле операција поменутих Булових алгебри такође ћемо уочити да се оне разликују до на ознаку елемената и операција.

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

$\longleftrightarrow$

нзс	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

$\longleftrightarrow$

нзд	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

A	A^C
$\emptyset$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$

$\longleftrightarrow$

x	$6/x$
1	6
2	3
3	2
6	1

Аналогија између елемената ове две Булове алгебре је:

$$\emptyset \longleftrightarrow 1, \quad \{a\} \longleftrightarrow 2, \quad \{b\} \longleftrightarrow 3, \quad \{a,b\} \longleftrightarrow 6.$$

Долазимо до закључка да Булове алгебре $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a,b\})}$ и $\mathbf{D_6}$ имају идентичну структуру. Другим речима, можемо их поистоветити.

Када су две Булове алгебре формално различите али структурно исте кажемо да су изоморфне.

Дефиниција 0.19 Булове алгебре $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ и $\mathbf{B^*} = (B^*, \curlyvee^*, \curlywedge^*, '^*, 0^*, 1^*)$ су *изоморфне* уколико постоји бијекција $f : B \to B^*$ за коју важи:

1) $f(x \curlyvee y) = f(x) \curlyvee^* f(y)$,

2) $f(x \curlywedge y) = f(x) \curlywedge^* f(y)$,

3) $f(x') = f(x)'^*$,

за све $x, y \in B$. Изоморфизам Булових алгебри $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B^*}$ означавамо са: $\mathbf{B} \cong \mathbf{B^*}$.

Из претходне дефиниције следи да је $f(0) = 0^*$ и $f(1) = 1^*$, уколико је $\mathbf{B} \cong \mathbf{B^*}$. Како је $0 = x \curlywedge x'$, за произвољно $x \in B$, следи да је

$$f(0) = f(x \curlywedge x') = f(x) \curlywedge f(x') = f(x) \curlywedge f(x)'^* = 0^*.$$

Слично, како је $1 = x \curlyvee x'$, важи да је

$$f(1) = f(x \curlyvee x') = f(x) \curlyvee f(x') = f(x) \curlyvee f(x)'^* = 1^*.$$

Као што смо видели на почетку овог поглавља, Булова алгебра $\mathbf{D_6}$ изоморфна је алгебри партитивног скупа $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a,b\})}$. Ово својство може се даље генерализовати, Булова алгебра $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$ изоморфна је алгебри партитивног скупа $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \ldots, a_m\})}$, где је m број простих фактора броја n и $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$. Ако си $p_1, p_2, \ldots, p_m$ прости фактори броја n, одговарајућа кореслоденција између елемената Булових алгебри $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \ldots, a_m\})}$ је:

$$\prod_{i \in K} p_i \longleftrightarrow \{a_i \mid i \in K\},$$

за све $K \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. Приметимо и то да сваком атому у $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$ одговара синглтон, то јесте атом у $\boldsymbol{\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \ldots, a_m\})}$.

Изоморфизам Булове алгебре $\mathbf{D}_{\boldsymbol{n}}$ и алгебре партитивног скупа није случајност. Испоставља се да је свака коначна Булова алгебра изоморфна некој коначној алгебри партитивног скупа. У наставку наводимо познату Стонову[2] теорему у којој је изложен доказ претходне чињенице.

[2]Marshall Harvey Stone (1903-1989), americhki matematichar

Теорема 0.20 (Стонова теорема) Ако је $\mathbf{B} = (B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ коначна Булова алгебра тада постоји коначан скуп S такав да је $\mathbf{B} \cong \boldsymbol{\mathcal{P}(S)}$.

Доказ. Нека је S скуп свих атома у $\mathbf{B}$. Функција $f : B \to \mathcal{P}(S)$ дефинисана је за све $x \in B$ на следећи начин:

$$f(x) = \{a \mid a \text{ је атом и } a \preccurlyeq x\}.$$

Функција f није тривијална јер је $\mathbf{B}$ коначна и садржи атоме. Покажимо да је f изоморфизам Булових алгебри.

Нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \mathcal{P}(S)$ и $x = a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k$. Докажимо да је $A = f(x)$. Ако $a \in A$, тј. $a = a_i$, за неко $i \in \{1, 2, \ldots, a_k\}$, тада је

$$a_i \curlywedge x = a_i \curlywedge (a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k) = a_i.$$

Према томе, $a = a_i \preccurlyeq x$ и a је атом, па $a \in f(x)$. Дакле, важи да је $A \subseteq f(x)$. Обрнуто, нека $b \in f(x)$. Другим речима, b је атом и $b \preccurlyeq x$. Следи да је

$$b = b \curlywedge x = b \curlywedge (a_1 \curlyvee a_2 \curlyvee \cdots \curlyvee a_k) = (b \curlywedge a_1) \curlyvee (b \curlywedge a_2) \curlyvee \cdots (b \curlywedge a_k).$$

Како је b атом, важи да је за све $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $b \curlywedge a_i = 0$ или $b \curlywedge a_i = b$. Тада постоји бар једно $a_i \in A$ за које важи $b \curlywedge a_i = b$, тј. $b \preccurlyeq a_i$. Елемент a_i је атом, па је $b = a_i$. Одолазимо до закључка да $b \in A$, па је $f(x) \subseteq A$. Како је A произвољан елемент скупа $\mathcal{P}(S)$ за који постоји $x \in B$ такав да је $A = f(x)$ закључујемо да је функција f "на".

Проверимо да ли је функција f "1–1". Ако за произвољне $x, y \in B$ важи да је $f(x) = f(y)$, покажимо да је $x = y$. Приметимо најпре следеће: ако је $f(x) \subseteq f(y)$, тада је $x \preccurlyeq y$. Уколико бисмо претпоставили супротно, да $x \not\preccurlyeq y$, то би на основу дефиниције функције f значило да постоји атом a такав да је $a \preccurlyeq x$ и $a \not\preccurlyeq y$. Даље, то значи да $a = f(x)$ и $a \notin f(y)$, па $f(x) \not\subseteq f(y)$, што је контрадикција. На основу претходног, из чињеница да је $f(x) \subseteq f(y)$ и $f(y) \subseteq f(x)$ следи да је $x \preceq y$ и $y \preceq x$. Дакле, $x = y$.

Преостаје још да покажемо да се функција f добро "слаже" са операцијама.

1) $f(x \curlyvee y) = f(x) \cup f(y)$:

$$\begin{aligned} a \in f(x \curlyvee y) &\Leftrightarrow a \text{ је атом и } a \preccurlyeq x \curlyvee y \\ &\Leftrightarrow a = a \curlywedge (x \curlyvee y) = (a \curlywedge x) \curlyvee (a \curlywedge y) \\ &\Leftrightarrow a \curlywedge x = a \text{ или } a \curlywedge y = a \\ &\Leftrightarrow a \preccurlyeq x \text{ или } a \preccurlyeq y \\ &\Leftrightarrow a \in f(x) \text{ или } a \in f(y) \\ &\Leftrightarrow a \in f(x) \cup f(y) \end{aligned}$$

2) $f(x \curlywedge y) = f(x) \cap f(y)$:

$$\begin{aligned} a \in f(x \curlywedge y) &\Leftrightarrow a \text{ је атом и } a \preccurlyeq x \curlywedge y \\ &\Leftrightarrow a \preccurlyeq x \text{ и } a \preccurlyeq y \\ &\Leftrightarrow a \in f(x) \text{ и } a \in f(y) \\ &\Leftrightarrow a \in f(x) \cap f(y) \end{aligned}$$

3) $f(x') = f(x)^C = S \setminus f(x)$:

Важи да $a \in f(x')$ ако и само ако је a атом и $a \preccurlyeq x'$. Уколико би додатно важило и да је $a \preccurlyeq x$ тада је $a \curlywedge x = a$, па је $a = a \curlywedge a = (a \curlywedge x) \curlywedge (a \curlywedge x') = 0$, што је у контрадикцији са чињеницом да је a атом. Према томе, $a \not\preccurlyeq x$, па $a \notin f(x)$, тј. $a \in S \setminus f(x) = f(x)^C$. $\square$

На основу Стонове тореме долазимо до закључка да се коначна Булова алгебра може конструисати само на скуповима који имају 2^m елеменатам, где је $m \geq 1$. Као последицу Стонове теореме имамо и то да су сваке две коначне Булове алгебре које имају исти број елемената међусобно изоморфне.