УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Биљана Вујошевић

Индекс система производа Хилбертових модула

докторска дисертација

Београд, 2015.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Драгољуб Кечкић, ванредни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Александар Цветковић, редовни професор
Машински факултет, Универзитет у Београду

др Драгољуб Кечкић, ванредни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Ђорђе Кртинић, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Biljana Vujošević

The index of product systems of Hilbert modules

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

ИНДЕКС СИСТЕМА ПРОИЗВОДА ХИЛБЕРТОВИХ МОДУЛА

Апстракт

У овом раду дефинишемо индекс система производа Хилбертових $\mathcal{B}$–$\mathcal{B}$ модула над уniталном C^*-алгебром $\mathcal{B}$. Наиме, доказујемо да се скуп свих униформно непрекидних јединица система производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ може снабдети структуром двостраног Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула након идентификовања јединица помоћу одговарајуће релације еквиваленције и ту конструкцију користимо за дефинисање индекса датог система производа. Доказујемо да је тако дефинисан индекс коваријантни функтор из категорије непрекидних система производа у категорију двостраних $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула. Такође, изводимо особину субадитивности индекса у односу на спољашњи тензорски производ система производа као и додатна својства индекса система производа који се може утопити у просторни систем производа (систем производа који садржи централну униталну јединицу). Показујемо да тако дефинисан индекс представља уопштење раније дефинисаног индекса који су увели Арвесон (за случај $\mathcal{B} = \mathbb{C}$) и Скајде (за случај просторних система производа). Такође, дајемо још једну дефиницију индекса система производа и доказујемо да је еквивалентна са првобитном. Та дефиниција следи оригиналну Арвесонову дефиницију индекса.

Кључне речи: (Двострани) Хилбертов C^*-модул, систем производа Хилбертових модула, C^*-алгебра, индекс, E_0-полугрупа, (условно) потпуно позитивно дефинитна језгра

Научна област: Математика
Ужа научна област: Анализа

УДК број: [517.986.7+517.986.9]:517.982.22(043.3)

THE INDEX OF PRODUCT SYSTEMS OF HILBERT MODULES

Abstract

In this doctoral dissertation we define the index of product systems of Hilbert $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ modules over a unital C^*-algebra $\mathcal{B}$. In detail, we prove that the set of all uniformly continuous units on a product system over a C^*-algebra $\mathcal{B}$ can be endowed with a structure of left-right Hilbert $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ module after identifying similar units by the suitable equivalence relation and we use that construction to define the index of a given product system. We prove that such defined index is a covariant functor from the category of continuous product systems to the category of two-sided $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ modules. We prove that the index is subadditive with respect to the outer tensor product of product systems and we, also, prove additional properties of the index of product system that can be embedded into a spatial one (a product system that contains a central unital unit). We prove that such defined index is a generalization of earlier defined indices by Arveson (in the case $\mathcal{B}=\mathbb{C}$) and Skeide (in the case of spatial product systems). We, also, define the index of product systems in a different way and prove that the new definition is equivalent to the previous one. Actually, it corresponds to Arveson's original definition of the index.

Keywords: (Two-sided) Hilbert C^*-module, product system of Hilbert modules, C^*-algebra, index, E_0-semigroup, (conditionally) completely positive definite kernels

Scientific area: Mathematics
Scientific area: Analysis

UDK number: [517.986.7+517.986.9]:517.982.22(043.3)

Садржај

Увод

Систем производа Хилбертових простора је фамилија сепарабилних Хилбертових простора $E = \{E_t,\ t > 0\}$ снабдевена асоцијативним множењем $(x, y) \in E_s \times E_t \to xy \in E_{s+t}$ које је билинеарно на фибрама и делује као тензорско множење у смислу да важи $\langle xx', yy' \rangle_{E_{s+t}} = \langle x, y \rangle_{E_s} \langle x', y' \rangle_{E_t}$ и $E_{s+t} = \overline{\mathrm{span}}\,(E_s E_t)$, $s, t > 0$. Такве системе производа увео је Арвесон 1989. године и они се, краће, називају Арвесонови системи производа. Он је касније проучавао и везу између E_0-полугрупа над $B(H)$ (појам уведен пре тридесетак година и односи се на полугрупу униталних ендоморфизама алгебре $B(H)$ свих ограничених линеарних оператора на сепарабилном Хилбертовом простору H) и система производа Хилбертових простора. Прецизније, утврдио је да се може успоставити бијекција између E_0-полугрупа над $B(H)$ (до на коцикличну конјугованост) и система производа Хилбертових простора (до на изоморфизам). Јединица система производа E је фамилија (u_t), $u_t \in E_t$ (која није тривијална и задовољава одређене услове мерљивости) за коју важи $u_{s+t} = u_s u_t, \quad s, t > 0$. Скуп свих јединица означава се $\mathcal{U}_E$. За јединице u и v постоји јединствени комплексни број $c(u, v)$ такав да важи $\langle u_t, v_t \rangle = e^{tc(u,v)}, \quad t > 0$. Функција $c : \mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_E \to \mathbb{C}$ се зове функција коваријације система производа E. Она је условно позитивно дефинитна па се помоћу ње може конструисати Хилбертов простор H_E. У случају да је $\mathcal{U}_E \neq \emptyset$, индекс система производа E, у ознаци $\mathrm{ind}\, E$, дефинише се као димензија одговарајућег Хилбертовог простора H_E, тј. $\mathrm{ind}\, E = \dim H_E$, а уколико је $\mathcal{U}_E = \emptyset$, $\mathrm{ind}\, E = 2^{\aleph_0}$. Арвесон је доказао и адитивност индекса, тј. да за системе производа E и F важи

$$\mathrm{ind}(E \otimes F) = \mathrm{ind}\, E + \mathrm{ind}\, F.$$

Системи производа су класификовани према типу: систем производа E је типа I уколико је генерисан својим јединицама у извесном смислу, типа II ако није типа I и $\mathcal{U}_E \neq \emptyset$, типа III ако је $\mathcal{U}_E = \emptyset$.

Циљ ове дисертације је да се за ширу и битно различиту класу система производа Хилбертових модула може дефинисати појам индекса. До сада је познат само један покушај у том смеру и њега је дао Скајде (2006. год) тако што је предефинисао тензорски производ просторних система производа (системи производа који имају централну униталну јединицу) у циљу добијања адитивности индекса. Као што је горе напоменуто, Арвесон је, у случају Хилбертових простора, индекс дефинисао као природан број који представља димензију погодно одабраног и у ту сврху конструисаног векторског простора. С обзиром на то да су векторски простори (над истим пољем скалара) до на изоморфизам класификовани својом димензијом, резултат који се очекивао и добио у овом раду јесте да је индекс система производа Хилбертових модула класа изоморфних Хилбертових модула која на одговарајући начин репрезентује количину и међусобну везу јединица. Детаљније, реч је о следећем:

Систем производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ је фамилија $(E_t)_{t\geq 0}$ Хилбертових $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула, $E_0 \cong \mathcal{B}$ са фамилијом (унитарних) изоморфизама $\varphi_{s,t} : E_t \otimes E_s \to E_{t+s}$, где је $\otimes$ унутрашњи тензорски производ добијен идентификацијом $ub \otimes v \sim u \otimes bv, u \otimes vb \sim (u \otimes v)b, bu \otimes v \sim b(u \otimes v)$, $(u \in E_t, v \in E_s, b \in \mathcal{B})$ и потом комплетирањем у односу на скаларни производ $\langle u \otimes v, u_1 \otimes v_1\rangle = \langle v, \langle u, u_1\rangle v_1\rangle$. Јединица система производа $(E_t)_{t\geq 0}$ је фамилија $u_t \in E_t, t \geq 0$ таква да је $u_0 = 1$ и $\varphi_{t,s}(u_t \otimes u_s) = u_{t+s}$ што краће пишемо $u_t \otimes u_s = u_{t+s}$. Јединица u_t је унитална ако је $\langle u_t, u_t\rangle = 1$. Она је централна ако за свако $b \in \mathcal{B}$ и свако $t \geq 0$ важи $bu_t = u_t b$. За сваке две јединице u и v постоји фамилија ограничених $\mathbb{C}$-линеарних оператора $\mathcal{K}_t^{u,v} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ дефинисаних $\mathcal{K}_t^{u,v}(b) = \langle u_t, bv_t\rangle$ и она чини полугрупу. Скуп јединица $\mathcal{U}$ је непрекидан ако је одговарајућа полугрупа $(\mathcal{K}_t^{u,v})_{u,v\in\mathcal{U}}$ униформно непрекидна. За дати скуп (униформно) непрекидних јединица $\mathcal{U}$ формира се униформно непрекидна потпуно позитивно дефинитна полугрупа $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ и $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\mathcal{K}|_{t=0}$ је њен генератор. За систем производа E и произвољну непрекидну јединицу ω постоји максималан непрекидан скуп јединица $\mathcal{U}$ који садржи ω. На скупу $\mathcal{U}$ дефинишу се операције сабирања и множења елементима C^*-алгебре $\mathcal{B}$ које га чине двостраним $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модулом као и одговарајућа релација еквиваленције $\approx$ међу јединицама која је сагласна са операцијама. На скупу $\mathcal{U}$ дефинише се пресликавање

$$\langle x, y\rangle = (\mathcal{L}^{x,y} - \mathcal{L}^{x,\omega} - \mathcal{L}^{\omega,y} + \mathcal{L}^{\omega,\omega})(1),$$

које после увођења релације еквиваленције $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N = \{x | \langle x, x\rangle = 0\}$ снабдева $\mathcal{U}/_\sim$ структуром пред-Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула. Индекс пара (E, ω) дефинише се као комплетирање двостраног пред-Хилбертовог модула $\mathcal{U}/_\sim$ и означава се $\operatorname{ind}(E, \omega)$. Показује се да $\operatorname{ind}(E, \omega)$ не зависи од избора ω у истом непрекидном скупу јединица. Уколико се E може утопити у просторни систем производа (систем производа који садржи централну униталну јединицу), комплетирање није неопходно, тј. $\mathcal{U}/_\sim$ је Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул и поменуте релације еквиваленције су једнаке. Доказујемо да је тако дефинисан индекс коваријантни функтор из категорије непрекидних система производа у категорију двостраних $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула. Такође, изводимо особину субадитивности индекса у односу на спољашњи тензорски производ система производа.

На крају показујемо да дефиниција индекса која је дата у овој дисертацији представља уопштење раније дефинисаног индекса који су увели Арвесон (за случај $\mathcal{B} = \mathbb{C}$) и Скајде (за случај просторних система производа).

У првом и другом поглављу наводе се неки од већ познатих резултата из теорије E_0-полугрупа и теорије система производа Хилбертових простора (Арвесонових система производа). Представљена је дефиниција индекса поменутих објеката као и важно својство адитивности индекса. На крају је дата и њихова класификација. Треће поглавље је посвећено кратком осврту на појмове позитивно дефинитних и потпуно позитивно дефинитних језгара као и на појам полугрупе језгара.

У четвртом и петом поглављу говоримо о системима производа Хилбертових модула над произвољном униталном C^*-алгебром. Наводимо неопходне дефиниције и дајемо начин конструкције нових јединица у датом систему производа. Такође формулишемо и доказујемо неке помоћне леме потребне за представљање главних резултата дисертације.

Поглавља која следе садрже оригиналне резултате дисертације. Шесто поглавље садржи резултате који се тичу дефинисања индекса система производа Хилбертових модула. Конструишемо двострани Хилбертов модул тако што комплетирамо одговарајући пред-Хилбертов модул и потом га користимо за дефиницију индекса. Такође, дајемо још једну дефиницију индекса система производа и доказујемо да је еквивалентна са првобитном.

У седмом поглављу наводимо дефиницију непрекидног система производа и доказујемо да је индекс, дефинисан у овој дисертацији, коваријантни функтор из категорије непрекидних система производа у категорију $\mathcal{B}$-бимодула. Осмо поглавље садржи доказ да је индекс субадитиван у односу на спољашњи тензорски производ система производа.

У деветом поглављу доказујемо додатна својства индекса потпросторног система производа (систем производа који се може утопити у просторни, тј. у систем производа који садржи централну униталну јединицу). Коначно, важна теорема коју доказујемо јесте да комплетирање одговарајућег двостраног пред-Хилбертовог модула (помоћу кога дефинишемо индекс) није потребно.

Десето поглавље садржи примере система производа који показују да је индекс, дефинисан у овој дисертацији, уопштење појма индекса који су дефинисали Арвесон у случају $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ и Скајде у случају просторних система производа. Такође, рачунамо индекс система производа без централне јединице.

У једанаестом поглављу уопштавамо већ познати појам система инклузија Хилбертових простора који представља једнопараметарску фамилију Хилбертових простора, сличну систему производа, са разликом у томе што су унитарна пресликавања која повезују одговарајуће Хилбертове просторе замењена изометријама. Посматрамо системе инклузија двостраних Хилбертових модула над C^*-алгебром компактних оператора на Хилбертвом простору и доказујемо да, у одређеним случајевима, неки од резултата остају да важе.

На крају, желела бих да се захвалим ментору, проф. др Драгољубу Кечкићу, на подршци, стрпљењу и бројним стручним дискусијама које смо водили у процесу израде ове тезе. Посебну захвалност дугујем и члановима комисије, др Ђорђу Кртинићу и проф. др Александру Цветковићу, који су пажљиво читали овај рукопис и својим стручним коментарима и сугестијама допринели његовом квалитету.

0 Преглед мање познатих појмова

У овом поглављу наводимо дефиниције симетричног и антисиметричног тензорског производа Хилбертових простора као и нека основна својства фон Нојманових алгебри (видети [26], [10], [27]).

Симетричан и антисиметричан тензорски производ. Дефиниције симетричног и антисиметричног тензорског производа наводимо у облику у ком се појављују у Поглављу 1.

Нека је H Хилбертов простор. За свако $n \in \mathbb{N}$ посматрамо алгебарски тензорски производ

$$H \otimes_{alg} \cdots \otimes_{alg} H \tag{0.1}$$

као пред-Хилбертов простор коначних линеарних комбинација елемената облика $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ $(x_i \in H)$ где је скаларни производ дефинисан

$$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \cdots \langle y_1, y_n \rangle .$$

Хилбертов простор

$$H^{\otimes n} = H \otimes \cdots \otimes H$$

настаје комплетирањем алгебарског тензорског производа (0.1) у односу на дати скаларни производ.

Дефиниција 0.1. Нека $x_1, \ldots, x_n \in H$.

а) Симетричан тензорски производ елемената x_i је

$$x_1 \circ \cdots \circ x_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

где је S_n група пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Затворење (у $H^{\otimes n}$) потпростора који је генерисан елементима $x_1 \circ \cdots \circ x_n$ зове се симетричан тензорски производ n копија Хилбертовог простора H. Ознака која је у употреби је $H^{\circ n}$ (или исто $H^{\otimes n}$ ако нема опасности од забуне).

б) Антисиметричан тензорски производ елемената x_i је

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

где је ϵ_σ знак премутације σ.
Затворење (у $H^{\otimes n}$) потпростора који је генерисан елементима $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ зове се антисиметричан тензорски производ n копија Хилбертовог простора H и означава се $H^{\wedge n}$.

Пример 0.2. У случају $n = 2$ важи $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$ и $x_1 \wedge x_2 = -x_2 \wedge x_1$.

Фон Нојманове алгебре. Наводимо неке основне појмове везане за теорију фон Нојманових алгебри који ће бити помињани у овом раду.

Нека је $B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H и нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ неки непразан скуп.

Дефиниција 0.3. Комутант скупа $\mathcal{M}$ је

$$\mathcal{M}' = \{T \in B(H) | \ \forall S \in \mathcal{M},\ ST = TS\}.$$

Бикомутант скупа $\mathcal{M}$, у ознаци $\mathcal{M}''$, је комутант скупа $\mathcal{M}'$.

Фон Нојманова теорема о бикомутанту:

Теорема 0.4. *Нека је $B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на неком Хилбертовом простору H и нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ нека њена *-подалгебра што значи да је затворена у односу на линеарне комбинације, множење и инволуцију $T \mapsto T^*$ и садржи јединични оператор I.*

Следећи услови су међусобно еквивалентни:
а) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$';
б) $\mathcal{M}$ је затворена у односу на слабу топологију;
в) $\mathcal{M}$ је затворена у односу на јаку топологију.

Дефиниција 0.5. Подалгебру $\mathcal{M}$ алгебре $B(H)$ називамо фон Нојманова алгебра ако испуњава неки од услова претходне теореме.

Дефиниција 0.6. Центар фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}$ је $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$. Дакле, то је скуп оператора из $\mathcal{M}$ који комутирају са свим осталим из $\mathcal{M}$. Он увек сарджи скаларне умношке јединичног оператора, $\mathbb{C}I$. Ако других нема, онда кажемо да је центар тривијалан.

Фактор је Фон Нојманова алгебра чији је центар тривијалан.

Пример фактора је фон Нојманова алгебра $B(H)$ јер је познато да је $B(H)' = \mathbb{C}I$.

За фон Нојманову алгебру $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ постоји Банахов простор X са особином $X^* \cong \mathcal{M}$. За X се може узети скуп свих $\varphi \in \mathcal{M}^*$ који су непрекидни у ултраслабој топологији[1].

Дефиниција 0.7. Банахов простор X се зове преддуал фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}$ и означава се $\mathcal{M}_*$.

Пример 0.8. Преддуал Фон Нојманове алгебре $B(H)$ је Банахов простор свих нуклеарних оператора.

Дефиниција 0.9. Ако је $\Phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ хомоморфизам фон Нојманових алгебри, онда је Φ нормалан ако и само ако је непрекидан у односу на ултраслабе топологије у M_1, односно у $\mathcal{M}_2$.

Дефиниција 0.10. За позитиван фунционал φ на $\mathcal{M}$ кажемо да је нормалан ако за сваку ограничену растућу мрежу $T_\alpha \in \mathcal{M}$ важи

$$\varphi(\sup_\alpha T_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(T_\alpha).$$

Слично, позитивно пресликавање $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ две фон Нојманове алгебре је нормално ако важи

$$\rho(\sup_\alpha T_\alpha) = \sup_\alpha \rho(T_\alpha).$$

[1]Ултраслаба топологија на $B(H)$ је задата системом базних околина нуле $\{T \in B(H) | \ \sum_j |\langle T(x_j), y_j\rangle| < \varepsilon\}, \ x_j, y_j \in H, \ \sum_j \|x_j\|^2 < +\infty, \ \sum_j \|y_j\|^2 < +\infty, \ \varepsilon > 0$.

1 E_0-полугрупе

У овом поглављу наводимо неке од основних појмова теорије E_0-полугрупа [2] који укључују појам пертурбције E_0-полугрупе помоћу коцикла, придружену релацију еквиваленције - коцикличну конјугацију и основне примере E_0-полугрупа - CAR/CCR токове. Разматрамо, такође, конкретне системе производа Хилбертових простора, појам јединица и нумеричког индекса E_0-полугрупа и рачунамо индекс CCR токова. На самом крају говоримо о класификацији E_0-полугрупа.

Нека је H Хилбертов простор и $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Најманова алгебра.

Дефиниција 1.1. Фамилија нормалних $*-$ендоморфизама[2] $\alpha = \{\alpha_t | \ t \geq 0\}$ Најманове алгебре $\mathcal{M}$ је $E-$полугрупа ако

1. $\alpha_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$;
2. $\alpha_s \circ \alpha_t = \alpha_{s+t}, \quad s, t \geq 0$;
3. За свако $a \in \mathcal{M}$ и сваки нормалан линеаран функционал $\rho \in \mathcal{M}_*$, функција $t \in [0, \infty) \mapsto \rho(\alpha_t(a))$ је непрекидна.

E_0-полугрупа је E-полугрупа α која задовољава $\alpha_t(1) = 1$ за свако $t \geq 0$.

Када је α E-полугрупа која делује на $\mathcal{M} = B(H)$, услов непрекидности (3) се своди на слабу непрекидност: за свако $\xi, \eta \in H$ и сваки оператор $A \in B(H)$, $t \mapsto \langle \alpha_t(A)\xi, \eta \rangle$ је непрекидна функција по $t \in [0, \infty)$.

У даљем излагању говоримо о E_0-полугрупама које делују на $B(H)$. Сматрамо да су сви Хилбертови простори H које помињемо сепарабилни.

Дефиниција 1.2. Две E_0-полугрупе α и β које делују на $B(H)$ и $B(K)$, редом, су конјуговане ако постоји $*$-изоморфизам $\theta : B(H) \to B(K)$ такав да је

$$\beta_t \circ \theta = \theta \circ \alpha_t, \ t \geq 0$$

и θ је дат помоћу унитарног пресликавања $U : H \to K$ као $\theta(A) = UAU^*, \ A \in B(H)$.

[2]Видети Дефиницију 0.9.

Према томе, оправдано је, у том смислу, поистоветити конјуговане E_0-полугрупе.

Најједноставнији примери E_0-полугрупа су CCR и CAR токови. То су две различите конструкције E_0-полугрупа које користе различите појмове: канонске релације комутативности и антикомутативности. Испоставља се да су оне конјуговане и зато се називају једним именом CAR/CCR токови.

CCR ток.
Нека је H Хилбертов простор. Посматрамо симетричан тензорски производ $H^{\otimes n}$ за $n \geq 1$ и $H^{\otimes 0} = \mathbb{C}$. Симетрични Фоков простор над H је дефинисан као директна сума Хилбертових простора

$$e^H = \sum_{n=0}^{+\infty} H^{\otimes n}. \tag{1.1}$$

Експоненцијално пресликавање $\exp : H \to e^H$ је дефинисано

$$\exp(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \xi^{\otimes n}.$$

Простор e^H је разапет векторима $\exp(\xi)$ $(\xi \in H)$ и важи

$$\langle \exp(\xi), \exp(\eta) \rangle = e^{\langle \xi, \eta \rangle}. \tag{1.2}$$

На основу тога, постоји природна идентификација

$$e^{H_1 \oplus H_2} = e^{H_1} \otimes e^{H_2}. \tag{1.3}$$

Посматрајмо категорију $\mathcal{S}$ чији су објекти јако непрекидне (по t) полугрупе изометрија

$$U = \{U_t |\ t \geq 0\}$$

за које важи $U_0 = 1$. Свака полугрупа U делује на сепарабилном Хилбертовом простору H_U. Елементи у $hom(U, V)$ су унитарни оператори $W : H_U \to H_V$ за које важи

$$WU_t = V_t W, \quad t \geq 0.$$

У овој категорији је могуће посматрати директну суму објеката, где је $U \oplus V$

полугрупа изометрија на $H_U \oplus H_V$ дефинисана

$$(U \oplus V)_t = U_t \oplus V_t, \quad t \geq 0.$$

Полугрупа $U \in \mathcal{S}$ је чиста ако је

$$\bigcap_{t>0} U_t H_U = \{0\}.$$

Свака чиста полугрупа изометрија V је изоморфна директној суми највише пребројиво много - d копија простих шифт-полугрупа S које делују на $L^2(0,\infty)$ као

$$S_t f(x) = \begin{cases} f(x-t), & x > t \\ 0, & 0 < x \leq t. \end{cases} \tag{1.4}$$

Број копија d је јединствено одређен полугрупом V и представља њен индекс - $\mathrm{ind}(V)$. Шифт-полугрупа S_d индекса $d \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ може се видети на следећи начин: Нека је K Хилбертов простор димензије d. Посматрамо $L^2(0,\infty) \otimes K$ као простор квадратно интеграбилних мерљивих функција са вредностима у K. Полугрупа S_d је дефинисана исто као у (1.4), само је сада f функција у $L^2(0,\infty) \otimes K$.

У [2, Став 2.1.3] Арвесон[3] је доказао да за сваку полугрупу изометрија U у $\mathcal{S}$ која делује на Хилбертовом простору H, постоји јединствена E_0-полугрупа α^U која делује на $B(e^H)$ и задовољава

$$\alpha_t^U(W(\xi)) = W(U_t \xi), \quad t \geq 0, \ \xi \in H,$$

где је $W(\xi)$ унитаран оператор на e^H, јединствено одређен помоћу $\xi \in H$, такав да

$$W(\xi)(\exp(\eta)) = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2 - \langle \eta, \xi \rangle} \exp(\eta + \xi), \ \eta \in H.$$

Дефиниција 1.3. Нека $d \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$. *CCR* ток ранга d је E_0-полугрупа α^{S_d} придружена шифт-полугрупи S_d индекса d.

CAR ток.

Нека је H Хилбертов простор. Посматрајмо Хилбертов простор $\mathcal{F}_-(H)$ добијен

[3] William Arveson (1934-2011)

комплетирањем спољашњег тензорског производа над H. Прецизније, за свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $H^{\wedge n}$ антисиметричан потпростор од $H^{\otimes n}$ и $\wedge^0 H = \mathbb{C}$. Антисиметричан Фоков простор над H је дефинисан као директна сума Хилбертових простора $H^{\wedge n}$, тј.

$$\mathcal{F}_-(H) = \mathbb{C} \oplus H \oplus (H \wedge H) \oplus (H \wedge H \wedge H) \oplus \ldots .$$

У [2, Став 2.1.7] Арвесон је доказао да за сваку полугрупу изометрија U у $\mathcal{S}$ која делује на Хилбертовом простору H, постоји јединствена E_0-полугрупа α^U која делује на $B(\mathcal{F}_-(H))$ и задовољава

$$\alpha_t^U(c(z)) = c(U_t z), \quad t \geq 0,\ z \in H,$$

где је $c(z)$ оператор на $\mathcal{F}_-(H)$, јединствено одређен помоћу $z \in H$, такав да

$$c(z)(\zeta_1 \wedge \zeta_2 \wedge \cdots \wedge \zeta_n) = z \wedge \zeta_1 \wedge \zeta_2 \wedge \cdots \wedge \zeta_n, \quad \zeta_i \in H,\ n \geq 0.$$

Дефиниција 1.4. Нека $d \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$. CAR ток ранга d је E_0-полугрупа α^{S_d} која делује на $B(\mathcal{F}_-(H))$ и придружена је шифт-полугрупи S_d индекса d.

Примедба 1.5. CCR ток придружен полугрупи S_d индекса $d \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ је конјугован CAR току придруженом полугрупи S_d и зато се они називају краће, једним именом, CAR/CCR токови.

1.1 Коцикличне пертурбације

Нека је α E_0-полугрупа која делује на фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}$. Иако неки од резултата које овде помињемо важе за E_0-полугрупе које делују на произвољној фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}$, увек сматрамо да је $\mathcal{M} \cong B(H)$, где је H сепарабилан Хилбертов простор.

Коцикл E_0-полугрупе α је јако непрекидна фамилија унитарних оператора $U = \{U_t |\ t \geq 0\}$ у M која задовољава

$$U_{s+t} = U_s \alpha_s(U_t), \quad s, t \geq 0. \tag{1.5}$$

Из (1.5) видимо да је $U_0 = 1$. Такође, фамилија ендоморфизама $\beta = \{\beta_t| \ t \geq 0\}$, дефинисана као

$$\beta_t(A) = U_t \alpha_t(A) U_t^*, \quad A \in B(H), \ t \geq 0, \tag{1.6}$$

задовољава полугрупни услов $\beta_{s+t} = \beta_s \circ \beta_t$.

Дефиниција 1.6. E_0-полугрупа β облика (1.6) се зове коциклична пертурбација полугрупе α. Две E_0-полугрупе су коциклично конјуговане ако је једна од њих конјугована коцикличној пертурбацији друге.

Појам коцикличне пертурбације дефинише релацију еквиваленције на скупу свих E_0-полугрупа које делују на некој фон Нојмановој алгебри. Наиме, нека су α и β две E_0-полугрупе које делују на фон Номановој алгебри $\mathcal{M}$, такве да је β коциклична пертурбација од α, тј.

$$\beta_t(A) = U_t \alpha_t(A) U_t^*, \quad A \in B(H), \ t \geq 0,$$

где је $\{U_t| \ t \geq 0\}$ α-коцикл који задовољава (1.5). Може се видети да унитарни оператори $V_t = U_t^*, \ t \geq 0$ представљају коцикл за β и да важи

$$\alpha_t(A) = V_t \beta_t(A) V_t^*.$$

Према томе, α је коциклична пертурбација E_0-полугрупе β. Ако је $\{U_t| \ t \geq 0\}$ α-коцикл и $\{W_t| \ t \geq 0\}$ коцикл за коциклично пертурбовану полугрупу $\beta_t(A) = U_t \alpha_t(A) U_t^*$, тада је E_0-полугрупа

$$\gamma_t(A) = W_t \beta_t(A) W_t^* = W_t U_t \alpha_t(A) U_t^* W_t^*, \quad t \geq 0, \ A \in B(H)$$

коциклична пертурбација полугрупе α јер је фамилија унитарних оператора $\{W_t U_t| \ t \geq 0\}$ α-коцикл.

Коцикличне пертурбације су од кључног значаја за класификацију E_0-полугрупа. Напоменућемо, нешто касније, да се коциклична конјугација може разматрати и кроз структуру одговарајућих непрекидних тензорских производа Хилбертових простора.

1.2 Конкретни системи производа

Системи производа су основне структуре придружене полугрупама ендоморфизама на $B(H)$. У овом потпоглављу описујемо њихову конструкцију и особине. На крају помињемо Арвесонов резултат који омогућује да се закључак о томе да ли су две E_0-полугрупе коциклично конјуговане може донети на основу довољно информација о њиховим конкретним системима производа.

Током овог потпоглавља, $\alpha = \{\alpha_t |\ t \geq 0\}$ означава E-полугрупу која делује на $B(H)$.

За свако $t > 0$ посматра се линеаран простор оператора

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \{T \in B(H) |\ \alpha_t(A)T = TA, \quad A \in B(H)\}. \tag{1.7}$$

Скуп свих $\mathcal{E}_\alpha(t),\ t > 0$ можемо видети као фамилију векторских простора $p : \mathcal{E}_\alpha \to (0, \infty)$ ако дефинишемо

$$\mathcal{E}_\alpha = \{(t, T) |\ t > 0,\ T \in \mathcal{E}_\alpha(t)\} \tag{1.8}$$

и $p(t, T) = t$.

Операторска норма на сваком простору $\mathcal{E}_\alpha(t)$ је, заправо, норма која га чини Хилбертовим простором. Да би се видело како је скаларни производ дефинисан, изаберимо $S, T \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ и нека је $A \in B(H)$ произвољан оператор. Како је

$$T^* SA = T^* \alpha_t(A)S = (\alpha_t(A^*)T)^* S = (TA^*)^* S = AT^* S,$$

T^*S мора бити облика $\lambda \cdot 1$ за неко $\lambda \in \mathbb{C}$. Скаларни производ оператора S и T је дефинисан тако да важи

$$T^* S = \langle S, T \rangle \cdot 1. \tag{1.9}$$

Операторска норма на $\mathcal{E}_\alpha(t)$ се поклапа са нормом дефинисаном овим скаларним производом јер за $T \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ важи

$$\|T\|^2 = \|T^* T\| = \| \langle T, T \rangle \cdot 1\| = \langle T, T \rangle .$$

Одмах видимо да је $\langle T, T \rangle = 0$ ако и само ако $T = 0$. На основу (1.7) видимо да је $\mathcal{E}_\alpha(t)$ затворен у норми па је, према томе, Хилбертов простор са скаларним производом дефинисаним у (1.9).

Сада цитирамо Арвесонов резултат [2, Став 2.4.1]:

Став 1.7. *Нека је $\mathcal{E}_\alpha$ фамилија Хилбертових простора придружена E-полугрупи α. За свако $s, t > 0$ важи*

1. $\mathcal{E}_\alpha(s)\mathcal{E}_\alpha(t) \subseteq \mathcal{E}_\alpha(s+t)$.
2. *За $S, S' \in \mathcal{E}_\alpha(s)$ и $T, T' \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ је*
$$\langle ST, S'T' \rangle_{s+t} = \langle S, S' \rangle_s \langle T, T' \rangle_t .$$
3. *Затворени линеарни омотач скупа $\{ST | \; S \in \mathcal{E}_\alpha(s), T \in \mathcal{E}_\alpha(t)\}$ је Хилбертов простор $\mathcal{E}_\alpha(s+t)$.*

Поред тога, за свако $t > 0$, $\alpha_t(1)$ је пројектор на потпростор $[\mathcal{E}_\alpha(t)H]$ у H који је разапет сликама оператора из $\mathcal{E}_\alpha(t)$.

На основу Става 1.7(1) видимо да се фамилија $\mathcal{E}_\alpha$ може начинити асоцијативном полугрупом ако се множење дефинише као

$$(s, S) \cdot (t, T) = (s+t, ST),$$

што значи да је p хомоморфизам између мултипликативне структуре у $\mathcal{E}_\alpha$ и адитивне полугрупе позитивних реалних бројева.

Ово множење је, у ствари, тензорско множење у смислу да за свако $s, t > 0$ постоји јединствени унитарни оператор $\mathcal{E}_\alpha(s) \otimes \mathcal{E}_\alpha(t) \to \mathcal{E}_\alpha(s+t)$, $S \otimes T \mapsto ST$ (Став 1.7 (2), (3)).

Значајано је поменути да у нетривијалном случају (када $\alpha = \{\alpha_t\}$ није полугрупа аутоморфизама на $B(H)$) $\mathcal{E}_\alpha(t)$ је сепарабилан бесконачно димензиони Хилбертов простор за свако $t > 0$.

Дефиниција 1.8. Нека је $\mathcal{E}$ Борелов подскуп производа Борелових простора $(0, \infty) \times B(H)$ и нека је $p : \mathcal{E} \to (0, \infty)$, $p(t, T) = t$ сурјективно пресликвање.

Скуп $\mathcal{E}$ је конкретан систем производа ако важи:

1. За свако $t > 0$, скуп $\mathcal{E}(t) = p^{-1}(t)$ је линеаран, затворен (у норми) потпростор у $B(H)$, такав да $B^*A \in \mathbb{C} \cdot 1$ за свако $A, B \in \mathcal{E}(t)$.

2. За свако $s, t > 0$, $\mathcal{E}(s+t)$ је затворени (у норми) линеарни омотач скупа $\mathcal{E}(s)\mathcal{E}(t)$.

3. Мерљива фамилија Хилбертових простора $\mathcal{E}$ је изоморфна тривијалној фамилији $(0,\infty) \times H_0$, где је H_0 сепарабилан бесконачно димензиони Хилбертов простор.

Дефиниција 1.9. Конкретни системи производа $\mathcal{E} \subseteq (0,\infty) \times B(H)$ и $\mathcal{F} \subseteq (0,\infty) \times B(K)$ су изоморфни уколико постоји изоморфизам $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ који задовољава $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ $(x, y \in \mathcal{E})$ и који се своди на унитаран оператор из $\mathcal{E}(t)$ у $\mathcal{F}(t)$, за свако $t > 0$.

Наводимо Арвесонову теорему [2, Теорема 2.4.7]:

Теорема 1.10. *Нека је $\alpha = \{\alpha_t | \ t \geq 0\}$ E-полугрупа која делује на $B(H)$. Структура $\mathcal{E}_\alpha$ која је дефинисана у (1.8) је конкретни систем производа.*

За произвољан конкретан систем производа $\mathcal{E} \subseteq (0,\infty) \times B(H)$ постоји јединствена придружена полугрупа $\alpha = \{\alpha_t | \ t \geq 0\}$ $*$-ендоморфизама на $B(H)$. Тај резултат је описан у следећем ставу ([2, Став 2.4.9]):

Став 1.11. *Нека је $\mathcal{E} \subseteq (0,\infty) \times B(H)$ конкретан систем производа. Тада постоји јединствена E-полугрупа α која делује на $B(H)$ и чији ендоморфизми задовољавају следеће услове за свако $t > 0$:*

1. *$\alpha_t(A)T = TA$ за свако $T \in \mathcal{E}(t)$, $A \in B(H)$.*

2. *$\alpha_t(1)$ је пројектор на $[\mathcal{E}(t)H]$.*

Штавише, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\alpha$ је конкретни систем производа придружен E-полугрупи α.

На тај начин је успостављена бијекција $\mathcal{E} \leftrightarrow \alpha$ између скупа свих конкретних система производа који делују на $B(H)$ и скупа свих E-полугрупа које делују на $B(H)$. Важност система производа у теорији E_0-полугрупа огледа се у ([2, Теорема 2.4.10]):

Теорема 1.12. *Две E_0-полугрупе α и β које делују на $B(H)$ и $B(K)$, редом, су коциклично конјуговане ако и само ако су њихови системи производа изоморфни.*

1.3 Јединице и индекс E_0-полугрупа

У [2] Арвесон дефинише индекс E_0-полугрупе и показује да је то нумеричка карактеристика која се не мења при коцикличним пертурбацијама.

Дефиниција 1.13. Јединица E_0-полугрупе α која делује на $B(H)$ је полугрупа $T = \{T_t|\ t \geq 0\}$ ограничених оператора на H за коју је $T_0 = 1$ и важи да је T јако непрекидна по t и задовољава

$$\alpha_t(A)T_t = T_tA, \quad A \in B(H),\ t \geq 0.$$

Скуп свих јединица E_0-полугрупе α означава се $\mathcal{U}_\alpha$. Наравно, постоје E_0-полугрупе за које је $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$, али и оне које имају обиље јединица (као што су нпр. CAR/CCR токови).

Индекс E_0-полугрупе се дефинише као димензија одговарајућег Хилбертовог простора који је придружен скупу јединица E_0-полугрупе. Наиме, нека је α E_0-полугрупа која делује на $B(H)$ и $\mathcal{U}_\alpha$ непразан скуп. За свако $S, T \in \mathcal{U}_\alpha$ нека је $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ функција дефинисана $f(t) = \langle S(t), T(t)\rangle_{\mathcal{E}_{\alpha(t)}}$. Како су S и T јако непрекидне полугрупе са особином

$$f(t)1 = T^*(t)S(t),$$

функција f је непрекидна, $f(0) = 1$ и полугрупно својство за S и T даје

$$f(s + t) = f(s)f(t), \quad s, t \geq 0.$$

Дакле, постоји јединствен комплексан број $c(S, T)$ који задовољава

$$\langle S(t), T(t)\rangle = e^{tc(S,T)},\ t \geq 0. \tag{1.10}$$

Функција $c : \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{C}$ се зове функција коваријације за α. Приметимо да, према (1.10), важи

$$\overline{c(S, T)} = c(T, S), \quad T, S \in \mathcal{U}_\alpha$$

и свако $T \in \mathcal{U}_\alpha$ задовољава

$$T(t) \neq 0 \quad \text{за све} \quad t \geq 0.$$

Став [2, Став 2.5.2] наводимо као:

Став 1.14. *Функција коваријације је условно позитивно дефинитна у смислу да за свако $n \in \mathbb{N}$, за све $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathcal{U}_\alpha$ и за све $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ који задовољавају $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$ важи*

$$\sum_{j,k=1}^{n} c(T_j, T_k)\overline{\lambda_j}\lambda_k \geq 0. \tag{1.11}$$

Примедба 1.15. Како је функција коваријације условно позитивно дефинитна, може јој се придружити одговарајући Хилбертов простор и индекс E_0-полугрупе α се дефинише као његова димензија. Детаљније, нека је $\mathbb{C}_0\mathcal{U}_\alpha$ комплексни векторски простор чији су елементи функције $f : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{C}$ које су различите од нуле у коначно много тачака и за које важи $\sum_{x \in \mathcal{U}_\alpha} f(x) = 0$. Пресликавање

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x,y \in \mathcal{U}_\alpha} c(x, y)\overline{f(x)}g(y)$$

је сесквилинеарна форма (линеарна по другој и конјуговано линеарна по првој промењљивој), позитивно полудефинитна јер је c условно позитивно дефинитна функција. Према томе, она може представљати скаларни производ на $\mathcal{U}_\alpha/N$, где је N скуп свих функција $f \in \mathbb{C}_0\mathcal{U}_\alpha$ за које је $\langle f, f \rangle = 0$. Комплетирање пред-Хилбертовог простора $\mathcal{U}_\alpha/N$ у норми индукованој тим скаларним производом је Хилбертов простор $H(\mathcal{U}_\alpha)$.

Дефиниција 1.16. Нека је α E_0-полугрупа. Ако је $\mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$, онда

$$\mathrm{ind}(\alpha) = \dim H(\mathcal{U}_\alpha).$$

Ако је $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$, онда $\mathrm{ind}(\alpha) = c$ (кардиналност континуума).

Примедба 1.17. Уколико је за E_0-полугрупу α скуп јединица $\mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$, на основу [2, Став 2.5.7] Хилбертов простор $H(\mathcal{U}_\alpha)$ је сепарабилан. Према томе, могуће вредности индекса су

$$0, 1, 2, \ldots, \infty = \aleph_0, 2^{\aleph_0},$$

при чему је индекс једнак $2^{\aleph_0}$ ако и само ако полугрупа нема јединице. Ако је α полугрупа аутоморфизама на $B(H)$, онда $\mathrm{ind}(\alpha) = 0$.

Важно својство индекса дато је у следећем ставу ([2, Став 2.5.5]):

Став 1.18. *Нека је α E_0-полугрупа која делује на $B(H)$ и нека је β коциклична пертурбација од α. Тада је* $\operatorname{ind}(\beta) = \operatorname{ind}(\alpha)$.

Доказ. Нека је $\{U_t| \ t \geq 0\}$ коцикл полугрупе α за који је $\beta_t(A) = U_t \alpha_t(A) U_t^*$. За свако $T \in \mathcal{U}_\alpha$ дефинишемо фамилију оператора $\omega(T) = \{\omega(T)(t)| \ t \geq 0\}$, где је $\omega(T)(t) = U_t T(t)$. За $s, t \geq 0$ важи

$$\omega(T)(s+t) = U_{s+t} T(s+t) = U_s \alpha_s(U_t) T(s) T(t) = U_s T(s) U_t T(t),$$

одакле следи да је $\omega(T)$ полугрупа. Она је, заправо, јединица за β јер за све $t \geq 0$ и $A \in B(H)$ видимо да је

$$\beta_t(A) \omega(T)(t) = U_t \alpha_t(A) U_t^* U_t T(t) = U_t \alpha_t(A) T(t) = U_t T(t) A.$$

Према томе, ω је пресликавање из $\mathcal{U}_\alpha$ у $\mathcal{U}_\beta$. Очигледно је инјективно, а сурјективност следи због тога што ако је $R = \{R(t)| \ t \geq 0\}$ јединица за β, онда се на сличан начин може показати да је $T(t) = U_t^* R(t)$ јединица за α и да је $\omega(T) = R$.
За $t \geq 0$ важи

$$e^{tc_\beta(\omega(S), \omega(T))} 1 = \omega(T)(t)^* \omega(S)(t) = (U_t T(t))^* U_t S(t) =$$

$$= T(t)^* S(t) = e^{tc_\alpha(S,T)} 1,$$

тј.

$$c_\beta(\omega(S), \omega(T)) = c_\alpha(S,T), \quad S, T \in \mathcal{U}_\alpha. \tag{1.12}$$

Бијекција $\omega : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\beta$ индукује линеарни изоморфизам векторских простора

$$\mathbb{C}_0 \mathcal{U}_\beta \ni f \mapsto f \circ \omega \in \mathbb{C}_0 \mathcal{U}_\alpha$$

који се, на основу (1.12), може начинити унитарним оператором из $H(\mathcal{U}_\beta)$ у $H(\mathcal{U}_\alpha)$ кад год су $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}_\beta$ непразни.

□

Дакле, да би се рачунао индекс E_0-полугрупе, потребно је одредити њен скуп јединица, функцију коваријације и димензију придруженог Хилбертовог простора. За све то, најбоље је детаљно описати систем производа који је придружен E_0-полугрупи.

У следећем примеру наводимо како изгледају јединице и индекс CCR тока.

Пример 1.19. Нека је $d \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ и нека је K Хилбертов простор димензије d. Посматрајмо Хилбертов простор $L^2((0,\infty),K)$ као простор квадратно-интеграбилних функција са вредностима у K. За интервал $B \subset (0,\infty)$, $L^2(B,K)$ је потпростор од $L^2((0,\infty),K)$ који се састоји од свих функција једнаких нули скоро свуда ван скупа B.

Нека је α^S CCR ток ранга d који делује на $B\left(e^{L^2((0,\infty),K)}\right)$ (S је шифт-полугрупа индекса d која делује на $L^2((0,\infty),K)$ као у (1.4)). Конкретан систем производа који одговара E_0-полугрупи α^S је $\mathcal{E}_{\alpha^S}$ чије су фибре

$$\mathcal{E}_{\alpha^S}(t) = \left\{T \in B\left(e^{L^2((0,\infty),K)}\right) \mid \alpha_t^S(A)T = TA,\ \forall A \in B\left(e^{L^2((0,\infty),K)}\right)\right\},\ t > 0.$$

За фиксирано $t > 0$, ортогонална декомпозиција

$$L^2((0,\infty),K) = L^2((0,t),K) \oplus L^2([t,\infty),K)$$

даје идентификацију

$$e^{L^2((0,\infty),K)} = e^{L^2((0,t),K)} \otimes e^{L^2([t,\infty),K)} \tag{1.13}$$

и важи ([2, Став 2.6.1]):

Став 1.20. *Нека је $t > 0$. За свако $f \in e^{L^2((0,t),K)}$ постоји јединствени ограничени оператор T_f на симетричном Фоковом простору $e^{L^2((0,\infty),K)}$, дефинисан на векторима $\{\exp(g) \mid g \in L^2((0,\infty),K)\}$ који га разапињу као*

$$T_f(\exp(g)) = f \otimes \exp(S_t g),\ t \geq 0,\ g \in L^2((0,\infty),K).$$

Пресликавање $f \mapsto T_f$ је унитаран оператор из $e^{L^2((0,t),K)}$ на $\mathcal{E}_{\alpha^S}(t)$. $\square$

За $\zeta \in K$ нека су оператори $U^\zeta(t) \in B\left(e^{L^2((0,\infty),K)}\right)$, $t \geq 0$ дефинисани

$$U^\zeta(t)(\exp(f)) = \exp(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta + S_t f),\ f \in L^2((0,\infty),K), \tag{1.14}$$

где је $\chi_{(0,t)} \otimes \zeta$ функција у $L^2((0,\infty),K)$ која је једнака ζ за $0 < x < t$, док је нула за $x \geq t$. На основу (1.13) важи $U^\zeta(t) = T_{\exp(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta)}$ и, према Ставу 1.20, $U^\zeta(t) \in \mathcal{E}_{\alpha^S}(t),\ t > 0$. На основу (1.14) видимо да је $U^\zeta(t)$ јако непрекидно по t као и да важи полугрупни услов $U^\zeta(s+t) = U^\zeta(s)U^\zeta(t)$, пошто приметимо да је за $s,t \geq 0$

$$\chi_{(0,s+t)} \otimes \zeta = \chi_{(0,s)} \otimes \zeta + S_s(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta).$$

Према томе, полугрупе $U^{\zeta},\ \zeta \in K$ су јединице CCR тока α^S.

За јединицу U CCR тока α_S кажемо да је нормализована ако је

$$U^0(t)^*U(t) = 1,\ t \geq 0,$$

што је еквивалентно са тим да је $c(U, U^0) = 0$.

Све јединице $U^{\zeta},\ \zeta \in K$ су нормализоване. Наиме, према Ставу 1.20 и (1.2), за $t \geq 0$ и $\omega, \zeta \in K$ важи

$$\begin{aligned} U^{\omega}(t)^*U^{\zeta}(t) &= \left\langle T_{\exp(\chi_{(0,t)}\otimes\zeta)}, T_{\exp(\chi_{(0,t)}\otimes\omega)} \right\rangle_{\mathcal{E}_{\alpha^S(t)}} 1 = \\ &= \left\langle \exp(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta), \exp(\chi_{(0,t)} \otimes \omega) \right\rangle_{e^{L^2((0,t),K)}} 1 = \\ &= e^{\left\langle \chi_{(0,t)}\otimes\zeta, \chi_{(0,t)}\otimes\omega \right\rangle_{L^2((0,t),K)}} 1 = e^{t\langle \zeta,\omega\rangle_K} 1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

и, узимајући $\omega = 0$, добијамо $U^0(t)^*U^{\zeta}(t) = 1$.

Свака јединица U E_0-полугрупе α^S мора бити облика

$$U(t) = e^{at}V(t),\ t \geq 0,$$

где је V нормализована јединица и $a \in \mathbb{C}$. Заиста, за произвољну јединицу U важи

$$U^0(t)^*U(t) = e^{tc(U,U^0)}1,\ t \geq 0,$$

одакле видимо да можемо узети $a = c(U, U^0)$ и $V(t) = e^{-at}U(t)$ (што је нормализована јединица) тако да важи $U(t) = e^{at}V(t)$.

На основу [2, Лема 2.6.8], свака нормализована јединица U E_0-полугрупе α^S мора бити облика $U = U^{\zeta}$ за неко $\zeta \in K$.

Коначно, у [2, Теорема 2.6.4] може се видети да су све јединице CCR тока α^S заправо полугрупе

$$U^{(a,\zeta)} = \{e^{at}U^{\zeta}(t) |\ t \geq 0\},\ (a, \zeta) \in \mathbb{C} \times K,$$

тј. пресликавање $(a, \zeta) \mapsto U^{(a,\zeta)}$ је бијекција између $\mathbb{C}\times K$ и скупа јединица CCR тока α^S. Такође, показано је да је функција коваријације $c : \mathcal{U}_{\alpha^S} \times \mathcal{U}_{\alpha^S} \to \mathbb{C}$

дата као

$$c(U^{(a,\zeta)}, U^{(b,\omega)}) = \overline{a} + b + \langle \zeta, \omega \rangle_K \,,$$

као и да је Хилбертов простор, придружен овој функцији коваријације, изоморфан са K, тј. $\operatorname{ind}(\alpha^S) = d$.

1.4 Класификација E_0-полугрупа

E_0-полугрупе су класификоване у три типа I, II, III. E_0-полугрупе типа I су потпуно изучене. Наиме, оне морају бити коцикличне пертурбације CAR/CCR токова и, као такве, класификоване су својим нумеричким индексом до на коцикличну конјугованост. Уколико се изузме случај полугрупа аутоморфизама (где је индекс једнак нули), постоји фамилија различитих класа коцикличне конјугације типа I параметризованих са $1, 2, \ldots, \infty$. Што се тиче E_0-полугрупа типа II, зна се да постоје примери индекса $1, 2, \ldots, \infty$. Такође је познато да постоји континуум примера E_0-полугрупа типа III које нису узајамно коциклично конјуговане [28].

Дефиниција 1.21. E_0-полугрупа α је просторна ако је $\mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$.

Дефиниција 1.22. Просторна E_0-полугрупа α која делује на $B(H)$ је потпуно просторна уколико је за свако $t > 0$ Хилбертов простор $\mathcal{E}_\alpha(t)$ затворење линеарног омотача скупа коначних производа $U^1(t_1) \cdots U^n(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $U^i \in \mathcal{U}_\alpha$, $t_i > 0$ и $t_1 + \cdots + t_n = t$.

Потпуно просторне E_0-полугрупе су оне које имају "довољно много" јединица.

Пример 1.23. Сви CCR токови су потпуно просторне E_0-полугрупе.

Сада наводимо појам разложивих E_0-полугрупа.

Дефиниција 1.24. Оператор $T \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ је разложив ако за све $0 < s < t$ постоје оператори $A \in \mathcal{E}_\alpha(s)$, $B \in \mathcal{E}_\alpha(t-s)$ тако да $T = AB$.

Примери разложивих оператора у $\mathcal{E}_\alpha(t)$ су коначни производи облика

$$T = U^1(t_1) \cdots U^n(t_n),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $U^i \in \mathcal{U}_\alpha$, $t_i > 0$ и $t_1 + \cdots + t_n = t$. Наравно, разложиви оператори не морају да буду овог облика. Заправо, постојање разложивог оператора не подразумева да јединице уопште постоје.

Сваки разложив оператор $T \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ је коначно разложив у смислу да ако су $t_1, \ldots, t_n$ позитивни бројеви такви да је $t_1 + \cdots + t_n = t$, онда постоје оператори $T_1 \in \mathcal{E}_\alpha(t_1), \ldots, T_n \in \mathcal{E}_\alpha(t_n)$ такви да је $T = T_1 T_2 \cdots T_n$.

Дефиниција 1.25. E_0-полугрупа α која делује на $B(H)$ је разложива ако за свако $t > 0$, $\mathcal{D}_\alpha(t)$ разапиње Хилбертов простор $\mathcal{E}_\alpha(t)$, где је $\mathcal{D}_\alpha(t)$ скуп свих разложивих оператора у $\mathcal{E}_\alpha(t)$.

Дефиниција 1.26. E_0-полугрупа α је типа I уколико је разложива. Она је типа II ако није разложива и постоји $t_0 > 0$ такво да $\mathcal{D}_\alpha(t_0) \neq \{0\}$, док је типа III ако нема разложивих оператора различитих од нуле.

На основу [2, Теорема 2.7.7], за било коју E_0-полугрупу α важи еквиваленција:

1. α је разложива.

2. α је потпуно просторна.

3. α је конјугована коцикличној пертурбацији CAR/CCR тока.

Према поменутој теореми, тип E_0-полугрупа се може дефинисати и на другачији начин: E_0-полугрупа α је типа I уколико је потпуно просторна. Она је типа II уколико је просторна, али не и потпуно просторна, док је типа III уколико нема јединица.

2 Системи производа Хилбертових простора

Како је поменуто у Теореми 1.12, класа коцикличне конјугације E_0-полугрупе је потпуно одређена на основу структуре придруженог (конкретног) система производа. Према томе, класификација E_0-полугрупа према коцикличној конјугованости би могла да се изведе помоћу изучавања теорије система производа Хилбертових простора. Погодна теорија би била она у којој свакој E_0-полугрупи одговара систем производа који је инваријантан у односу на коцикличну конјугованост полугрупа и, такође, у тој теорији би требало да важи да је сваки систем производа придружен некој E_0-полугрупи. У том случају, класе изоморфизама система производа Хилбертових простора дају потпун опис класа коцикличне конјугације E_0-полугрупа. Дакле, проблем класификације E_0-полугрупа према коцикличној конјугованости се своди на проблем класификације одговарајућих система производа.

Дефиниција 2.1. Систем производа је фамилија сепарабилних Хилбертових простора $p : E \to (0, \infty)$ над $(0, \infty)$, где је

$$E = \{(t, x)|\ t > 0,\ x \in E_t\},\ p(t, x) = t$$

и фибре су Хилбертови простори $E_t = p^{-1}(t)$. E је снабдевено асоцијативним множењем

$$(t, x) \cdot (s, y) = (t + s, xy), \quad x \in E_t,\ y \in E_s$$

које се на фибрама своди на билинеарно пресликавање

$$(x, y) \in E_s \times E_t \mapsto xy \in E_{s+t}, \quad s, t > 0$$

и делује као тензорско множење у смислу да је

$$E_{s+t} = \overline{\text{span}}\ (E_s E_t), \quad s, t > 0,$$

$$\langle xy, x'y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle\,, \quad x, x' \in E_s,\ y, y' \in E_t.$$

E има структуру стандардног Бореловог простора и постоји сепарабилан Хилбертов простор H такав да је

$$E \cong (0, \infty) \times H,$$

где $\cong$ представља изоморфизам мерљивих фамилија Хилбертових простора.

Дефиниција 2.2. Морфизам система производа E и F је

$$\theta : E \to F,$$

$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ $(x, y \in E)$ и $\theta_t : E_t \to F_t$ је ограничен линеаран оператор за свако $t > 0$.

Морфизам θ је изоморфизам ако је θ_t унитаран оператор за свако $t > 0$.

Морфизам θ је компактан ако је θ_t компактан оператор за свако $t > 0$.

На основу ([2, Теорема 4.10.3]), за сваки (апстрактни) систем производа E, постоји E_0-полугрупа α тако да је E изоморфно конкретном систему производа $\mathcal{E}_\alpha$.

2.1 Јединице и индекс

У Потпоглављу 1.3 наведено је да Арвесон дефинише индекс E_0-полугрупе као димензију одговарајућег Хилбертовог простора који је конструисан помоћу јединица полугрупе. Сличан поступак се примењује и за дефинисање индекса система производа.

Дефиниција 2.3. Нека је E систем производа. Јединица у E је мерљиво сечење $(0, \infty) \ni t \mapsto u(t) \in E_t$, такво да је

$$u(s + t) = u(s)u(t), \quad s, t > 0$$

и постоји $t_0 > 0$ за које је $u(t_0) \neq 0$. Скуп јединица система производа E се означава $\mathcal{U}_E$.

Према ([2, Став 3.6.2]), за сваке две јединице $u, v \in \mathcal{U}_E$ постоји јединствено $c_E(u, v) \in \mathbb{C}$ које задовољава

$$\langle u(t), v(t)\rangle = e^{tc_E(u,v)}, \ t > 0. \tag{2.1}$$

Функција $c_E : \mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_E \to \mathbb{C}$ је функција коваријације система производа E. Слично као у Потпоглављу 1.3, функција c_E је условно позитивно дефинитна и може се искористити за конструкцију Хилбертовог простора $H(\mathcal{U}_E, c_E)$ (као што је урађено за конкретне системе производа везане за E_0-полугрупе). Тај Хилбертов простор је, такође, сепарабилан.

Дефиниција 2.4. Индекс система производа E, у ознаци $\operatorname{ind} E$, је димензија Хилбертовог простора $H(\mathcal{U}_E, c_E)$ уколико је $\mathcal{U}_E \neq \emptyset$, док је $\operatorname{ind} E = 2^{\aleph_0}$ ако је $\mathcal{U}_E = \emptyset$.

Важи [2, Став 3.6.5]:

Став 2.5. *За сваку E_0-полугрупу α је*

$$\operatorname{ind}(\alpha) = \operatorname{ind} \mathcal{E}_\alpha,$$

где је $\mathcal{E}_\alpha$ конкретан систем производа придружен полугрупи α.

2.2 Експоненцијални систем производа

Најједноставнији примери система производа Хилбертових простора су они придружени CAR/CCR токовима. Овде их укратко описујемо.

Нека је $N \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ и нека је K Хилбертов простор димензије N. Уочимо симетричан Фоков простор $e^{L^2((0,\infty),K)}$ (1.1). За свако $t > 0$, нека је E_t Хилбертов простор

$$E_t = e^{L^2((0,t),K)} \subseteq e^{L^2((0,\infty),K)}.$$

Посматрајмо фамилију Хилбертових простора $p : E_N \to (0, \infty)$, дефинисану

$$E_N = \{(t, x) |\ t > 0,\ x \in E_t\}, \quad p(t, x) = t.$$

Шифт-полугрупа $S = \{S_t |\ t \geq 0\}$ (1.4) која делује на $L^2((0, \infty), K)$ индукује полугрупу изометрија

$$U_t = \Gamma(S_t) : e^{L^2((0,\infty),K)} \to e^{L^2([t,\infty),K)},\ t \geq 0,$$

дефинисаних

$$\Gamma(S_t)(\exp(g)) = \exp(S_t g),\ g \in L^2((0, \infty), K).$$

Како U_s пресликава $e^{L^2((0,t),K)}$ у $e^{L^2((s,s+t),K)}$ и како, на основу (1.3), важи

$$e^{L^2((0,s+t),K)} = e^{L^2((0,s),K)} \otimes e^{L^2((s,s+t),K)},$$

множење у E_N се дефинише

$$(s,f)\cdot(t,g) = (s+t, f\otimes U_s g), \quad f \in e^{L^2((0,s),K)},\ g \in e^{L^2((0,t),K)}.$$

На основу [2, Став 3.1.5], E_N је систем производа који је изоморфан конкретном систему производа CCR тока ранга N, тј. E_0-полугрупе која делује на $B\left(e^{L^2((0,\infty),K)}\right)$ (K је Хилбертов простор димензије N). Наиме, нека је α CCR ток ранга N који делује на $B\left(e^{L^2((0,\infty),K)}\right)$. За свако $t > 0$ и $f \in L^2((0,t),K)$, нека је T_f оператор у $\mathcal{E}_\alpha(t)$, дефинисан у Ставу 1.20. Пресликавање $\theta : E_N \to \mathcal{E}_\alpha$, дефинисано са

$$\theta : (t,f) \mapsto (t, T_f),$$

је изоморфизам који је унитаран на фибрама

$$\theta_t : E_N(t) \to \mathcal{E}_\alpha(t), \quad t > 0$$

и задовољава $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ за све $x, y \in E_N$. Све то следи директно из Става 1.20, као и на основу дефиниције множења у оба система производа.

Дефиниција 2.6. За свако $N \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$, E_N се зове експоненцијални систем производа ранга N.

Пошто је за $f \in E_s$ и $g \in E_t$ множење дефинисано

$$f \cdot g = f \otimes U_s g,$$

видимо да је за $\zeta \in K$

$$\exp\left(\chi_{(0,s)} \otimes \zeta\right) \cdot \exp\left(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta\right) = \exp\left(\chi_{(0,s+t)} \otimes \zeta\right)$$

па је $u(t) = \exp\left(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta\right),\ t > 0$ јединица у E_N.

Како се E_N идентификује са конкретним системом производа CCR тока ранга N, произвољна јединица система производа E_N је облика

$$u^{(a,\zeta)}(t) = e^{ta} \exp\left(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta\right),\ t > 0,$$

где $a \in \mathbb{C}$ и $\zeta \in K$.
Ако се још искористи формула (1.2), добијамо

$$\left\langle \exp\left(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta\right), \exp\left(\chi_{(0,t)} \otimes \omega\right)\right\rangle_{E_t} = e^{t\langle\zeta,\omega\rangle_K},\ t > 0$$

па видимо да је функција коваријације за E_N

$$c_{E_N}\left(u^{(a,\zeta)}, u^{(b,\omega)}\right) = \overline{a} + b + \langle\zeta,\omega\rangle_K .$$

2.3 Адитивност индекса

У овом потпоглављу наводимо Арвесонове резултате везане за адитивност индекса E_0-полугрупа, као и индекса система производа Хилбертових простора ([2, Теорема 3.7.6]):

Теорема 2.7. *За свака два система производа E и F важи*

$$\operatorname{ind}(E \otimes F) = \operatorname{ind} E + \operatorname{ind} F. \tag{2.2}$$

За сваке две E_0-полугрупе α и β важи

$$\operatorname{ind}(\alpha \otimes \beta) = \operatorname{ind}(\alpha) + \operatorname{ind}(\beta). \tag{2.3}$$

Пре него што дамо доказ поменуте теореме, наведимо неке помоћне резултате и разматрања.

Нека су α и β E_0-полугрупе које делују редом на $B(H)$ и $B(K)$. Тензорски производ $\alpha\otimes\beta$ је јединствена E_0-полугрупа која делује на $B(H\otimes K)$, дефинисана

$$(\alpha \otimes \beta)_t : A \otimes B \mapsto \alpha_t(A) \otimes \beta_t(B), \quad A \in B(H), B \in B(K),\ t \geq 0.$$

Нека су $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_\beta$ конкретни системи производа полугрупа α и β. За свако $t > 0$ посматрајмо простор

$$\mathcal{E}_\alpha(t) \otimes \mathcal{E}_\beta(t) = \overline{\operatorname{span}}\{A \otimes B|\ A \in \mathcal{E}_\alpha(t), B \in \mathcal{E}_\beta(t)\}$$

где је затворење у односу на операторску норму. Фамилија простора

$$\mathcal{E}_\alpha \otimes \mathcal{E}_\beta = \{(t, C) |\ t > 0,\ C \in \mathcal{E}_\alpha(t) \otimes \mathcal{E}_\beta(t)\}$$

се зове просторни тензорски производ конкретних система производа $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_\beta$. Важи [2, Став 3.5.2]:

Став 2.8. *Нека су α и β E_0-полугрупе. Систем производа E_0-полугрупе $\alpha \otimes \beta$ је просторни тензорски производ конкретних система производа $\mathcal{E}_\alpha \otimes \mathcal{E}_\beta$.*

Доказ. Претпоставимо да α и β делују на $B(H)$ и $B(K)$, редом. За свако $t > 0$, $\mathcal{E}_\alpha(t) \otimes \mathcal{E}_\beta(t)$ је потпростор у $\mathcal{E}_{\alpha\otimes\beta}(t)$ који је затворен у норми простора $\mathcal{E}_{\alpha\otimes\beta}(t)$. Према томе, довољно је да се покаже да ако је оператор $R \in \mathcal{E}_{\alpha\otimes\beta}(t)$ ортогоналан на све $S \otimes T$ ($S \in \mathcal{E}_\alpha(t)$, $T \in \mathcal{E}_\beta(t)$), онда је $R = 0$. За такве R, S, T је

$$R^*(S \otimes T) = \langle S \otimes T, R\rangle_{\mathcal{E}_{\alpha\otimes\beta}(t)} 1 = 0,$$

тј. R^* има вредност нула на потпростору у $H \otimes K$ који је разапет сликама свих оператора $S \otimes T$. Како су α и β E_0-полугрупе, $\alpha_t(1) = 1$ и $\beta_t(1) = 1$ за свако $t \geq 0$. Такође, како је $\alpha_t(1)$ пројектор на потпростор $[\mathcal{E}_\alpha(t)H]$ у H, видимо да је $[\mathcal{E}_\alpha(t)H] = H$ и, слично, $[\mathcal{E}_\beta(t)K] = K$. Дакле, $H \otimes K$ је разапет сликама свих оператора $S \otimes T$ па следи $R = 0$.

□

Наводимо још важан Арвесонов резултат у Теореми 2.9 ([2, Теорема 3.7.2]) и у Последици 2.10 ([2, Последица 3.7.3]):

Теорема 2.9. *Нека су E и F системи производа и нека је $\theta : E \to F$ компактни морфизам такав да је $\theta_{t_0} \neq 0$ за неко $t_0 > 0$. Тада постоје јединице $u \in \mathcal{U}_E$ и $v \in \mathcal{U}_F$ такве да је θ облика*

$$\theta_t(x) = \langle x, u_t\rangle\, v_t, \quad x \in E_t,\ t > 0.$$

Дакле, сваки компактни морфизам система производа је ранга 1.

Нека су E и F системи производа. Може се формирати њихов тензорски производ

$$E \otimes F = \{(t, x) |\ t > 0,\ x \in E_t \otimes F_t\},$$

који је такође систем производа и на елементарним тензорима $x \otimes y \in E_s \otimes F_s$, $x' \otimes y' \in E_t \otimes F_t$ множење је дефинисано

$$(x \otimes y, x' \otimes y') \mapsto xx' \otimes yy' \in E_{s+t} \otimes F_{s+t}.$$

За јединице $u \in \mathcal{U}_E$ и $v \in \mathcal{U}_F$, формира се јединица $u \otimes v \in \mathcal{U}_{E \otimes F}$ на следећи начин:

$$(u \otimes v)_t = u_t \otimes v_t, \quad t > 0.$$

Последица 2.10. *Нека су E и F системи производа. Свака јединица система производа $E \otimes F$ је облика $u \otimes v$ за неке $u \in \mathcal{U}_E,\ v \in \mathcal{U}_F$. Заправо, $\mathcal{U}_{E \otimes F} \neq \emptyset$ ако и само ако $\mathcal{U}_E \neq \emptyset$ и $\mathcal{U}_F \neq \emptyset$.*

Доказ. Нека је $\overline{F}$ конјуговани систем производа за F, тј. $\overline{F}$ се састоји од исте фамилије Хилбертових простора као и F, множења у F и $\overline{F}$ су иста, а скаларно множење на фибрама је дато као $\overline{\lambda} x$ за $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x \in \overline{F}_t$. Идентичко преслика-вање $F \ni x \mapsto \overline{x} \in \overline{F}$ чува множење и рестрикција на фибрама $F_t \to \overline{F}_t$ је антиунитарно преликавање, тј. скаларни производ у $\overline{F}_t$ је

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\overline{F}_t} = \langle y, x \rangle_{F_t}.$$

Нека је $\omega = \{\omega_t |\ t > 0\}$ јединица у $E \otimes F$. Ограничено пресликавање

$$(x, y) \in E_t \times F_t \mapsto \langle x \otimes y, \omega_t \rangle_{E_t \otimes F_t}$$

може да се види као сесквилинеарна форма на $E_t \times \overline{F}_t$. Према томе, постоји јединствени ограничени линеарни оператор $\theta_t : E_t \to \overline{F}_t$ такав да је

$$\langle \theta_t(x), \overline{y} \rangle_{\overline{F}_t} = \langle x \otimes y, \omega_t \rangle_{E_t \otimes F_t}, \quad x \in E_t,\ y \in F_t. \tag{2.4}$$

Пресликавање $\theta : E \to \overline{F}$ је морфизам. Заиста, θ представља фамилију ограничених линеарних оператора која је мултипликативна јер ако су $x \in E_s$, $x' \in E_t$, тада за сваки вектор облика $yy' \in F_{s+t}$ ($y \in F_s$, $y' \in F_t$) важи

$$\left\langle \theta_{s+t}(xx'), \overline{yy'} \right\rangle = \langle xx' \otimes yy', \omega_{s+t} \rangle = \langle (x \otimes y)(x' \otimes y'), \omega_s \omega_t \rangle =$$

$$= \langle x \otimes y, \omega_s \rangle \langle x' \otimes y', \omega_t \rangle = \langle \theta_s(x), \overline{y} \rangle \left\langle \theta_t(x'), \overline{y'} \right\rangle = \left\langle \theta_s(x)\theta_t(x'), \overline{yy'} \right\rangle.$$

Тврђење следи зато што $F_s F_t$ разапиње F_{s+t}.

Сада показујемо да је свако θ_t Хилберт-Шмитов оператор. Уколико изаберемо ортонормиране базе $\{x_m|\ m \in \mathbb{N}\}$ за E_t и $\{y_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ за F_t, видимо да је

$$\sum_m \|\theta_t(x_m)\|^2 = \sum_{m,n} |\left\langle \theta_t(x_m), \overline{y}_n \right\rangle|^2 = \sum_{m,n} |\left\langle x_m \otimes y_n, \omega_t \right\rangle|^2 = \|\omega_t\|^2 < \infty$$

јер је $\{x_m \otimes y_n|\ m, n \in \mathbb{N}\}$ ортонормирана база за $E_t \otimes F_t$. Дакле, θ је компактни морфизам.

На основу Теореме 2.9 и чињенице да је свака јединица у $\overline{F}$ облика $\{\overline{v}_t|\ t > 0\}$, где је v јединица у F, закључујемо да постоје јединице $u \in \mathcal{U}_E$ и $v \in \mathcal{U}_F$ такве да

$$\theta_t(x) = \left\langle x, u_t \right\rangle \overline{v}_t, \quad x \in E_t,\ t > 0.$$

Заменом у (2.4) добијамо

$$\left\langle \left\langle x, u_t \right\rangle \overline{v}_t, \overline{y} \right\rangle = \left\langle x \otimes y, \omega_t \right\rangle, \quad x \in E_t,\ y \in F_t.$$

Лева страна је

$$\left\langle x, u_t \right\rangle_{E_t} \left\langle \overline{v}_t, \overline{y} \right\rangle_{\overline{F}_t} = \left\langle x, u_t \right\rangle_{E_t} \left\langle y, v_t \right\rangle_{F_t} = \left\langle x \otimes y, u_t \otimes v_t \right\rangle,$$

одакле следи $\omega_t = u_t \otimes v_t$. □

За доказ Теореме 2.7 потребни су још неки помоћни резултати везани за својства условно позитивно дефинитних функција коваријације.

Дефиниција 2.11. Функција коваријације је уређени пар (X, a) где је X непразан скуп и $a : X \times X \to \mathbb{C}$ је условно позитивно дефинитна функција (1.11).

За функције коваријације (X, a) и (Y, b), директна сума је дефинисана као функција коваријације $(X \times Y, a \oplus b)$, где је $a \oplus b$ условно позитивно дефинитна функција дефинисана на скупу $(X \times Y) \times (X \times Y)$ као

$$(a \oplus b)((x, y), (x', y')) = a(x, x') + b(y, y').$$

До сада смо већ видели начин на који се свакој функцији коваријације (X, a) може придружити Хилбертов простор $H(X, a)$ (Примедба 1.15). У вези са тим важи [2, Лема 3.7.5]:

Лема 2.12. *Нека су (X, a), (Y, b) функције коваријације.*

1. *Ако постоји сурјективна функција $\theta : X \to Y$ таква да за све $x, y \in X$ важи $b(\theta(x), \theta(y)) = a(x, y)$, онда је*

$$\dim H(X, a) = \dim H(Y, b).$$

2. *Нека је $(X \times Y, a \oplus b)$ директна сума функција коваријације (X, a) и (Y, b). Тада је*

$$\dim H(X \times Y, a \oplus b) = \dim H(X, a) + \dim H(Y, b).$$

Доказ. (1) Посматрајмо позитивно полудефинитна пресликавања, линеарна по другој и конјуговано линеарна по првој промењивој, дефинисана

$$\langle f, g \rangle_X = \sum_{x,y \in X} \overline{f(x)} g(y) a(x, y), \quad f, g \in \mathbb{C}_0 X,$$

$$\langle h, k \rangle_Y = \sum_{u,v \in Y} \overline{h(u)} k(v) b(u, v), \quad h, k \in \mathbb{C}_0 Y.$$

Ова пресликавања су скаларни производи на одговарајућим количничким просторима векторских простора $\mathbb{C}_0 X$ и $\mathbb{C}_0 Y$. Слично као у Примедби 1.15, добијају се Хилбертови простори $H(X, a)$ и $H(Y, b)$ након комплетирања количничких простора у односу на норму индуковану одговарајућим скаларним производом. Нека је дато линеарно пресликавање

$$W(f) = \sum_{x \in X} f(x) \delta_{\theta(x)}, \quad f \in \mathbb{C}_0 X,$$

где је $\delta_y(z) = 1$ за $z = y$ и $\delta_y(z) = 0$ за $z \neq y$. Функција W пресликава $\mathbb{C}_0 X$ у $\mathbb{C}_0 Y$. Такође, W је сурјективно пресликавање:
Нека је $\mathbb{C}_0 Y \ni g \neq 0$ и нека је $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$ скуп тачака у којима је она различита од нуле. Изаберимо $x_1, \ldots, x_n \in X$ тако да је $\theta(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тада је $g = W(f)$, где је

$$f = \sum_{k=1}^{n} g(y_k) \delta_{x_k}.$$

Коначно, видимо да важи

$$\langle W(f), W(g) \rangle_Y = \sum_{y,y' \in Y} \sum_{\substack{\theta(x) = y \\ \theta(x') = y'}} \overline{f(x)} g(x') b(\theta(x), \theta(x')) =$$

$$= \sum_{y,y' \in Y} \sum_{\substack{\theta(x) = y \\ \theta(x') = y'}} \overline{f(x)} g(x') a(x,x') = \langle f, g \rangle_X$$

па је W унитаран оператор из $H(X,a)$ у $H(Y,b)$.

(2) Нека је V линеарно пресликавање скупа $\mathbb{C}_0(X \times Y)$ у директну суму векторских простора $\mathbb{C}_0 X$ и $\mathbb{C}_0 Y$, дефинисано као $V(f) = (f_1, f_2)$ за

$$f_1(x) = \sum_{y \in Y} f(x,y), \qquad f_2(y) = \sum_{x \in X} f(x,y).$$

Пресликавање V је сурјективно. Заиста, нека су фиксиране тачке $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Тада за свако $f \in \mathbb{C}_0 X$, $g \in \mathbb{C}_0 Y$ важи $V(h) = (f,g)$, где је $h \in \mathbb{C}_0(X \times Y)$ функција дефинисана

$$h(x,y) = g(y)\delta_{x_0}(x) + f(x)\delta_{y_0}(y).$$

Ако се искористи скаларни производ у $\mathbb{C}_0(X \times Y)$, дефинисан помоћу условно позитивно дефинитне функције $a \oplus b$, видимо да за $f, g \in \mathbb{C}_0(X \times Y)$ важи

$$\langle f, g \rangle_{H(X \times Y, a \oplus b)} = \langle f_1, g_1 \rangle_X + \langle f_2, g_2 \rangle_Y = \langle V(f), V(g) \rangle_{H(X,a) \oplus H(Y,b)}$$

па је V унитаран оператор из $H(X \times Y, a \oplus b)$ у $H(X,a) \oplus H(Y,b)$. □

Сада можемо доказати Теорему 2.7:

Доказ. Ако се узму у обзир Став 2.8 и Став 2.5, видимо да је довољно да докажемо (2.2). Претпоставимо прво да је један од скупова $\mathcal{U}_E$, $\mathcal{U}_F$ празан. Тада је један од $\operatorname{ind} E$, $\operatorname{ind} F$ једнак кардиналности континуума па је такав и $\operatorname{ind} E + \operatorname{ind} F$. Са друге стране, према Последици 2.10, $\mathcal{U}_{E \otimes F}$ је такође празан па је и $\operatorname{ind}(E \otimes F)$ једнак кардиналности континуума.
Дакле, можемо претпоставити $\mathcal{U}_E \neq \emptyset$ и $\mathcal{U}_F \neq \emptyset$. Нека су c_E и c_F функције коваријације за E и F и нека је $\theta : \mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_F \to \mathcal{U}_{E \otimes F}$ пресликавање дефинисано

$$\theta(u,v) = u \otimes v, \quad u \in \mathcal{U}_E,\ v \in \mathcal{U}_F.$$

Пресликавање θ је сурјективно (Последица 2.10) и важи

$$c_{E \otimes F}(\theta(u,v), \theta(u',v')) = c_E(u,u') + c_F(v,v'). \tag{2.5}$$

Заиста, за свако $t > 0$ је

$$e^{tc_{E\otimes F}(u\otimes v, u'\otimes v')} = \langle u_t \otimes v_t, u'_t \otimes v'_t \rangle = \langle u_t, u'_t \rangle \langle v_t, v'_t \rangle =$$

$$= e^{tc_E(u,u')} e^{tc_F(v,v')} = e^{t(c_E(u,u') + c_F(v,v'))},$$

одакле следи (2.5). Сада је, према Леми 2.12,

$$\dim H(\mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_F, c_E \oplus c_F) = \dim H(\mathcal{U}_{E\otimes F}, c_{E\otimes F})$$

и

$$\dim H(\mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_F, c_E \oplus c_F) = \dim H(\mathcal{U}_E, c_E) + \dim H(\mathcal{U}_F, c_F),$$

на основу чега важи (2.2).

□

2.4 Класификација (Арвесонових) система производа

Арвесонови системи производа су, до сада, класификовани помоћу својих јединица.

Најједноставнији пример Арвесоновог система је екпоненцијални систем производа, описан у Потпоглављу 2.2. Детаљније, то је систем производа E_N чије су фибре Хилбертови простори $E_t = \left(e^{L^2((0,t),K)}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$, где је K неки Хилбертов простор димензије N. E_N је генерисан својим јединицама (не постоји прави подсистем који садржи све јединице). Арвесонови системи са том особином су, по дефиницији, типа I. Арвесон је показао да произвољан систем производа типа I мора бити изоморфан конкретном систему производа CCR тока ранга N који делује на $B\left(e^{L^2((0,\infty);K)}\right)$, где је K Хилбертов простор димензије N. Димензија Хилбертовог простора K је индекс система производа и представља потпуну инваријанту Арвесонових система типа I.

Арвесонов систем је типа II ако има бар једну јединицу, али није типа I. Систем производа типа II садржи јединствени максимални подсистем типа I. Индекс система производа типа II је индекс максималног подсистема типа I. Познато је да постоји обиље узајамно неизоморфних система производа типа II

који имају исти индекс [29], [14]. Према томе, индекс није потпуна инваријанта система производа типа II.

Арвесонов систем производа је типа III уколико нема јединица. У [28], [30] доказано је да постоји бар континуум неизоморфних система производа типа III па се може закључити да постоји бар континуум E_0-полугрупа типа III које нису узајамно коциклично конјуговане.

3 Језгра

У овом поглављу наводимо основне резултате који се тичу (потпуно) позитивно дефинитних језгара са вредностима у C^*-алгебри, полугрупа таквих језгара као и њихових генератора (видети нпр. [6] или [24]).

На почетку наводимо дефиницију Хилбертовог и двостраног Хилбертовог C^*-модула.

Дефиниција 3.1. а) Хилбертов C^*-модул E над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ је десни $\mathcal{B}$-модул снабдевен скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathcal{B}$ који задовољава

- $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \beta \langle x, z\rangle\,,\quad x, y, z, \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C};$
- $\langle x, yb\rangle = \langle x, y\rangle\, b,\quad b \in \mathcal{B},\ x, y \in E;$
- $\langle x, x\rangle \geq 0,$
  $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,\quad x \in E;$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*,$
  одакле следи $\langle xb, y\rangle = b^* \langle x, y\rangle,\ x, y \in E,\ b \in \mathcal{B};$
- E је комплетан у односу на норму $\|\cdot\| = \sqrt{\|\langle\cdot,\cdot\rangle\|}$.

б) Хилбертов $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул E је Хилбертов $\mathcal{B}$-модул заједно са недегенерисаном $*$-репрезентацијом C^*-алгебре $\mathcal{B}$ помоћу елемената из $B^a(E)$. (Елементи C^*-алгебре $B^a(E)$ су ограничена пресликавања $f : E \to E$ таква да за свако f постоји $f^* : E \to E$ за које важи $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle\,,\ x, y \in E$. Према томе, та пресликавања су десно $\mathcal{B}$-линеарна). Ту репрезентацију, остварену помоћу канонског хомоморфизма $j : \mathcal{B} \to B^a(E)$, можемо звати "лево дејство" алгебре $\mathcal{B}$ на E ($bx = j(b)(x)$ за $b \in \mathcal{B}, x \in E$). Отуда важи и $\langle x, by\rangle = \langle b^*x, y\rangle\,,\ x, y \in E$.

Пример 3.2. C^*-алгебра $\mathcal{B}$ је тривијалан Хилбертов $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул са скаларним производом $\langle b, b'\rangle = b^*b'$.

3.1 Позитивно дефинитна језгра

Дефиниција 3.3. Језгро на скупу S са вредностима у C^*-алгебри $\mathcal{B}$ је пресликавање $k : S \times S \to \mathcal{B}$. Оно је позитивно дефинитно ако важи

$$\sum_{i,j} b_i^* k^{x_i,x_j} b_j \geq 0$$

за сваки избор коначно много $x_i \in S,\ b_i \in \mathcal{B}$.

[6, Став 3.1.3] цитирамо овде као

Став 3.4. *Нека је k позитивно дефинитно језгро на скупу S са вредностима у $\mathcal{B}$. Тада постоји пред-Хилбертов $\mathcal{B}$-модул E и пресликавање $i : S \to E$ за које важи*

$$k^{x,y} = \langle i(x), i(y) \rangle$$

и $E = \operatorname{span}(i(S)\mathcal{B})$. Штавише, ако је (E', i') још један пар са овим својствима, онда се пресликавање $i(x) \mapsto i'(x)$ проширује до изоморфизма $E \to E'$.

Дефиниција 3.5. Пар (E, i) је Колмогоровљева декомпозиција језгра k и E је његов Колмогоровљев модул.

3.2 Потпуно позитивно дефинитна језгра

За разлику од претходног потпоглавља, у овом посматрамо језгра са вредностима у скупу ограничених пресликавања на C^*-алгебри $\mathcal{B}$. Скуп $B(\mathcal{B})$ је такође једна C^*-алгебра у којој је множење заправо композиција пресликавања.

Дефиниција 3.6. Језгро на скупу S са вредностима у скупу ограничених пресликавања $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ је пресликавање $\mathcal{K} : S \times S \to B(\mathcal{B})$. $\mathcal{K}$ је потпуно позитивно дефинитно ако важи

$$\sum_{i,j} b_i^* \mathcal{K}^{x_i,x_j}(a_i^* a_j) b_j \geq 0$$

за сваки избор коначно много $x_i \in S,\ a_i, b_i \in \mathcal{B}$.

Резултате представљене у [6, Теорема 3.2.3] овде помињемо као

Теорема 3.7. *Нека је $\mathcal{K}$ потпуно позитивно дефинитно језгро на неком скупу S са вредностима у $B(\mathcal{B})$. Тада постоји контрактиван пред-Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул E (канонска репрезентација C^*-алгебре $\mathcal{B}$ на E је контракција, тј. лево дејство не повећава норму) и пресликавање $i : S \to E$ тако да важи*

$$\mathcal{K}^{x,y}(b) = \langle i(x), bi(y) \rangle$$

и $E = \operatorname{span}(\mathcal{B}i(S)\mathcal{B})$. Штавише, ако је (E', i') још један пар са овим особинама, онда се пресликавање $i(x) \mapsto i'(x)$ проширује до изоморфизма $E \to E'$.

Обрнуто, ако је E контрактиван пред-Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул и S скуп елемената из E, тада је $\mathcal{K}$, дефинисано као $\mathcal{K}^{x,y}(b) = \langle x, by \rangle$, потпуно позитивно дефинитно језгро.

Последица 3.8. *Језгро $\mathcal{K}$ је Ермитово, тј. важи $\mathcal{K}^{x,y}(b^*) = \mathcal{K}^{y,x}(b)^*$.*

Дефиниција 3.9. Пар (E, i) је Колмогоровљева декомпозиција језгра $\mathcal{K}$ и E је његов Колмогоровљев модул.

3.3 Полугрупе језгара

У овом потпоглављу наводимо дефиницију полугрупе потпуно позитивно дефинитних језгара, у ознаци CPD-полугрупа, као и резултат о узајамно једнозначној кореспонденцији између CPD-полугрупа и условно потпуно позитивно дефинитних језгара.

Дефиниција 3.10. Нека су $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ потпуно позитивно дефинитна језгра на скупу S са вредностима у $B(\mathcal{B})$. Шуров производ $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ је језгро

$$\mathcal{K} \circ \mathcal{L} : S \times S \to B(\mathcal{B}),\ (\mathcal{K} \circ \mathcal{L})(x,y) = (\mathcal{K} \circ \mathcal{L})^{x,y} \in B(\mathcal{B})$$

где је

$$(\mathcal{K} \circ \mathcal{L})^{x,y}(b) = \mathcal{K}^{x,y} \circ \mathcal{L}^{x,y}(b) = \mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{L}^{x,y}(b)),\ b \in \mathcal{B},\ x, y \in S.$$

Примедба 3.11. На основу Теореме 3.7, $\mathcal{K} \circ \mathcal{L}$ је такође потпуно позитивно дефинитно језгро.

Дефиниција 3.12. Фамилија $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ језгара на S са вредностима у $B(\mathcal{B})$ је (униформно непрекидна) Шурова полугрупа језгара ако за све $x, y \in S$, пресликавања $\mathcal{K}_t^{x,y}$ чине (униформно непрекидну) полугрупу на $\mathcal{B}$. (Униформно непрекидна) CPD-полугрупа језгара је (униформно непрекидна) Шурова полугрупа потпуно позитивно дефинитних језгара.

Дефиниција 3.13. Језгро $\mathcal{L}$ на S са вредностима у $B(\mathcal{B})$ је условно потпуно позитивно дефинитно ако је

$$\sum_{i,j} b_i^* \mathcal{L}^{x_i,x_j}(a_i^* a_j) b_j \geq 0$$

за сваки избор коначно много $x_i \in S,\ a_i, b_i \in \mathcal{B}$ таквих да важи $\sum\limits_i a_i b_i = 0$.

Веза између поменутих појмова дата је у [6, Теорема 3.4.7]:

Теорема 3.14. *Формула*

$$\mathcal{K}_t = e^{t\mathcal{L}}$$

(где се за вредност експоненцијалне функције користи Шуров производ језгара) остварује бијекцију између униформно непрекидних CPD*-полугрупа* $(\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *потпуно позитивно дефинитних језгара на* S *са вредностима у* $B(\mathcal{B})$ *и Ермитових условно потпуно позитивно дефинитних језгара на* S *са вредностима у* $B(\mathcal{B})$*. Језгро* $\mathcal{L}$ *зовемо генератором полугрупе* $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$*.*

Примедба 3.15. Генератор $\mathcal{L}$ униформно непрекидне CPD-полугрупе $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ је Ермитово условно потпуно позитивно дефинитно језгро за које важи $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\mathcal{K}|_{t=0}$, тј.

$$\mathcal{L}^{x,y}(b) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{K}_t^{x,y}(b) - b}{t},\ x, y \in S,\ b \in \mathcal{B}.$$

Дефиниција 3.16. Генератор $\mathcal{L}$ униформно непрекидне CPD-полугрупе на скупу S са вредностима у $B(\mathcal{B})$ има Кристенсен-Евансову форму (тј. јесте CE-генератор) ако се може представити у облику

$$\mathcal{L}^{x,y}(b) = \langle \zeta_x, b\zeta_y \rangle + b\beta_y + \beta_x^* b, \tag{3.1}$$

где $\zeta_x \in F,\ \beta_x \in \mathcal{B}\ (x \in S)$ и F је пред-Хилбертов $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул.

4 Системи производа Хилбертових модула

Системи производа Хилбертових простора (системи производа над $\mathbb{C}$), о којима је било речи у Поглављу 2, проучавају се последњих неколико деценија у вези са E_0-полугрупама које делују на факторима типа I. До сада већ постоје неки значајни резултати који уопштавају теорију Арвесонових система производа на системе производа над неком C^*-алгебром, тј. на системе производа Хилбертових модула, било везано за E_0-полугрупе (видети [21], [3], [23])) или квантну динамику вероватноће (видети [9], [6], [22]).

Постоји доста потешкоћа у уопштењу појма индекса система производа (над $\mathbb{C}$) уведеног у [2], на случај система производа над произвољном C^*-алгебром. До сада постоји један покушај у том смеру дат у [25].

У овом поглављу наводимо дефиниције одређених појмова као припрему за приказ резултата дисертације која се тичу горе поменутог уопштења појма индекса Арвесонових система производа (резултати ће бити приказани у поглављима која следе). Детаљније, најпре доказујемо да се скуп свих униформно непрекидних јединица система производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ може снабдети структуром двостраног Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула након идентификовања јединица помоћу одговарајуће релације еквиваленције. Ту конструкцију, затим, користимо за дефинисање индекса система производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ и на тај начин уопштавамо појам индекса система производа који су увели Арвесон (у случају $\mathcal{B} = \mathbb{C}$) и Скајде[4] (у случају просторних система производа). Такође, доказујемо да је тако дефинисан индекс коваријантни функтор из категорије непрекидних система производа у категорију двостраних $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула, као и да је субадитиван у односу на спољашњи тензорски производ система производа. Показујемо да се индекс система производа који се може утопити у просторни систем производа може прецизније описати и да се скуп униформно непрекидних јединица може реконструисати на основу индекса система производа.

Током излагања $\mathcal{B}$ је унитална C^*-алгебра (уколико се не нагласи другачије) и 1 је њена јединица. Ознака $\otimes$ се користи за тензорски производ, алгебарски или неки други, иако је и $\odot$ често у употреби.

[4] Michael Skeide

На почетку наводимо неке основне дефиниције.

Дефиниција 4.1. а) Систем производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ је фамилија $(E_t)_{t\geq 0}$ Хилбертових $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула, $E_0 \cong \mathcal{B}$, заједно са фамилијом двостраних (унитарних) изоморфизама

$$\varphi_{s,t} : E_s \otimes E_t \to E_{s+t},$$

где је $\otimes$ унутрашњи тензорски производ добијен идентификацијама

$$ub \otimes v \sim u \otimes bv,\ u \otimes vb \sim (u \otimes v)b,\ bu \otimes v \sim b(u \otimes v) \quad (u \in E_s, v \in E_t, b \in \mathcal{B})$$

и потом комплетирањем у односу на скаларни производ

$$\langle u \otimes v, u_1 \otimes v_1 \rangle = \langle v, \langle u, u_1 \rangle v_1 \rangle\,, \quad u, u_1 \in E_s,\ v, v_1 \in E_t.$$

Пресликавања $\varphi_{s,t}$ задовољавају

$$\varphi_{r,s+t}(I_{E_r} \otimes \varphi_{s,t}) = \varphi_{r+s,t}(\varphi_{r,s} \otimes I_{E_t}).$$

б) Јединица система производа $E = (E_t)_{t\geq 0}$ је фамилија $u = (u_t)_{t\geq 0}$, $u_t \in E_t$ таква да важи

$$u_0 = 1, \quad \varphi_{s,t}(u_s \otimes u_t) = u_{s+t}$$

што краће пишемо $u_s \otimes u_t = u_{s+t}$.
Јединица $u = (u_t)_{t\geq 0}$ је унитална ако је $\langle u_t, u_t \rangle = 1$. Она је централна ако за свако $b \in \mathcal{B}$ и свако $t \geq 0$ важи $bu_t = u_t b$. Скуп свих јединица система производа E означава се $\mathcal{U}_E$ или само $\mathcal{U}$ ако је јасно о ком се ситему производа ради.

Овако уведен објекат се може посматрати и као непрекидни тензорски производ Хилбертових модула, односно непрекидна варијанта Фоковог простора. Горе поменута дефиниција јединица је чисто алгебарска и, као таква, не подразумева особине као што су нпр. мерљивост или непрекидност, као у случају јединица Арвесонових система. Испоставља се да је погодније да се услов непрекидности постави директно на јединице иако постоји и дефиниција непрекидног система производа коју помињемо у Поглављу 7.

Пример 4.2. Под тривијалним системом производа над $\mathcal{B}$ подразумевамо фамилију $(E_t)_{t\geq 0}$, где су $E_t = \mathcal{B}$ Хилбертови $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модули са скаларним производом $\langle b, b' \rangle = b^* b'$.

Дефиниција 4.3. За сваке две јединице $x = (x_t)_{t\geq 0}$ и $y = (y_t)_{t\geq 0}$ постоји фамилија ограничених $\mathbb{C}$-линеарних оператора $\mathcal{K}_t^{x,y} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ дефинисаних

$$\mathcal{K}_t^{x,y}(b) = \langle x_t, by_t \rangle.$$

Та фамилија чини полугрупу. Скуп јединица S је непрекидан ако је одговарајућа полугрупа $(\mathcal{K}_t^{\xi,\eta})_{\xi,\eta\in S}$ (у односу на Шуровско множење) униформно непрекидна. Кажемо да је јединица ξ униформно непрекидна или, краће, само непрекидна уколико је скуп $\{\xi\}$ непрекидан, тј. фамилија $\mathcal{K}_t^{\xi,\xi}$ непрекидна у норми простора $\mathrm{B}(\mathcal{B})$.

За дати (униформно) непрекидан скуп јединица $\mathcal{U}$ формира се униформно непрекидна потпуно позитивно дефинитна (CPD) полугрупа $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ (у односу на Шуровско множење, видети Дефиницију 3.10). Наиме, важи

$$\mathcal{K}_{s+t}^{x,y}(b) = \langle x_{s+t}, by_{s+t} \rangle = \langle x_s \otimes x_t, by_s \otimes y_t \rangle = \langle x_t, \langle x_s, by_s \rangle\, y_t \rangle = (\mathcal{K}_t^{x,y} \circ \mathcal{K}_s^{x,y})(b)$$

и, према Теореми 3.7, свако $\mathcal{K}_t$ је потпуно позитивно дефинитно језгро.

Према Теореми 3.14, генератор CPD-полугрупе $\mathcal{K}$ је условно потпуно позитивно дефинитно језгро $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\mathcal{K}|_{t=0}$,

$$\mathcal{L}^{x,y}(b) = \lim_{t\to 0} \frac{\langle x_t, by_t \rangle - b}{t},\ \ x, y \in \mathcal{U}.$$

Према томе, имајући у виду Дефиницију 3.13, за све $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}$ и за све $a_j,\ b_j \in \mathcal{B}$ важи

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = 0 \Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} b_i^* \mathcal{L}^{x_i,x_j}(a_i^* a_j) b_j \geq 0. \tag{4.1}$$

Генератор $\mathcal{L}$ је Ермитово језгро, тј.

$$\mathcal{L}^{y,x}(b) = \mathcal{L}^{x,y}(b^*)^*. \tag{4.2}$$

Такође, $\mathcal{K}$ је јединствено одређено помоћу $\mathcal{L}$. Наиме, $\mathcal{K} = e^{t\mathcal{L}}$, тј.

$$\mathcal{K}_t^{x,y}(b) = \langle x_t, by_t \rangle = e^{t\mathcal{L}^{x,y}}(b), \quad b \in \mathcal{B}. \tag{4.3}$$

Примедба 4.4. Генератор $\mathcal{L}$ полугрупе $\mathcal{K}$ одговара Арвесоновој функцији коваријације (у случају $\mathcal{B} = \mathbb{C}$).

Примедба 4.5. Имајући у виду Дефиницију 4.3, разликујемо скуп непрекидних јединица и непрекидан скуп јединица. У првом случају само су $\mathcal{K}_t^{\xi,\xi}$ ($\xi \in S$) униформно непрекидне полугрупе док су, у другом случају, све полугрупе $\mathcal{K}_t^{\xi,\eta}$ ($\xi, \eta \in S$) униформно непрекидне.

Нека је $S \subset \mathcal{U}$. Скуп S генерише подсистем производа $E^S = (E_t^S)_{t \geq 0}$ у E, где је $E_t^S = \overline{\operatorname{span}}\{b_n \xi_{t_n}^n \otimes \cdots \otimes b_1 \xi_{t_1}^1 b_0 |\ n \in \mathbb{N},\ b_i \in \mathcal{B},\ \xi^i \in S,\ t_n + \cdots + t_1 = t\}$ за $t > 0$ и $E_0^S = \mathcal{B}$.

Дефиниција 4.6. Систем производа $E = (E_t)_{t \geq 0}$ је типа I ако је генерисан неким непрекидним скупом јединица $S \subset \mathcal{U}$ (E је најмањи подсистем у E који садржи све јединице скупа S).
E је типа II ако има бар једну непрекидну јединицу, али није типа I.
E је типа III ако нема ниједну непрекидну јединицу.

Дефиниција 4.7. Систем производа је просторни ако има неку централну униталну јединицу ω (видети Дефиницију 4.1 (б)). Он је потпуно просторни ако је још и типа I и генеришући скуп S може да се изабере тако да садржи ω.

Примедба 4.8. Централна унитална јединица ω је непрекидна (пресликавање $\langle \omega_t, \bullet \omega_t \rangle = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ за свако $t \geq 0$). Према томе, просторни систем производа не може бити типа III.

5 Конструкција јединица у систему производа

У [16] Либшер[5] и Скајде формулишу и доказују тврђења која омогућују конструкцију нових јединица у датом систему производа. Ти резултати су наведени у Леми 3.1, Ставу 3.3 и Леми 3.4 поменутог рада. Овде их цитирамо као

Став 5.1. *а) Претпоставимо да непрекидан скуп јединица S генерише систем производа E. Нека је пресликавање $t \mapsto y_t \in E_t$ такво да за све $b \in \mathcal{B}$ и за неке K и $K_\xi \in B(\mathcal{B})$ $(\xi \in S)$ важи*

$$\langle y_t, b y_t \rangle = b + tK(b) + O(t^2),$$

$$\langle y_t, b\xi_t \rangle = b + tK_\xi(b) + O(t^2).$$

Тада постоји систем производа $F \supseteq E$ и јединица $\zeta \in F$ таква да је скуп $S \cup \{\zeta\}$ непрекидан и важи

$$\mathcal{L}^{\zeta,\zeta} = K \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^{\zeta,\xi} = K_\xi.$$

б) Такође, следећи услови су еквивалентни:

1. $\zeta \in E$;

2. ζ_t се може добити као лимес низа $(y_{t/n})^{\otimes n}$;

3. $\lim_{n\to\infty} \left\langle \zeta_t, (y_{t/n})^{\otimes n} \right\rangle = \langle \zeta_t, \zeta_t \rangle$.

Примедба 5.2. Иако је у [16] уместо $\lim_{n\to\infty}(y_{t/n})^{\otimes n}$ посматран лимес по свим партицијама сегмента $[0,t]$, овде није потребан тај општији концепт.

Наведени резултати се користе у поменутом раду за конструкцију јединица помоћу пресликавања

$$t \mapsto \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j x_t^j, \qquad \varkappa_j \in \mathbb{C}, \ \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j = 1$$

и

$$t \mapsto x_t e^{\beta t}, \tag{5.1}$$

где су $x, x^1, \ldots, x^n \in S$, $\beta \in \mathcal{B}$ и добијене јединице су означене

$$\varkappa_1 x^1 \boxplus \cdots \boxplus \varkappa_n x^n \quad \text{и} \quad x^\beta.$$

[5] Volkmar Liebscher

Генератори јединице $\varkappa_1 x^1 \boxplus \cdots \boxplus \varkappa_n x^n$ су

$$b \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\varkappa}_i \varkappa_j \mathcal{L}^{x^i,x^j}(b) \qquad \text{и} \qquad b \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{\varkappa}_i \mathcal{L}^{x^i,\xi}(b). \tag{5.2}$$

Производ $\boxplus$ је асоцијативан. Наиме, важи

$$\varkappa_1 x^1 \boxplus \varkappa_2 x^2 \boxplus \varkappa_3 x^3 = (\varkappa_1 + \varkappa_2)\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2} x^1 \boxplus \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2} x^2\right) \boxplus \varkappa_3 x^3, \; \varkappa_1 + \varkappa_2 \neq 0$$

и, слично,

$$\varkappa_1 x^1 \boxplus \varkappa_2 x^2 \boxplus \varkappa_3 x^3 = \varkappa_1 x^1 \boxplus (\varkappa_2 + \varkappa_3)\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_2+\varkappa_3} x^2 \boxplus \frac{\varkappa_3}{\varkappa_2+\varkappa_3} x^3\right), \; \varkappa_2 + \varkappa_3 \neq 0.$$

Ово се може видети уколико се упореде одговарајући генератори, имајући у виду (5.2).

Језгра јединице x^β су

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{x^\beta,x^\beta} &= \mathcal{L}^{x,x} + \beta^* \mathrm{id}_{\mathcal{B}} + \mathrm{id}_{\mathcal{B}}\beta, \\ \mathcal{L}^{x^\beta,\xi} &= \mathcal{L}^{x,\xi} + \beta^* \mathrm{id}_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Очигледно је да се добија иста јединица x^β уколико се посматра пресликавање $t \mapsto e^{\beta t} x_t$ уместо (5.1) јер обе имају исте генераторе.

Сада би било значајно да се комплексни бројеви $\varkappa_j$ замене елементима C^*-алгебре $\mathcal{B}$:

Став 5.3. *Претпоставимо да непрекидан скуп јединица S генерише систем производа E. Нека су $x^j \in S$, $\varkappa_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, \ldots, n$ такви да $\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j = 1$. Функције*

$$t \mapsto \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j x_t^j \qquad u \qquad t \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_t^j \varkappa_j$$

задовољавају све претпоставке Става 5.1 и добијене јединице, означене као

$$\varkappa_1 x^1 \boxplus \cdots \boxplus \varkappa_n x^n \qquad u \qquad x^1 \varkappa_1 \boxplus \cdots \boxplus x^n \varkappa_n,$$

припадају E.

Доказ. Доказ следи уколико погледамо како изгледају одговарајућа језгра. У случају $n = 2$, пресликавања

$$t \mapsto x_t^1 \varkappa_1 + x_t^2 \varkappa_2 \quad \text{и} \quad t \mapsto \varkappa_1 x_t^1 + \varkappa_2 x_t^2$$

дају језгра

$$K = \varkappa_1^* \mathcal{L}^{x^1,x^1} \varkappa_1 + \varkappa_1^* \mathcal{L}^{x^1,x^2} \varkappa_2 + \varkappa_2^* \mathcal{L}^{x^2,x^1} \varkappa_1 + \varkappa_2^* \mathcal{L}^{x^2,x^2} \varkappa_2,$$

$$K_\xi = \varkappa_1^* \mathcal{L}^{x^1,\xi} + \varkappa_2^* \mathcal{L}^{x^2,\xi}$$

и

$$K = \mathcal{L}^{x^1,x^1} L_{\varkappa_1^*} R_{\varkappa_1} + \mathcal{L}^{x^1,x^2} L_{\varkappa_1^*} R_{\varkappa_2} + \mathcal{L}^{x^2,x^1} L_{\varkappa_2^*} R_{\varkappa_1} + \mathcal{L}^{x^2,x^2} L_{\varkappa_2^*} R_{\varkappa_2},$$

$$K_\xi = \mathcal{L}^{x^1,\xi} L_{\varkappa_1^*} + \mathcal{L}^{x^2,\xi} L_{\varkappa_2^*},$$

где су $L_a, R_a : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ оператори левог и десног множења елементом $a \in \mathcal{B}$.

□

Примедба 5.4. Став 5.3 је специјалан случај Примера 3 у [16, Поглавље 4.2]: Нека је $\{\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^{k+1}\}$ непрекидан скуп јединица и $a_j, b_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1, \ldots, k+1)$ су такви да је $\sum\limits_{j=1}^{k+1} a_j b_j = 0$. Сада се на пресликавање

$$t \mapsto y_t = \xi_t^0 + \sum_{j=1}^{k+1} a_j \xi_t^j b_j$$

примени Став 5.1(а), узимајући $\xi^{k+1} = \xi^0$, $a_{k+1} = 1$, $b_{k+1} = -1$ и $a_j = 1$ или $b_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Лема 5.5. [12] *Нека је $\mathcal{U}$ скуп свих униформно непрекидних јединица у датом систему производа E и нека $x, y \in \mathcal{U}$. Ако за све $\xi \in \mathcal{U}$ важи $\mathcal{L}^{x,\xi} = \mathcal{L}^{y,\xi}$, онда је $x = y$.*

Доказ. На основу (4.3) је

$$\langle x_t, b\xi_t \rangle = \langle y_t, b\xi_t \rangle, \ b \in \mathcal{B}.$$

За $b = 1$ и $\xi = x$ добијамо $\langle x_t, x_t \rangle = \langle y_t, x_t \rangle$, док за $b = 1$ и $\xi = y$ добијамо $\langle x_t, y_t \rangle = \langle y_t, y_t \rangle$. Комбинујући последње две једнакости, добијамо

$$\langle x_t - y_t, x_t - y_t \rangle = 0,$$

тј. $x = y$. $\square$

Примедба 5.6. Претпоставка "за све $\xi \in \mathcal{U}$" је сувишна у претходној леми јер користимо једнакост само за $\xi = x$ и $\xi = y$.

Лема 5.7. [12] *Нека је x непрекидна јединица у неком систему производа E. За $\beta = \mathcal{L}^{x,x}(1)$, јединица $x^{-\beta/2}$ је унитална. Уколико је x централна, таква је и $x^{-\beta/2}$.*

Доказ. Како је језгро $\mathcal{L}$ Ермитово, на основу (4.2) следи $\beta = \beta^*$. На основу (5.3) је $\mathcal{L}^{x^{-\beta/2},x^{-\beta/2}}(1) = \mathcal{L}^{x,x}(1) - \beta^*/2 - \beta/2 = 0$ и, према (4.3),

$$\left\langle x_t^{-\beta/2}, x_t^{-\beta/2} \right\rangle = e^{t\mathcal{L}^{x^{-\beta/2},x^{-\beta/2}}}(1) = 1.$$

Уколико је x централна, онда је

$$be^{t\beta} = b \langle x_t, x_t \rangle = \langle x_t b^*, x_t \rangle = \langle x_t, x_t b \rangle = e^{t\beta} b,$$

што даје $b\beta = \beta b$ за све $b \in \mathcal{B}$. Како је $x_t^{-\beta/2} = x_t e^{-t\beta/2}$, закључујемо да је $x^{-\beta/2}$, такође, централна јединица. $\square$

6 Дефиниција индекса система производа

У овом поглављу представљамо оригиналне резултате дисертације који се тичу дефинисања индекса система производа Хилбертових модула [12]. Нека је E систем производа. За дефиницију индекса система производа E користимо одређени скуп непрекидних јединица у E, посечен по одговарајућој релацији еквиваленције коју дефинишемо помоћу погодно одабраног скаларног производа. Уколико се изабере нека јединица ω, према наредном ставу, постоји максималан непрекидан скуп јединица $\mathcal{U}_\omega$ (у систему производа E) који садржи ω. Према томе, индекс означавамо $\operatorname{ind}(E, \omega)$ и доказујемо да не зависи од избора јединице ω унутар истог непрекидног скупа јединица.

Став 6.1. *Нека је $\mathcal{U}$ скуп свих непрекидних јединица у неком систему производа E. Дефинишемо релацију $\simeq$ на $\mathcal{U}$:*

$$x \simeq y \Leftrightarrow \{x, y\} \text{ је непрекидан скуп.}$$

Релација $\simeq$ је релација еквиваленције.

Доказ. Релација је очигледно рефлексивна и симетрична. Остаје једино да се докаже транзитивност, тј. ако су $\{\xi, \eta\}$ и $\{\eta, \zeta\}$ непрекидни скупови, скуп $\{\xi, \zeta\}$ је такође непрекидан.
Посматрајмо разлику $\xi_t - \eta_t$:

$$\langle \xi_t - \eta_t, \xi_t - \eta_t \rangle = \mathcal{K}_t^{\xi,\xi}(1) - \mathcal{K}_t^{\xi,\eta}(1) - \mathcal{K}_t^{\eta,\xi}(1) + \mathcal{K}_t^{\eta,\eta}(1) \to 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

кад $t \to 0+$ јер је скуп $\{\xi, \eta\}$ непрекидан. Такође је

$$\langle \xi_t, b\zeta_t \rangle = \langle \xi_t - \eta_t, b\zeta_t \rangle + \langle \eta_t, b\zeta_t \rangle .$$

Други сабирак, на основу непрекидности скупа $\{\eta, \zeta\}$, тежи b (кад $t \to 0+$). За први сабирак важи

$$\| \langle \xi_t - \eta_t, b\zeta_t \rangle \| \leq \|\xi_t - \eta_t\| \, \|b\zeta_t\| \leq C\|\xi_t - \eta_t\| \to 0.$$

□

Према претходном, скуп $\mathcal{U}$ се може разложити на максималне, узајамно дисјунктне, непрекидне скупове јединица.

Нека је E систем производа над униталном C^*-алгебром $\mathcal{B}$ са бар једном непрекидном јединицом. (Имајући у виду Дефиницију 4.6, E није систем производа типа III.) Нека је ω произвољна непрекидна јединица у E и нека је $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\omega$ скуп свих униформно непрекидних јединица које су еквивалентне са ω (у смислу релације $\simeq$ из Става 6.1).

Дефинишемо сабирање и множење елементом $b \in \mathcal{B}$ у $\mathcal{U}_\omega$ на следећи начин:

$$x + y = x \boxplus y \boxplus -\omega, \quad b \cdot x = bx \boxplus (1-b)\omega, \quad x \cdot b = xb \boxplus \omega(1-b). \tag{6.1}$$

Језгра јединица $x+y$, $x \cdot a$, $a \cdot x$ $(a \in \mathcal{B})$ су

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{x+y,x+y} = \mathcal{L}^{x,x} + \mathcal{L}^{x,y} - \mathcal{L}^{x,\omega} + \mathcal{L}^{y,x} + \mathcal{L}^{y,y} - \mathcal{L}^{y,\omega} - \mathcal{L}^{\omega,x} - \mathcal{L}^{\omega,y} + \mathcal{L}^{\omega,\omega}, \\ \mathcal{L}^{x+y,\xi} = \mathcal{L}^{x,\xi} + \mathcal{L}^{y,\xi} - \mathcal{L}^{\omega,\xi} \quad (\xi \in \mathcal{U}),\end{gathered} \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{x\cdot a,x\cdot a} = a^*\mathcal{L}^{x,x}a + (1-a)^*\mathcal{L}^{\omega,x}a + a^*\mathcal{L}^{x,\omega}(1-a) + (1-a)^*\mathcal{L}^{\omega,\omega}(1-a), \\ \mathcal{L}^{x\cdot a,\xi} = a^*\mathcal{L}^{x,\xi} + (1-a)^*\mathcal{L}^{\omega,\xi} \quad (\xi \in \mathcal{U}),\end{gathered} \tag{6.3}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{a\cdot x,a\cdot x} = \mathcal{L}^{x,x}L_{a^*}R_a + \mathcal{L}^{\omega,x}L_{1-a^*}R_a + \mathcal{L}^{x,\omega}L_{a^*}R_{1-a} + \mathcal{L}^{\omega,\omega}L_{1-a^*}R_{1-a}, \\ \mathcal{L}^{a\cdot x,\xi} = \mathcal{L}^{x,\xi}L_{a^*} + \mathcal{L}^{\omega,\xi}L_{1-a^*} \quad (\xi \in \mathcal{U}).\end{gathered} \tag{6.4}$$

Дефинишемо и релацију $\approx$ на скупу $\mathcal{U}$:

$$x \approx y \ \text{ ако и само ако } \ x = y^\beta \ \text{ за неко } \ \beta \in \mathcal{B}. \tag{6.5}$$

Теорема 6.2. *а) Скуп $\mathcal{U}$ заједно са операцијама дефинисаним у (6.1) је двострани $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул.*

б) Релација $\approx$ је релација еквиваленције која је сагласна са свим алгебарским операцијама у $\mathcal{U}$, тј.

$$x \approx y \Longrightarrow x \cdot b \approx y \cdot b, \ b \cdot x \approx b \cdot y,$$

$$x^1 \approx x^2, y^1 \approx y^2 \Longrightarrow x^1 + y^1 \approx x^2 + y^2;$$

Доказ. а) Асоцијативност следи на основу асоцијативности операције $\boxplus$. Заправо, јединице $(x+y)+z$ и $x+(y+z)$ су једнаке $x \boxplus y \boxplus z \boxplus (-2\omega)$.
Неутрал је ω, а инверз елемента x је $2\omega \boxplus (-x)$ што се лако проверава.
Комутативност је очигледна.
Остале аксиоме двостраног $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab)$, $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$, $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$, $(x+y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$ и $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ се могу лако проверити упоређивањем одговарајућих језгара на основу (6.2), (6.3), (6.4).

б) Рефлексивност следи ако се изабере $\beta = 0$.

Ако је $x = y^\beta$, онда $\mathcal{L}^{x,\xi} = \mathcal{L}^{y,\xi} + \beta^* \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ па важи

$$\mathcal{L}^{y,\xi} = \mathcal{L}^{x,\xi} - \beta^* \mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}^{x^{-\beta},\xi}$$

што, на основу Леме 5.5, даје симетричност.

За $x = y^\beta$ и $y = z^\alpha$ важи

$$\mathcal{L}^{x,\xi} = \mathcal{L}^{y,\xi} + \beta^* \mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}^{z,\xi} + (\alpha+\beta)^* \mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}^{z^{\alpha+\beta},\xi}$$

за све $\xi \in \mathcal{U}$. На основу тога и Леме 5.5 закључујемо да је $x = z^{\alpha+\beta}$, одакле следи транзитивност.

Покажимо сада да резултат сабирања и множења елементом $b \in \mathcal{B}$ не зависи од избора $\beta \in \mathcal{B}$. Заиста, нека $x, y \in \mathcal{U}$ и $x_1 = x^\beta$, $y_1 = y^\alpha$ за неке $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$. Тада је, на основу (6.2) и (5.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{x_1+y_1,\xi} =& \mathcal{L}^{x_1,\xi} + \mathcal{L}^{y_1,\xi} - \mathcal{L}^{\omega,\xi} = \mathcal{L}^{x,\xi} + \beta^* \,\mathrm{id}_{\mathcal{B}} + \mathcal{L}^{y_1,\xi} + \alpha^* \,\mathrm{id}_{\mathcal{B}} - \mathcal{L}^{\omega,\xi} = \\ =& \mathcal{L}^{x+y,\xi} + (\alpha+\beta)^* \,\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}^{(x+y)^{\alpha+\beta},\xi},\end{aligned}$$

за свако $\xi \in \mathcal{U}$. Сада, користећи Лему 5.5, следи

$$x_1 + y_1 = (x+y)^{\alpha+\beta}.$$

Затим, нека је $x_1 = x^\beta$ и $a \in \mathcal{B}$. Према (6.3) је

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{x_1 \cdot a,\xi} =& a^* \mathcal{L}^{x_1,\xi} + (1-a)^* \mathcal{L}^{\omega,\xi} = a^*(\mathcal{L}^{x,\xi} + \beta^* \,\mathrm{id}_{\mathcal{B}}) + (1-a)^* \mathcal{L}^{\omega,\xi} = \\ =& \mathcal{L}^{x \cdot a,\xi} + a^* \beta^* \,\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}^{(x \cdot a)^{\beta a},\xi},\end{aligned}$$

за свако $\xi \in \mathcal{U}$. Поново користимо Лему 5.5 и добијамо

$$x_1 \cdot a = (x \cdot a)^{\beta a}.$$

Слично се може показати да је $a \cdot x_1 = (a \cdot x)^{a\beta}$. $\square$

Сада је могуће формирати количнички модул $\mathcal{U}/\approx$.

Постоји више скаларних производа са вредностима у $\mathcal{B}$ на скупу $\mathcal{U}$. Наиме, за сваки позитиван елемент $b \in \mathcal{B}$ постоји пресликавање $\langle\ ,\ \rangle_b : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{B}$

$$\langle x, y \rangle_b = (\mathcal{L}^{x,y} - \mathcal{L}^{x,\omega} - \mathcal{L}^{\omega,y} + \mathcal{L}^{\omega,\omega})(b), \tag{6.6}$$

где је ω иста јединица као у (6.1). Свако од ових пресликавања ја полу-скаларни производ са вредностима у $\mathcal{B}$ (у смислу да може да буде дегенерисан, тј. $\langle x, x \rangle_b = 0$ за неко $x \neq 0$), али ипак има све остале уобичајене особине.

Став 6.3. *Пресликавање (6.6) има следеће особине:*

1. *За све $x, y, z \in \mathcal{U}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle_b = \alpha \langle x, y \rangle_b + \beta \langle x, z \rangle_b$.*
2. *За све $x, y \in \mathcal{U}$ важи $a \in \mathcal{B}$ $\langle x, y \cdot a \rangle_b = \langle x, y \rangle_b a$.*
3. *За све $x, y \in \mathcal{U}$ је $\langle x, y \rangle_b = \langle y, x \rangle_b^*$.*
4. *За све $x \in \mathcal{U}$ важи $\langle x, x \rangle_b \geq 0$.*
5. *Ако је $x \approx x'$ и $y \approx y'$, онда је $\langle x, y \rangle_b = \langle x', y' \rangle_b$.*
6. *За све $x, y \in \mathcal{U}$ и $0 \leq a \in \mathcal{B}$ важи $\langle x, a \cdot y \rangle_1 = \langle x, y \rangle_a$.*
7. *Ако је $0 \leq b (\in \mathcal{B}) \leq 1$, онда за све $x \in \mathcal{U}$ важи $\langle x, x \rangle_b \leq \langle x, x \rangle_1$.*
8. *Важи $\langle x - y, x - y \rangle_1 = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\langle x_t - y_t, x_t - y_t \rangle}{t}$.*

Доказ. (1)-(3) се лако проверавају.
(4) важи јер је $\mathcal{L}$ условно потпуно позитивно дефинитно језгро (прецизније, можемо ставити $n = 2$, $x^1 = x$, $x^2 = \omega$, $a_1 = a_2 = \sqrt{b}$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ у (4.1)).
(5) следи након скраћивања $\beta^* b$ и $b\gamma$ у развијеном облику за $\langle x', y' \rangle_b$, где су $x' = x^\beta$ и $y' = y^\gamma$.

(6) - Искористи се друга формула у (6.4) у развијеном облику за $\langle x, a\cdot y\rangle_1$.
(7) - Како је $\mathcal{L}$ условно потпуно позитивно дефинитно језгро, добијамо

$$\mathcal{L}^{x,x}(1-b)-\mathcal{L}^{x,\omega}(1-b)-\mathcal{L}^{\omega,x}(1-b)+\mathcal{L}^{\omega,\omega}(1-b)\geq 0$$

и, према томе, $\langle x,x\rangle_b \leq \langle x,x\rangle_1$.
(8) следи из (6.6) и дефиниције језгра $\mathcal{L}$.

$\square$

Бирамо $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ за скаларни производ на $\mathcal{U}$. На основу претходног става може се извести Коши-Шварцова неједнакост (видети [13, Став 1.1] или [18, Став 1.2.4]):

$$\langle x,y\rangle_1 \langle x,y\rangle_1{}^* \leq \langle x,x\rangle_1 \| \langle y,y\rangle_1 \|. \tag{6.7}$$

Скуп

$$N=\{x\in\mathcal{U} \mid \langle x,x\rangle_1 = 0\}$$

једнак је скупу

$$\{x\in\mathcal{U} \mid \forall y\in\mathcal{U},\ \langle x,y\rangle_1=0\}$$

и садржи $\{\omega^\beta \mid \beta\in\mathcal{B}\}$ (својство (5) Става 6.3). Закључујемо да је N подмодул у $\mathcal{U}$ и да је $\mathcal{U}/N$ пред-Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул.

Дефиниција 6.4. Нека је E систем производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ и ω непрекидна јединица у E. Индекс пара (E,ω) је Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул добијен комплетирањем пред-Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула $\mathcal{U}/_\sim$, где је $\mathcal{U}=\mathcal{U}_\omega$ максималан непрекидан скуп јединица који садржи ω, а $\sim$ је релација еквиваленције дефинисана:

$$x\sim y \ \text{ ако и само ако } \quad x-y\in N.$$

Индекс означавамо $\operatorname{ind}(E,\omega)$.

Примедба 6.5. Ако се E може утопити у просторни систем производа, комплетирање није потребно (Теорема 9.7).

Примедба 6.6. Ако је $\{\omega,\omega'\}$ непрекидан скуп јединица, тада је

$$\operatorname{ind}(E,\omega)\cong\operatorname{ind}(E,\omega').$$

Заиста, $\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_{\omega'}$ (на основу Става 6.1) и изометрички изоморфизам је дат транслацијом

$$x \mapsto x \boxplus -\omega \boxplus \omega'.$$

6.1 Еквивалентна дефиниција индекса

У овом потпоглављу дајемо још један начин дефинисања индекса система производа и показујемо да је тако добијена дефиниција еквивалентна са већ наведеном у Дефиницији 6.4. Такође, истичемо да таква дефиниција индекса одговара Арвесоновој (у случају $\mathcal{B} = \mathbb{C}$) [32].

Доказујемо да условно потпуно позитивно дефинитно (CCPD) језгро, као генератор потпуно позитивно дефинитне (CPD) полугрупе придружене непрекидном скупу јединица система производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$, дозвољава конструкцију Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула. Ту конструкцију користимо за дефинисање индекса полазног система производа.

Нека је E систем производа и нека је $\mathcal{U}$ непрекидан скуп јединица у E. Посматрајмо двострани $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B}$, где је $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B}$ скуп свих формалних сума $\sum_i a_i x_i b_i$, $x_i \in \mathcal{U}$, $a_i, b_i \in \mathcal{B}$ са идентификацијама:

$$(\lambda a)xb \sim ax(\lambda b)\ (\lambda \in \mathbb{C}),\ (a_1+a_2)xb \sim a_1xb + a_2xb,\ ax(b_1+b_2) \sim axb_1 + axb_2.$$

За $c \in \mathcal{B}$, $(\sum_i a_i x_i b_i)c = \sum_i a_i x_i (b_i c)$ и $c(\sum_i a_i x_i b_i) = \sum_i (ca_i) x_i b_i$.

Посматрајмо и двострани $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ подмодул $(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0$,

$$(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0 = \left\{ \sum_i a_i x_i b_i \in \mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B} \middle| \ \sum_i a_i b_i = 0 \right\}$$

и дефинишимо пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0 \times (\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0 \to \mathcal{B}$

$$\left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_j a'_j x'_j b'_j \right\rangle = \sum_{i,j} b_i^* \mathcal{L}^{x_i, x'_j}(a_i^* a'_j) b'_j. \tag{6.8}$$

Примедба 6.7. Припадност елемента модула $\mathcal{BUB}$, тј. класе еквиваленције по горе поменутим релацијама, подмодулу $(\mathcal{BUB})_0$ не зависи од представника класе.

Лема 6.8. *Пресликавање* (6.8) *има следеће особине:*

1. *За све* $a_i, b_i, c_i, c'_i, d_i, d'_i \in \mathcal{B},\ x_i, y_i, y'_i \in \mathcal{U},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$$\left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \alpha \sum_i c_i y_i d_i + \beta \sum_i c'_i y'_i d'_i \right\rangle =$$
$$= \alpha \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i c_i y_i d_i \right\rangle + \beta \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i c'_i y'_i d'_i \right\rangle;$$

2. *За све* $a_i, a'_i, b_i, b'_i \in \mathcal{B},\ x_i, x'_i \in \mathcal{U},\ c \in \mathcal{B}$
$$\left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \left(\sum_i a'_i x'_i b'_i \right) c \right\rangle = \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a'_i x'_i b'_i \right\rangle c;$$

3. *За све* $a_i, a'_i, b_i, b'_i \in \mathcal{B},\ x_i, x'_i \in \mathcal{U}$
$$\left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a'_i x'_i b'_i \right\rangle = \left\langle \sum_i a'_i x'_i b'_i, \sum_i a_i x_i b_i \right\rangle^*;$$

4. *За све* $a_i, b_i \in \mathcal{B},\ x_i \in \mathcal{U}$
$$\left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a_i x_i b_i \right\rangle \geq 0.$$

Доказ. (1) и (2) је једноставно проверити. За (3) се искористи (4.2), док (4) следи јер је $\mathcal{L}$ условно потпуно позитивно дефинитно (CCPD) језгро (4.1). □

На основу претходне леме може се извести Коши-Шварцова неједнакост:

$$\left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a'_i x'_i b'_i \right\rangle \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a'_i x'_i b'_i \right\rangle^* \leq$$
$$\leq \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a_i x_i b_i \right\rangle \left\| \left\langle \sum_i a'_i x'_i b'_i, \sum_i a'_i x'_i b'_i \right\rangle \right\|.$$

Сада можемо да закључимо да је скуп

$$\mathcal{N} = \left\{ \sum_i a_i x_i b_i \in (\mathcal{BUB})_0 | \ \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a_i x_i b_i \right\rangle = 0 \right\}$$

једнак скупу

$$\left\{ \sum_i a_i x_i b_i \in (\mathcal{BUB})_0 | \ \forall \sum_i a_i' x_i' b_i' \in (\mathcal{BUB})_0, \left\langle \sum_i a_i x_i b_i, \sum_i a_i' x_i' b_i' \right\rangle = 0 \right\}.$$

Према томе, $\mathcal{N}$ је подмодул у $(\mathcal{BUB})_0$ и $(\mathcal{BUB})_0/\mathcal{N}$ је пред-Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул.

Теорема 6.9. *Нека је E систем производа над униталном C^*-алгебром $\mathcal{B}$. Нека је ω произвољна непрекидна јединица у E и $\mathcal{U}$ је максималан непрекидан скуп јединица који садржи ω. Пресликавање $f : \mathcal{U}/_\sim \to (\mathcal{BUB})_0/\mathcal{N}$, дефинисано*

$$f([y]) = y - \omega + \mathcal{N},$$

је изоморфизам пред-Хилбертових $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула $\mathcal{U}/_\sim$ (из Дефиниције 6.4) и $(\mathcal{BUB})_0/\mathcal{N}$.

Скаларни производ у $\mathcal{U}$ означавамо са $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ((6.6) за $b = 1$), а скаларни производ у $(\mathcal{BUB})_0$ са $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (6.8).

Доказ. Нека су $y, y' \in \mathcal{U}$ и нека је $y \sim y'$, тј. $\langle y - y', y - y' \rangle_1 = 0$ (одузимање је у $\mathcal{U}$: $y - y' = y \boxplus (-y') \boxplus \omega$). Елемент $1y1 + (-1)y'1 \in (\mathcal{BUB})_0$ краће записујемо $y - y' \in (\mathcal{BUB})_0$.
На основу (6.8) је

$$\langle y - y', y - y' \rangle = \mathcal{L}^{y,y}(1) - \mathcal{L}^{y,y'}(1) - \mathcal{L}^{y',y}(1) + \mathcal{L}^{y',y'}(1)$$

и такође, према (6.6) и Ставу 5.3,

$$\langle y - y', y - y' \rangle_1 = \langle y \boxplus (-y') \boxplus \omega, y \boxplus (-y') \boxplus \omega \rangle_1 =$$

$$= \mathcal{L}^{y,y}(1) - \mathcal{L}^{y,y'}(1) - \mathcal{L}^{y',y}(1) + \mathcal{L}^{y',y'}(1).$$

Дакле, $y - y' \in \mathcal{N}$ па је пресликавање f добро дефинисано.

Нека су $[y], [z] \in \mathcal{U}/_\sim$. Тада важи

$$\langle f([y]), f([z]) \rangle_{(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0/\mathcal{N}} = \langle y - \omega + \mathcal{N}, z - \omega + \mathcal{N} \rangle_{(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0/\mathcal{N}} = \langle y - \omega, z - \omega \rangle =$$

$$= \mathcal{L}^{y,z}(1) - \mathcal{L}^{\omega,z}(1) - \mathcal{L}^{y,\omega}(1) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1) = \langle y, z \rangle_1 = \langle [y], [z] \rangle_{\mathcal{U}/_\sim},$$

одакле закључујемо да је f изометрија.

За сурјективност пресликавања f треба показати да за све $\sum_i a_i x_i b_i + \mathcal{N}$ у $(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0/\mathcal{N}$ постоји $[y] \in \mathcal{U}/_\sim$ тако да $\sum_i a_i x_i b_i - y + \omega \in \mathcal{N}$.
Пресликавање $t \mapsto \omega_t + \sum_i a_i x_{i,t} b_i$ задовољава све претпоставке Става 5.1. Језгра новонастале јединице ζ су

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{\zeta,\zeta}(b) = \mathcal{L}^{\omega,\omega}(b) + \sum_i b_i^* \mathcal{L}^{x_i,\omega}(a_i^* b) + \sum_i \mathcal{L}^{\omega,x_i}(b a_i) b_i + \sum_{i,j} b_i^* \mathcal{L}^{x_i,x_j}(a_i^* b a_j) b_j, \\ \mathcal{L}^{\zeta,\xi}(b) = \mathcal{L}^{\omega,\xi}(b) + \sum_i b_i^* \mathcal{L}^{x_i,\xi}(a_i^* b), \ \xi \in \mathcal{U}, \ b \in \mathcal{B}.\end{gathered} \tag{6.9}$$

На основу (6.8), (6.9) и (4.2) следи $\langle \sum_i a_i x_i b_i - \zeta + \omega, \sum_i a_i x_i b_i - \zeta + \omega \rangle = 0$. Према томе, $\sum_i a_i x_i b_i - \zeta + \omega \in \mathcal{N}$ па је $f([\zeta]) = \sum_i a_i x_i b_i + \mathcal{N}$.

Нека $[x], [y] \in \mathcal{U}/_\sim$ и нека је $\zeta = x + y \in \mathcal{U}$ (сабирање је из (6.1)).
Према (6.8), (6.2), (4.2) важи $\langle \zeta - x - y + \omega, \zeta - x - y + \omega \rangle = 0$. На основу тога, $\zeta - x - y + \omega \in \mathcal{N}$ па је

$$f([x] + [y]) = f([x + y]) = \zeta - \omega + \mathcal{N} = x - \omega + y - \omega + \mathcal{N} = f([x]) + f([y]).$$

Нека $[x] \in \mathcal{U}/_\sim$ и $b \in \mathcal{B}$. Посматрајмо јединице $\eta = x \cdot b \in \mathcal{U}$ и $\mu = b \cdot x \in \mathcal{U}$ (множење је из (6.1)).
Према (6.8), (6.3), (6.4), (4.2) је

$$\langle \eta - \omega - xb + \omega b, \eta - \omega - xb + \omega b \rangle = 0,$$

$$\langle \mu - \omega - bx + b\omega, \mu - \omega - bx + b\omega \rangle = 0.$$

Дакле, $\eta - \omega - xb + \omega b \in \mathcal{N}$ и $\mu - \omega - bx + b\omega \in \mathcal{N}$. На основу тога видимо да је

$$f([x] \cdot b) = f([x \cdot b]) = \eta - \omega + \mathcal{N} = xb - \omega b + \mathcal{N} = f([x])b,$$

$$f(b \cdot [x]) = f([b \cdot x]) = \mu - \omega + \mathcal{N} = bx - b\omega + \mathcal{N} = bf([x]).$$

□

Последица 6.10. *Нека је E систем производа над $\mathcal{B}$. Нека је $\mathcal{U}$ максималан непрекидан скуп јединица који садржи произвољну непрекидну јединицу ω. Индекс система производа E може бити дефинисан и као двострани Хилбертов $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул $(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0/\mathcal{N}$ (настао након комплетирања у односу на одговарајући скаларни производ).*

Примедба 6.11. Нека је E Арвесонов систем производа (E је систем производа над $\mathcal{B} = \mathbb{C}$) и нека је $\mathcal{U}$ скуп свих јединица у E. Као што је речено у Потпоглављу 2.1, за $x, y \in \mathcal{U}$ постоји јединствени комплексни број $c(x, y)$ који задовољава једнакост $\langle x_t, y_t\rangle = e^{tc(x,y)}$. Функција коваријације $c : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ је условно позитивно дефинитна у смислу да за све $n \in \mathbb{N}$, за све $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{U}$ и за све $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ важи

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 0 \Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} c(x_i, x_j)\overline{a}_i a_j \geq 0. \tag{6.10}$$

Приметимо да је

$$\mathcal{L}^{x,y}(1) = \lim_{t\to 0} \frac{\langle x_t, y_t\rangle - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tc(x,y)} - 1}{t} = c(x, y). \tag{6.11}$$

Како су сви $\mathcal{L}^{x,y}$ $\mathbb{C}$-линеарни, двострани $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B}$ се своди на комплексни векторски простор $\mathbb{C}\mathcal{U}$ који се састоји од свих формалних сума $\sum_i a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathcal{U}$, док се његов подмодул $(\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{B})_0$ своди на $(\mathbb{C}\mathcal{U})_0 = \{\sum_i a_i x_i \in \mathbb{C}\mathcal{U} |\ \sum_i a_i = 0\}$. Користећи (6.11), следи

$$\left\langle \sum_i a_i x_i, \sum_i a_i' x_i' \right\rangle = \sum_{i,j} \mathcal{L}^{x_i, x_j'}(\overline{a}_i a_j') = \sum_{i,j} \mathcal{L}^{x_i, x_j'}(1)\overline{a}_i a_j' = \sum_{i,j} c(x_i, x_j')\overline{a}_i a_j'. \tag{6.12}$$

Имајући у виду Последицу 6.10, индекс система производа E је Хилбертов простор $(\mathbb{C}\mathcal{U})_0/\mathcal{N}$ (настао након комлетирања одговарајућег пред-Хилбертовог простора), где је

$$\mathcal{N} = \left\{ \sum_i a_i x_i \in (\mathbb{C}\mathcal{U})_0 | \ \left\langle \sum_i a_i x_i, \sum_i a_i x_i \right\rangle = 0 \right\}.$$

Таква дефиниција индекса одговара оној коју је претходно дао Арвесон (Потпоглавље 2.1). Прецизније, $\mathbb{C}_0\mathcal{U}$ је комплексни векторски простор свих функција $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ које имају вредност различиту од нуле у коначно много тачака и задовољавају $\sum_x f(x) = 0$. Дефинисано је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}_0\mathcal{U} \times \mathbb{C}_0\mathcal{U} \to \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x,y \in \mathcal{U}} c(x,y)\overline{f(x)}g(y). \tag{6.13}$$

Ако је $N = \{f | \ \langle f, f \rangle = \sum_{x,y} c(x,y)\overline{f(x)}f(y) = 0\}$, користећи (6.10), видимо да је пресликавање (6.13) скаларни производ на $(\mathbb{C}_0\mathcal{U})/N$. Индекс система производа E је дефинисан као димензија Хилбертовог простора $(\mathbb{C}_0\mathcal{U})/N$ (који је настао након комплетирања одговарајућег пред-Хилбертовог простора). База за $\mathbb{C}_0\mathcal{U}$ је скуп $\{\delta_x | \ x \in \mathcal{U}\}$, где је $\delta_x(x) = 1$ и $\delta_x(y) = 0 \ \forall y \neq x$. Пресликавање $x \mapsto \delta_x$ је бијекција између $\mathcal{U}$ и скупа базних вектора $\{\delta_x | \ x \in \mathcal{U}\}$ па се $\mathcal{U}$ може сматрати базом за $\mathbb{C}_0\mathcal{U}$. Према томе, свако $f \in \mathbb{C}_0\mathcal{U}$ се може представити у облику $f = \sum_i a_i x_i$, где $a_i = f(x_i) \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathcal{U}$. Дакле, можемо, на неки начин, успоставити једнакост скупова $(\mathbb{C}\mathcal{U})_0$ и $\mathbb{C}_0\mathcal{U}$, $\mathcal{N}$ и N и пресликавања (6.12) и (6.13).

Крајњи закључак је да, према Последици 6.10, индекс Арвесоновог система производа E може да се дефинише као Хилбертов простор $\mathcal{U}/_\sim$ (настао након комплетирања) где је $\sim$ релација еквиваленције из Дефиниције 6.4.

7 Непрекидни системи производа

У овом поглављу доказујемо да је индекс, дефинисан у дисертацији у Поглављу 6, коваријантни функтор између категорије непрекидних система производа над C^*-алгебром $\mathcal{B}$ и категорије двостраних $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула [12].

Дефиниција *непрекидног* система производа [22, Поглавље 7] дозвољава нам да говоримо о индексу система производа E без наглашавања јединице ω.

Дефиниција 7.1. Нека је $E = (E_t)_{t\geq 0}$ систем производа и $i = (i_t)_{t\geq 0}$ је фамилија изометричких утапања $i_t : E_t \to F$ у унитални Хилбертов модул (F је унитални ако постоји $\xi \in F$ тако да је $\langle \xi, \xi \rangle = 1$). Скуп

$$CS_i(E) = \{x = (x_t)_{t\geq 0} \mid x_t \in E_t,\ t \mapsto i_t x_t \text{ је непрекидно пресликавање}\}$$

је скуп непрекидних сечења у E (у односу на i). Кажемо да је E непрекидан систем производа (у односу на i) ако важи

1. За свако $y_t \in E_t$ постоји непрекидно сечење $x \in CS_i(E)$ такво да је $y_t = x_t$;
2. За сваки пар непрекидних сечења $x, y \in CS_i(E)$, функција

   $$(s,t) \mapsto i_{s+t}(x_s \otimes y_t)$$

   је непрекидна.

Сада наводимо неке од особина непрекидних система производа које су дате у [22, Теорема 7.5 и 7.7] и [7, Теорема 2.4 и 2.5].

Теорема 7.2. *1. За систем производа E и непрекидну јединицу ξ постоји највише једна непрекидна структура $CS_i(E)$ на E тако да $\xi \in CS_i(E)$.*

2. За систем производа E који је генерисан непрекидним скупом јединица S постоји тачно једна непрекидна структура $CS_i(E) \supset S$.

3. Ако је E непрекидан систем производа са непрекидном јединицом $\xi \in CS_i(E)$, E је униформно непрекидан систем производа у смислу да је пресликавање $t \mapsto \langle x_t, \bullet y_t \rangle$ непрекидно као пресликавање $\mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{B})$ за све $x, y \in CS_i(E)$.

Према Теореми 7.2(1) постоји највише једна непрекидна структура на E таква да је непрекидна јединица ω непрекидно сечење. За дату непрекидну јединицу $\omega \in CS_i(E)$, скуп $\mathcal{U}_\omega$ (максималан непрекидан скуп јединица у E који садржи ω) се поклапа са скупом свих непрекидних јединица које припадају $CS_i(E)$. Заиста, ако непрекидна јединица x припада $CS_i(E)$, онда је $\omega \simeq x$ на основу Теореме 7.2(3) ($\simeq$ је релација дефинисана у Ставу 6.1). Обрнуто, ако је x непрекидна јединица за коју важи $\omega \simeq x$, онда

$$\|x_{t+\varepsilon} - x_t\| \leq \|x_t \otimes x_\varepsilon - x_t \otimes \omega_\varepsilon\| + \|x_t \otimes \omega_\varepsilon - x_t\| \leq \|x_t\|(\|x_\varepsilon - \omega_\varepsilon\| + \|\omega_\varepsilon - 1\|) \to 0,$$

кад $\varepsilon \to 0+$, због тога што први сабирак тежи нули јер је $\omega \simeq x$, док други тежи нули јер $\omega \in CS_i(E)$. На основу тога и $\|x_{t-\varepsilon} - x_t\| \to 0$, кад $\varepsilon \to 0+$, јер $\|x_{t-\varepsilon} - x_t\| \leq \|x_{t-\varepsilon}\| \; \|1 - x_\varepsilon\|$.

Дакле, у случају непрекидних система производа не наглашавамо јединицу ω већ само пишемо $\operatorname{ind}(E)$.

Фамилија непрекидних система производа је категорија ако су морфизми дефинисани на следећи начин:

Дефиниција 7.3. Пресликавање $\theta : E \to F$ између два непрекидна система производа (са утапањима i и j) је морфизам ако

1. $\theta|_{E_t} = \theta_t : E_t \to F_t$ су ограничена $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ линеарна пресликавања која имају адјунгована и задовољавају $\theta_{t+s} = \theta_t \otimes \theta_s$, $\theta_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$;
2. пресликавања θ и θ^* чувају непрекидну структуру, тј. ако $(x_t)_{t\geq 0} \in CS_i(E)$, онда $(\theta(x_t))_{t\geq 0} \in CS_j(F)$ и ако $(y_t)_{t\geq 0} \in CS_j(F)$, онда $(\theta^*(y_t))_{t\geq 0} \in CS_i(E)$;
3. $\limsup\limits_{t\to 0+} \|\theta_t\| < +\infty$.

Примедба 7.4. У [25, Поглавље 2] морфизми су дефинисани као пресликавања која задовољавају само услов (1) (у претходној дефиницији). Таква дефиниција морфизама је чисто алгебарска па не бисмо могли да говоримо о непрекидној структури система производа без додатних претпоставки.

Став 7.5. [12] *Индекс је коваријантни функтор између категорије непрекидних система производа над $\mathcal{B}$ и категорије двостраних $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модула.*

Доказ. Нека је $\theta : E \to F$ морфизам. Изаберимо $\omega' = \theta(\omega)$ за референтну јединицу у $\mathcal{U}_F$. За произвољну јединицу $x = (x_t) \in \mathcal{U}_E$, $\theta(x) = (\theta_t(x_t)) \in \mathcal{U}_F$ јер $\theta_{t+s}(x_{t+s}) = \theta_{t+s}(x_t \otimes x_s) = \theta_t(x_t) \otimes \theta_s(x_s)$ и $\theta_0(x_0) = 1$. Уколико је x непрекидна, онда $x \in CS_i(E)$ па $\theta(x) \in CS_j(F)$, односно $\theta(x)$ је непрекидна.

Нека $x, y \in \mathcal{U}_E$. За јединицу $\zeta = x + y = x \boxplus y \boxplus -\omega$ (сабирање је у $\mathcal{U}_E$) важи $\zeta_t = \lim_{n\to\infty} (x_{t/n} + y_{t/n} - \omega_{t/n})^{\otimes n}$ (Став 5.1(б)). Како је θ морфизам (Дефиниција 7.3(1)), следи

$$(\theta(\zeta))_t = \theta_t(\zeta_t) = \lim_{n\to\infty} (\theta_{t/n}(x_{t/n}) + \theta_{t/n}(y_{t/n}) - \omega'_{t/n})^{\otimes n} =$$

$$= (\theta(x) \boxplus \theta(y) \boxplus -\omega')_t = (\theta(x) + \theta(y))_t$$

(сабирање у последњем изразу је у $\mathcal{U}_F$). Дакле, $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$. Слично, $\theta(x \cdot a) = \theta(x) \cdot a$ и $\theta(a \cdot x) = a \cdot \theta(x),\ a \in \mathcal{B}$.

Преме томе, пресликавање $\mathcal{U}_E \ni x \mapsto \theta(x) \in \mathcal{U}_F$ је алгебарски хомоморфизам.

Нека је $\theta^* : F \to E$ морфизам чије су фибре $\theta_t^* : F_t \to E_t$ и нека је $x = (x_t)$ јединица у E. Тада је $(\theta_t^*\theta_t x_t)$ такође јединица. Нека је $y \sim y'$ у E и означимо $\psi_t = \theta_t^*\theta_t$. Тада за свако $x \in \mathcal{U}_E$ важи

$$\langle \theta x, \theta y \rangle_1 = \langle \psi x - \psi\omega, y \rangle_1 ,$$

дакле,

$$\langle \theta x, \theta y - \theta y' \rangle_1 = \langle \psi x - \psi\omega, y - y' \rangle_1 = 0,$$

што даје $\theta y \sim \theta y'$. Према томе, добија се добро дефинисан хомоморфизам $\mathcal{U}_E/_\sim \ni [x] \mapsto \mathrm{ind}(\theta)([x]) = [\theta x] \in \mathcal{U}_F/_\sim$.

Докажимо сада да $\mathrm{ind}(\theta)$ има адјунговано пресликавање. Ако $y \in \mathcal{U}_F$, онда $\theta^* y \in \mathcal{U}_E$ и важи

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{ind}(\theta)x, y \rangle_1 =& \mathcal{L}^{\theta x, y}(1) - \mathcal{L}^{\theta x, \omega'}(1) - \mathcal{L}^{\omega', y}(1) + \mathcal{L}^{\omega', \omega'}(1) = \\ =& \mathcal{L}^{x, \theta^* y}(1) - \mathcal{L}^{x, \theta^*\omega'} - \mathcal{L}^{\omega, \theta^* y}(1) + \mathcal{L}^{\omega, \theta^*\omega'}(1) = \langle x, \theta^* y - \theta^*\omega' \rangle_1 .\end{aligned}$$

Одавде видимо да је $(\mathrm{ind}(\theta))^*(y) = \theta^* y - \theta^*\omega'$.

Коначно, покажимо да је пресликавање $\mathrm{ind}(\theta)$ ограничено и да се, према томе, може проширити на $\mathrm{ind}(E)$. Користећи Став 6.3 (8) и [13, Став 1.2], добијамо

$$\langle \theta x, \theta x \rangle_1 = \lim_{t \to 0+} \frac{\langle \theta_t x_t - \theta_t \omega_t, \theta_t x_t - \theta_t \omega_t \rangle}{t} \leq$$

$$\leq \limsup_{t \to 0+} \|\theta_t\|^2 \frac{\langle x_t - \omega_t, x_t - \omega_t \rangle}{t} \leq (\limsup_{t \to 0+} \|\theta_t\|^2) \langle x, x \rangle_1 .$$

Дакле, $\mathrm{ind}(\theta) \in B^{a,bil}(\mathrm{ind}(E), \mathrm{ind}(F))$ је морфизам у категорији двостраних $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула.

Може се лако видети да $\mathrm{ind}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{\mathrm{ind}(E)}$ и $\mathrm{ind}(\psi\theta) = \mathrm{ind}(\psi)\mathrm{ind}(\theta)$ за све морфизме θ између система производа E и F и ψ између система производа F и G. □

Примедба 7.6. Пресликавање $\mathrm{ind}(\theta)$ чува релацију $\approx$. Заиста, ако је $x' = x^\beta$, $\beta \in \mathcal{B}$, тада је $\mathcal{L}^{\theta(x'),\xi} = \mathcal{L}^{\theta(x)^\beta,\xi}$ за $\xi \in \mathcal{U}_F$ па, на основу Леме 5.5, $\theta(x') = \theta(x)^\beta$.

Примедба 7.7. Ако се изостави услов (3) у Дефиницији 7.3, може се само закључити да је $\mathrm{ind}(\theta)$ густо дефинисан (могуће и неограничен) оператор који има адјунговани.

Последица 7.8. *Ако су E и F алгебарски изоморфни системи производа (постоји унитарни морфизам $\theta : E \to F$), онда је $ind(E, \omega) = ind(F, \theta(\omega))$.*

Доказ. Фибре морфизма $\theta : E \to F$ су унитарни оператори па је њихова норма једнака 1 и услов (3) у Дефиницији 7.3 је испуњен. На основу

$$\langle \theta_t x_t, b\theta_t y_t \rangle = \langle x_t, b y_t \rangle$$

закључујемо да θ преводи непрекидне јединице у непрекидне јединице, као и да важи $\langle \theta x, \theta x \rangle_1 = \langle x, x \rangle_1$. Дакле, у овом случају је $\mathrm{ind}(\theta)$ унитаран оператор па је $\mathrm{ind}(E) \cong \mathrm{ind}(F)$ или, прецизније, $\mathrm{ind}(E, \omega) = \mathrm{ind}(F, \theta(\omega))$. □

8 Субадитивност индекса система производа

У овом поглављу доказујемо субадитивност индекса који је дефинисан у овој дисертацији [12].

За системе производа E над униталном C^*-алгебром $\mathcal{A}$ и F над униталном C^*-алгебром $\mathcal{B}$ можемо посматрати спољашњи тензорски производ $E \otimes F$ као систем производа над $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ где је спољашњи тензорски производ $E_t \otimes F_t$ Хилбертов модул над $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (просторни тензорски производ C^*-алгебри). Ово је директно уопштење тензорског производа у категорији Арвесонових система производа.

Примедба 8.1. Спољашњи тензорски производ $E_t \otimes F_t$ настаје комплетирањем одговарајућег алгебарског тензорског производа у односу на скаларни производ $\langle x_t \otimes x'_t, y_t \otimes y'_t \rangle = \langle x_t, y_t \rangle \otimes \langle x'_t, y'_t \rangle \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. (Приметимо разлику у односу на унутрашњи тензорски производ (Дефиниција 4.1 (а)).

Уколико је $x = (x_t)_{t \geq 0}$ јединица у E, $y = (y_t)_{t \geq 0}$ јединица у F, онда је

$$x \otimes y = (x_t \otimes y_t)_{t \geq 0}$$

јединица у $E \otimes F$. Одговарајућа полугрупа (рачуната на елементарним тензорима) је

$$\langle x_t \otimes x'_t, (a \otimes b)(y_t \otimes y'_t) \rangle = \langle x_t, a y_t \rangle \otimes \langle x'_t, b y'_t \rangle$$

и непрекидност је очигледна. Дакле, постоји пресликавање

$$\mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_F \to \mathcal{U}_{E \otimes F}.$$

Ако су ω и ω' референтне јединице у E и F, онда је природно узети $\omega \otimes \omega'$ за референтну јединицу у $E \otimes F$.

Став 8.2. *Нека су 1 и $1'$ јединице у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тада за све $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $x, y \in \mathcal{U}_E$ и $x', y' \in \mathcal{U}_F$ важи:*

1. $\mathcal{L}^{x \otimes x', y \otimes y'}(a \otimes b) = a \otimes \mathcal{L}^{x', y'}(b) + \mathcal{L}^{x,y}(a) \otimes b$ *- Лајбницово правило;*

2. $\langle x \otimes x', y \otimes y' \rangle_{1 \otimes 1'} = 1 \otimes \langle x', y' \rangle_{1'} + \langle x, y \rangle_1 \otimes 1'$, *где су скаларни производи редом у $\mathcal{U}_{E \otimes F}$, $\mathcal{U}_F$ и $\mathcal{U}_E$;*

3. $(x \otimes \omega') \cdot (\alpha \otimes 1') = (x \cdot \alpha) \otimes \omega' \quad (\alpha \in \mathcal{A})$,
$(\omega \otimes y) \cdot (1 \otimes \beta) = \omega \otimes (y \cdot \beta) \quad (\beta \in \mathcal{B})$,
где $\cdot$ представља множење елементима одговарајућих C^*-алгебри у модулима $\mathcal{U}_{E\otimes F}$, $\mathcal{U}_E$ и $\mathcal{U}_F$;

4. $x \otimes y = x \otimes \omega' + \omega \otimes y$, *где је сабирање у модулу $\mathcal{U}_{E\otimes F}$;*

5. $(x \otimes \omega') \cdot (1 \otimes \beta) = (1 \otimes \beta) \cdot (x \otimes \omega') \quad (\beta \in \mathcal{B})$,
$(\omega \otimes y) \cdot (\alpha \otimes 1') = (\alpha \otimes 1') \cdot (\omega \otimes y) \quad (\alpha \in \mathcal{A})$;

6. $\langle x \otimes \omega', \omega \otimes y \rangle_{1\otimes 1'} = 0$.

Доказ. (1) Директни рачун;

(2) Следи на основу (1) и дефиниције скаларног производа (6.6);

(3) Користећи (1), (6.3) и (6.4), после директног рачуна закључујемо да су сва четири следећа израза

$$\mathcal{L}^{(x\otimes\omega')\cdot(\alpha\otimes 1'),(x\otimes\omega')\cdot(\alpha\otimes 1')}(a \otimes b), \qquad \mathcal{L}^{(x\otimes\omega')\cdot(\alpha\otimes 1'),x\cdot\alpha\otimes\omega'}(a \otimes b),$$

$$\mathcal{L}^{x\cdot\alpha\otimes\omega',(x\otimes\omega')\cdot(\alpha\otimes 1')}(a \otimes b), \qquad \mathcal{L}^{x\cdot\alpha\otimes\omega',x\cdot\alpha\otimes\omega'}(a \otimes b)$$

једнака изразу

$$\begin{aligned} a \otimes \mathcal{L}^{\omega',\omega'}(b) + (\alpha^* \mathcal{L}^{x,x}(a)\alpha + \alpha^* \mathcal{L}^{x,\omega}(a)(1-\alpha) + \\ + (1-\alpha^*)\mathcal{L}^{\omega,x}(a)\alpha + (1-\alpha^*)\mathcal{L}^{\omega,\omega}(a)(1-\alpha)) \otimes b. \end{aligned}$$

На основу тога, Леме 5.5 и Примедбе 5.6 добијамо прву једнакост. Друга се добија слично.

(4) Након неколико корака добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{x\otimes\omega'+\omega\otimes y,x\otimes\omega'+\omega\otimes y}(a \otimes b) = \mathcal{L}^{x\otimes\omega'+\omega\otimes y,x\otimes y}(a \otimes b) = \mathcal{L}^{x\otimes y,x\otimes\omega'+\omega\otimes y}(a \otimes b) = \\ = \mathcal{L}^{x\otimes y,x\otimes y}(a \otimes b) = a \otimes \mathcal{L}^{y,y}(b) + \mathcal{L}^{x,x}(a) \otimes b; \end{aligned}$$

(5) Према (1), (6.3) и (6.4) добијамо да су сва четири следећа израза

$$\mathcal{L}^{(x\otimes\omega')\cdot(1\otimes\beta),(x\otimes\omega')\cdot(1\otimes\beta)}(a \otimes b), \qquad \mathcal{L}^{(x\otimes\omega')\cdot(1\otimes\beta),(1\otimes\beta)\cdot(x\otimes\omega')}(a \otimes b),$$

$$\mathcal{L}^{(1\otimes\beta)\cdot(x\otimes\omega'),(x\otimes\omega')\cdot(1\otimes\beta)}(a \otimes b), \qquad \mathcal{L}^{(1\otimes\beta)\cdot(x\otimes\omega'),(1\otimes\beta)\cdot(x\otimes\omega')}(a \otimes b)$$

једнака изразу

$$a \otimes \mathcal{L}^{\omega',\omega'}(b) + \mathcal{L}^{x,x}(a) \otimes \beta^* b\beta + \mathcal{L}^{\omega,x}(a) \otimes (1' - \beta^*)b\beta + \\ \mathcal{L}^{x,\omega}(a) \otimes \beta^* b(1' - \beta) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(a) \otimes (1' - \beta^*)b(1 - \beta);$$

(6) Следи на основу (2). □

Примедба 8.3. У општем случају, $(x \otimes y) \cdot (\alpha \otimes \beta) \neq (x \cdot \alpha) \otimes (y \cdot \beta)$ па, према томе, $\operatorname{ind}(E \otimes F)$ не може бити тензорски производ $\operatorname{ind} E$ и $\operatorname{ind} F$.

Став 8.4. *Пресликавање*

$$T : (\operatorname{ind} E \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A} \otimes \operatorname{ind} F) \to \operatorname{ind}(E \otimes F),$$

дефинисано на елементарним тензорима густог подскупа $(\mathcal{U}_E/_\sim \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}_F/_\sim)$ *као*

$$T([x] \otimes \beta, \alpha \otimes [y]) = [(x \otimes \omega') \cdot (1 \otimes \beta) + (\alpha \otimes 1') \cdot (\omega \otimes y)],$$

је хомоморфизам модула и изометричко утапање.

Доказ. Прво, на основу Става 8.2 (делови (6), (5) и (2)), за $z = (x \otimes \omega') \cdot (1 \otimes \beta) + (\alpha \otimes 1') \cdot (\omega \otimes y)$ важи

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle_{1 \otimes 1'} &= \langle x, x \rangle_1 \otimes \beta^* \beta + \alpha^* \alpha \otimes \langle y, y \rangle_{1'} = \\ &= \langle (x \otimes \beta, \alpha \otimes y), (x \otimes \beta, \alpha \otimes y) \rangle . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Пресликавање T је добро дефинисано. Заиста, ако је $x \sim x_1$, онда важи $(x \otimes \omega') \cdot (1 \otimes \beta) \sim (x_1 \otimes \omega') \cdot (1 \otimes \beta)$ јер се може показати да је њихова разлика, скаларно помножена сама са собом, једнака нули. Слично је и за $y \sim y_1$.

Адитивност је очигледна.

За десно множење, користећи Став 8.2 (делови (3) и (5)), добијамо

$$\begin{aligned} T(([x] \otimes \beta, \alpha \otimes [y]) \cdot (a \otimes b)) =& T([x \cdot a] \otimes \beta b, \alpha a \otimes [y \cdot b]) = \\ =& [(x \otimes \omega') \cdot (a \otimes \beta b) + (\omega \otimes y) \cdot (\alpha a \otimes b)] = \\ =& T([x] \otimes \beta, \alpha \otimes [y]) \cdot (a \otimes b) \end{aligned}$$

и слично за лево множење.

Коначно, на основу (8.1) следи да је T изометрија, дакле, утапање. $\square$

Примедба 8.5. У случају Арвесонових система производа ($\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{C}$), добијено утапање је заправо изоморфизам на основу Теореме 2.9 и Последице 2.10 где је показано да је било која јединица $z \in \mathcal{U}_{E\otimes F}$ облика $z = x \otimes y$ за неке јединице $x \in \mathcal{U}_E$ и $y \in \mathcal{U}_F$. Међутим, готово сваки битан корак у доказу не важи у општем случају. Према томе, требало би наћи потпуно другачији доказ или одговарајући контрапример.

9 (Пот)просторни системи производа

У овом поглављу доказујемо да се индекс просторног или потпросторног система производа може прецизније описати. Наиме, релације $\sim$ и $\approx$ се подударају, $\mathcal{U}$ се може реконструисати помоћу $\mathrm{ind}(E)$ као $\mathcal{U} \cong \mathcal{B} \oplus \mathrm{ind}(E)$ и коначно, комплетирање у Дефиницији 6.4 није неопходно. (Видети [12]).

Подсетимо се дефиниције просторног система производа (Дефиниција 4.7) и наведимо дефиницију потпросторног система производа.

Дефиниција 9.1. Просторни систем производа је систем производа који садржи централну униталну јединицу. Систем производа је потпросторни ако се може утопити у неки просторни систем производа.

Примедба 9.2. Скајде је окарактерисао просторне системе производа генерисане јединицама као временски уређене Фокове модуле (Поглавље 10, између Примера 10.1 и Примера 10.2).

Примедба 9.3. Подсећања ради, јединица ω је централна ако и само ако важи $b\omega_t = \omega_t b$ за свако $b \in \mathcal{B}$ и свако $t \geq 0$. Таква јединица не мора да постоји (Пример 10.3). Међутим, уколико је присутна, на основу њених особина може се добити много интересантних резултата.

На основу Леме 5.7, довољно је претпоставити да систем производа има централну непрекидну јединицу уместо централну униталну јединицу.

Потпросторни систем производа не мора бити и просторни (видети [7, Поглавље 3]). Обрнуто је тривијално испуњено.

Током овог поглавља претпоставља се да је референтна јединица ω централна.

Следећа лема представља најважније својство централних јединица.

Лема 9.4. *Ако је јединица ω централна, онда за све $b \in \mathcal{B}$ и све $x \in \mathcal{U}$ важи*

$$\mathcal{L}^{x,\omega}(b) = \mathcal{L}^{x,\omega}(1)b. \tag{9.1}$$

Такође је $\mathcal{L}^{\omega,x}(b) = b\mathcal{L}^{\omega,x}(1)$.

Доказ. Ако је ω централна, важи

$$\mathcal{L}^{x,\omega}(b) = \lim_{t\to 0+} \frac{\langle x_t, b\omega_t\rangle - b}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\langle x_t, \omega_t\rangle - 1}{t} b = \mathcal{L}^{x,\omega}(1)b.$$

Такође,

$$\mathcal{L}^{\omega,x}(b) = (\mathcal{L}^{x,\omega}(b^*))^* = (\mathcal{L}^{x,\omega}(1)b^*)^* = b\mathcal{L}^{\omega,x}(1).$$

□

Следећи став омогућује да се доказане тврдње о просторним системима производа могу применити и на потпросторне системе производа.

Став 9.5. *Нека је E потпросторни систем производа утопљен у просторни систем производа $\hat{E}$ са централном јединицом $\hat{\omega}$ и нека је ω било која јединица у E. Тада је пресликавање*

$$\Phi : \mathcal{U}_E \to \{x - \omega \mid x \in \mathcal{U}_E\} \subseteq \mathcal{U}_{\hat{E}}, \quad \Phi(x) = x - \omega$$

утапање. Одузимање је у $\mathcal{U}_{\hat{E}}$, тј. $\Phi(x) = x - \omega = x \boxplus \hat{\omega} \boxplus (-\omega)$.

Другим речима, $\mathcal{U}_E$ је афини потпростор у $\mathcal{U}_{\hat{E}}$.

Доказ. Заиста,

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) = \Phi(x \boxplus y \boxplus (-\omega)) = (x \boxplus y \boxplus (-\omega)) \boxplus \hat{\omega} \boxplus (-\omega) = \\ = (x \boxplus \hat{\omega} \boxplus (-\omega)) \boxplus (y \boxplus \hat{\omega} \boxplus (-\omega)) \boxplus (-\hat{\omega}) = \Phi(x) + \Phi(y)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi(x \cdot a) = \Phi(xa \boxplus \omega(1-a)) = (xa \boxplus \omega(1-a)) \boxplus \hat{\omega} \boxplus (-\omega) = \\ (x \boxplus \hat{\omega} \boxplus (-\omega))a \boxplus \hat{\omega}(1-a) = \Phi(x) \cdot a\end{aligned}$$

(слично и за $\Phi(a \cdot x)$). Коначно, лако добијамо

$$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_1 =$$

$$= \mathcal{L}^{x\boxplus\hat{\omega}\boxplus(-\omega),y\boxplus\hat{\omega}\boxplus(-\omega)}(1) - \mathcal{L}^{x\boxplus\hat{\omega}\boxplus(-\omega),\hat{\omega}}(1) - \mathcal{L}^{\hat{\omega},y\boxplus\hat{\omega}\boxplus(-\omega)}(1) + \mathcal{L}^{\hat{\omega},\hat{\omega}}(1) =$$

$$= \langle x, y\rangle_1 .$$

□

Наредни став успоставља једнакост релација $\approx$ (из (6.5)) и $\sim$ (Дефиниција 6.4).

Став 9.6. *Нека је E потпросторни систем производа. За релацију еквиваленције $\sim$ из Дефиниције 6.4 важи:*

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y^{\beta} \quad \text{за неко } \beta \in \mathcal{B}.$$

Доказ. Претпоставимо прво да је E просторни систем производа и изаберимо за референтну јединицу централну јединицу ω.

На основу Леме 5.5 важи

$$x + \omega^{\beta} = x^{\beta} \tag{9.2}$$

јер је $\mathcal{L}^{x+\omega^{\beta},\xi} = \mathcal{L}^{x^{\beta},\xi}$, $\xi \in \mathcal{U}$.

Ако је $x = y^{\beta}$ за неко $\beta \in \mathcal{B}$, онда је на основу (9.2)

$$\langle x - y, x - y \rangle_1 = \left\langle \omega^{\beta}, \omega^{\beta} \right\rangle_1 = 0,$$

тј. $x \sim y$. (Управо доказан смер би важио и ако ω не би била централнаједница.)

Нека је $\langle x, x \rangle_1 = 0$ и b је позитиван елемент у $\mathcal{B}$. Означимо $\tilde{b} = b/\|b\|$. Елемент $\tilde{b}$ је позитиван и важи $1 - \tilde{b} \geq 0$. Према Ставу 6.3 (7),

$$\langle x, x \rangle_{\tilde{b}} \leq \langle x, x \rangle_1 \tag{9.3}$$

па је $\langle x, x \rangle_{\tilde{b}} = 0$. На основу Коши-Шварцове неједнакости (6.7), $\langle x, y \rangle_{\tilde{b}} = 0$ за свако $y \in \mathcal{U}$. Нека је $\beta = \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1) - \mathcal{L}^{\omega,x}(1) \in \mathcal{B}$. На основу (9.1) је

$$\mathcal{L}^{x^{\beta},y}(\tilde{b}) = \mathcal{L}^{x,y}(\tilde{b}) + \beta^*\tilde{b} = \mathcal{L}^{x,y}(\tilde{b}) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(\tilde{b}) - \mathcal{L}^{x,\omega}(\tilde{b}) = \langle x, y \rangle_{\tilde{b}} + \mathcal{L}^{\omega,y}(\tilde{b}),$$

дакле, $\mathcal{L}^{x^{\beta},y}(b) = \mathcal{L}^{\omega,y}(b)$. Како је сваки елемент у $\mathcal{B}$ линеарна комбинација највише четири позитивна елемента, добијамо $\mathcal{L}^{x^{\beta},y} = \mathcal{L}^{\omega,y}$. Користећи Лему 5.5, закључујемо $x^{\beta} = \omega$.

Сада је јасно да ако је $x \sim y$, тј. $\langle x - y, x - y \rangle_1 = 0$, одмах следи $x - y = \omega^{\beta}$ за неко $\beta \in \mathcal{B}$. Користећи (9.2), добијамо

$$x = y + \omega^{\beta} = y^{\beta}.$$

Ако је E потпросторни систем производа, он се може утопити у неки просторни систем производа $\hat{E}$ који садржи централну јединицу $\hat{\omega}$.

Ако је $x \sim y$, тада је очигледно $x - \omega \sim y - \omega$ па је, према претходном делу, $x - \omega = (y - \omega)^{\beta}$ за неко $\beta \in \mathcal{B}$. На основу Теореме 6.2 је $x - \omega = y^{\beta} - \omega$, одакле следи $x = y^{\beta}$.

Уколико је $x = y^{\beta}$, слично као у претходном делу може се показати да је $x \sim y$. □

Теорема 9.7. *Ако је E потпросторни систем производа, онда је $\mathcal{U}/_{\sim}$ Хилбертов $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул.*

Доказ. Једино што треба да покажемо јесте да је $\mathcal{U}/_{\sim}$ комплетан. Претпоставимо прво да је E просторни систем производа.

Нека је $([x^n])$ Кошијев низ у $\mathcal{U}/_{\sim}$, тј. за свако $0 < \varepsilon \leq 1$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$такво да

$$\|[x^n] - [x^m]\|^2 = \| \langle x^n - x^m, x^n - x^m \rangle_1 \| < \varepsilon^2 \quad \text{за } m, n \geq n_0. \tag{9.4}$$

Хтели бисмо да покажемо да је $([x^n])$ конвергентан низ. Он је, наравно, ограничен. Прво доказујемо да је $(\langle x^n, x^n \rangle_{\tilde{b}})$ Кошијев низ, где је $\tilde{b} = b/\|b\|$ и b произвољан позитиван елемент у $\mathcal{B}$. За $m, n \geq n_0$, на основу (9.3) видимо да је

$$\begin{aligned}
&\| \langle x^n, x^n \rangle_{\tilde{b}} - \langle x^m, x^m \rangle_{\tilde{b}} \| \leq \\
&\qquad \leq \| \langle x^n - x^m, x^n - x^m \rangle_{\tilde{b}} \| + \| \langle x^n - x^m, x^m \rangle_{\tilde{b}} \| + \| \langle x^m, x^n - x^m \rangle_{\tilde{b}} \| \leq \\
&\qquad \leq \| \langle x^n - x^m, x^n - x^m \rangle_1 \| + 2\sqrt{\| \langle x^n - x^m, x^n - x^m \rangle_1 \|}\sqrt{\| \langle x^m, x^m \rangle_1 \|} < \\
&\qquad\qquad < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\| \langle x^m, x^m \rangle_1 \|} < \varepsilon \text{ const.}
\end{aligned} \tag{9.5}$$

За представника класе еквиваленције $[x^n]$ изаберимо јединицу $(x^n)^{\beta_n}$, $\beta_n = -\mathcal{L}^{\omega, x^n}(1) \in \mathcal{B}$ и означимо је са x^{β_n}. На основу (9.1) важи $\mathcal{L}^{\xi,\omega}(b) = \mathcal{L}^{\xi,\omega}(1)b$. Сходно томе је

$$\mathcal{L}^{\omega, x^{\beta_n}}(\tilde{b}) = (\mathcal{L}^{x^{\beta_n}, \omega}(\tilde{b}))^* = (\mathcal{L}^{x^n,\omega}(\tilde{b}) + (\beta_n)^*\tilde{b})^* = ((\mathcal{L}^{x^n,\omega}(1) + (\beta_n)^*)\tilde{b})^* = 0$$

за $n \in \mathbb{N}$. Сада закључујемо да је

$$\mathcal{L}^{x^{\beta_n}, x^{\beta_n}}(\tilde{b}) - \mathcal{L}^{x^{\beta_m}, x^{\beta_m}}(\tilde{b}) = \langle x^{\beta_n}, x^{\beta_n} \rangle_{\tilde{b}} - \langle x^{\beta_m}, x^{\beta_m} \rangle_{\tilde{b}} = \langle x^n, x^n \rangle_{\tilde{b}} - \langle x^m, x^m \rangle_{\tilde{b}}.$$

(Последња једнакост следи из Става 6.3 (5).)

Према (9.5) важи

$$\|(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}} - \mathcal{L}^{x^{\beta_m},x^{\beta_m}})(b)\| < \varepsilon \operatorname{const}\|b\|, \tag{9.6}$$

за сваки позитиван елемент b. Како је сваки елемент из $\mathcal{B}$ линеарна комбинација највише четири позитивна елемента, закључујемо да је $(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}})$ Кошијев низ у $B(\mathcal{B})$, множећи константу у (9.6) бројем 4 ако је потребно. Дакле, $(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}})$ конвергира.

За свако $y \in \mathcal{U}$,

$$\langle y, x^n - x^m\rangle_{\tilde{b}} \langle x^n - x^m, y\rangle_{\tilde{b}} \leq \| \langle x^n - x^m, x^n - x^m\rangle_{\tilde{b}} \| \langle y, y\rangle_{\tilde{b}} .$$

Према (9.3) и (9.4) је $\| \langle x^n - x^m, y\rangle_{\tilde{b}} \| < \varepsilon\sqrt{\| \langle y, y\rangle_1 \|}$. На основу тога видимо да важи

$$\|(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y} - \mathcal{L}^{x^{\beta_m},y})(b)\| < \varepsilon\sqrt{\| \langle y, y\rangle_1 \|}\|b\|,$$

за сваки позитиван елемент $b \in \mathcal{B}$. Као и малопре, добијамо да је $(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y})$ Кошијев низ у $B(\mathcal{B})$ па, према томе, конвергира. Штавише, он задовољава Кошијев услов равномерно по свим y за које важи $\| \langle y, y\rangle_1 \| \leq 1$.

Дакле, постоје K, $K_y \in B(\mathcal{B})$ такви да

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}} - K\| = 0, \tag{9.7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y} - K_y\| = 0. \tag{9.8}$$

Како су $\|\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}}\|$, $\|\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y}\| \leq$ const, за $n \in \mathbb{N}$ и $\| \langle y, y\rangle_1 \| \leq 1$, суме

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}})^m}{m!} \quad \text{и} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y})^m}{m!}$$

равномерно конвергирају по $n \in \mathbb{N}$ па је, по Лебеговој теореми о доминантној конвергенцији,

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_t^{\beta_n}, \bullet x_t^{\beta_n}\rangle = \lim_{n\to+\infty} e^{t\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}}} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{t^m(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},x^{\beta_n}})^m}{m!} = e^{tK},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_t^{\beta_n}, \bullet y_t\rangle = \lim_{n\to+\infty} e^{t\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y}} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{t^m(\mathcal{L}^{x^{\beta_n},y})^m}{m!} = e^{tK_y}.$$

Према томе,

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_t^{\beta_n}, \bullet x_t^{\beta_n}\rangle = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} + tK + O(t^2), \tag{9.9}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_t^{\beta_n}, \bullet y_t\rangle = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} + tK_y + O(t^2). \tag{9.10}$$

Дакле, нашли смо језгра граничне вредности нашег Кошијевог низа. Сада бисмо могли одмах да применимо Став 5.1 који би нам обезбедио постојање јединице u_t са језгрима K, K_y. Међутим, остаје питање да ли та јединица задовољава услове Става 5.1 и, према томе, припада $\mathcal{U}$. Због тога морамо да нађемо други начин да добијемо u_t.

Нека је $\varepsilon > 0$. Како $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x_t^{\beta_n}, x_t^{\beta_n}\rangle$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x_t^{\beta_n}, y_t\rangle$ постоје у $\mathcal{B}$ (равномерно по y, $\|\langle y, y\rangle_1\| \le 1$), постоје $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ такви да

$$\|\langle x_t^{\beta_n}, x_t^{\beta_n}\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_1}}, x_t^{\beta_{n_1}}\rangle\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \ge n_1, \tag{9.11}$$

$$\|\langle x_t^{\beta_n}, y_t\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_2}}, y_t\rangle\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \ge n_2. \tag{9.12}$$

Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и $m, n \ge n_0$. На основу (9.11) и (9.12)

$$\begin{aligned}
\|x_t^{\beta_n} - x_t^{\beta_m}\|_{E_t}^2 &= \|\langle x_t^{\beta_n} - x_t^{\beta_m}, x_t^{\beta_n} - x_t^{\beta_m}\rangle\|_{\mathcal{B}} = \\
&= \|\langle x_t^{\beta_n}, x_t^{\beta_n}\rangle - \langle x_t^{\beta_m}, x_t^{\beta_m}\rangle + \\
&\qquad + \langle x_t^{\beta_m}, x_t^{\beta_m} - x_t^{\beta_n}\rangle + \langle x_t^{\beta_m} - x_t^{\beta_n}, x_t^{\beta_m}\rangle\| \le \\
&\le \|\langle x_t^{\beta_n}, x_t^{\beta_n}\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_0}}, x_t^{\beta_{n_0}}\rangle\| + \|\langle x_t^{\beta_m}, x_t^{\beta_m}\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_0}}, x_t^{\beta_{n_0}}\rangle\| + \\
&\qquad + 2\|\langle x_t^{\beta_m}, x_t^{\beta_m}\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_0}}, x_t^{\beta_{n_0}}\rangle\| + 2\|\langle x_t^{\beta_{n_0}}, x_t^{\beta_{n_0}}\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_0}}, x_t^{\beta_n}\rangle\| + \\
&\qquad + 2\|\langle x_t^{\beta_m}, x_t^{\beta_n}\rangle - \langle x_t^{\beta_{n_0}}, x_t^{\beta_n}\rangle\| < 8\varepsilon.
\end{aligned}$$

Одавде следи да је $(x_t^{\beta_n})$ конвергентан низ у Хилбертовом $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модулу E_t. Означимо његову граничну вредност

$$\lim_{n\to+\infty} x_t^{\beta_n} = u_t \in E_t. \tag{9.13}$$

На основу (9.9) и (9.10) добијамо

$$\langle u_t, \bullet u_t\rangle = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} + tK + O(t^2),$$

$$\langle u_t, \bullet y_t\rangle = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} + tK_y + O(t^2).$$

Да бисмо закључили да је u_t јединица, потребно је само да применимо лимес (кад $n \to \infty$) на једнакост

$$x_t^{\beta_n} \otimes x_s^{\beta_n} = x_{s+t}^{\beta_n}.$$

Из (9.7) и (9.8) видимо да важи

$$\lim_{n\to+\infty} \|\langle x^{\beta_n} - u, x^{\beta_n} - u\rangle_1\| = 0,$$

тј.

$$\lim_{n\to+\infty} [x^n] = [u]$$

у $\mathcal{U}/_\sim$. Дакле, $\mathcal{U}/_\sim$ је Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул.

Уколико је E потпросторни систем производа, можемо га утопити у просторни систем производа $\hat{E}$ са централном јединицом ω, а онда применити претходни случај. Једино остаје питање да ли гранична јединица припада $E \leq \hat{E}$. Међутим, потврдан одговор одмах следи на основу (9.13). □

Став 9.8. *Ако је E потпросторни систем производа, онда је $\mathcal{U}$ (алгебарски) изоморфно са* $\mathrm{ind}(E) \oplus \mathcal{B}$ *као десни $\mathcal{B}$-модул. Ако је E, поред тога, просторни систем производа, онда је $\mathcal{U}$ изоморфно са* $\mathrm{ind}(E) \oplus \mathcal{B}$ *као двострани $\mathcal{B}$-модул.*

Доказ. Можемо претпоставити да је ω унитална јединица. На основу претходне теореме и става, можемо конструисати кратак тачан низ Хилбертових модула

$$0 \to \mathcal{B} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{U} \overset{\pi}{\to} \mathrm{ind}(E) \to 0,$$

где је $i(\beta) = \omega^\beta$ и π је канонска пројекција. Показујемо да се низ цепа тако што конструишемо хомоморфизам $j : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$

$$j(x) = (\mathcal{L}^{x,\omega}(1))^* = \mathcal{L}^{\omega,x}(1).$$

Ово пресликавање задовољава

$$j(x+y) = (\mathcal{L}^{x,\omega}(1) + \mathcal{L}^{y,\omega}(1) - \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1))^* = j(x) + j(y),$$

$$j(x \cdot a) = (a^* \mathcal{L}^{x,\omega}(1) + (1-a^*)\mathcal{L}^{\omega,\omega}(1))^* = j(x)a$$

јер је ω унитална па је $\mathcal{L}^{\omega,\omega}(1) = 0$.

Ако је ω још и централна јединица, онда је

$$j(a \cdot x) = (\mathcal{L}^{x,\omega}(a^*) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1-a^*))^* = (\mathcal{L}^{x,\omega}(1)a^*)^* = aj(x)$$

јер важи $\mathcal{L}^{x,\omega}(a) = \mathcal{L}^{x,\omega}(1)a$ (Лема 9.4).

На крају, приметимо још да је $j \circ i(\beta) = j(\omega^\beta) = \beta$. □

Следећа последица је доказана у [6, Теорема 3.5.2] под додатном претпоставком да је $\mathcal{B}$ фон Нојманова алгебра и, у пуној општости, у [22, Теорема 5.2]. Овде дајемо њен једноставан доказ.

Последица 9.9. *Нека је x непрекидна јединица у неком систему производа E над $\mathcal{B}$. Ако се E може утопити у неки просторни систем производа, тада генератор потпуно позитивно дефинитне полугрупе $\langle x_t, bx_t \rangle$ има Кристенсен-Евансову форму, односно*

$$\mathcal{L}^{x,x}(b) = \langle \zeta_x, b\zeta_x \rangle + \beta_x^* b + b\beta_x,$$

где је ζ_x елемент неког двостраног Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула и $\beta_x \in \mathcal{B}$.

Штавише, генератор од $\langle x_t, by_t \rangle$ има форму

$$\mathcal{L}^{x,y}(b) = \langle \zeta_x, b\zeta_y \rangle + \beta_x^* b + b\beta_y.$$

Доказ. Нека $E \leq \hat{E}$ и нека је ω централна унитална јединица у $\hat{E}$. Према (6.4), директан рачун даје

$$\langle x, b \cdot y \rangle_1 = \mathcal{L}^{x,b\cdot y}(1) - \mathcal{L}^{x,\omega}(1) - \mathcal{L}^{\omega,b\cdot y}(1) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1) =$$

$$= (\mathcal{L}^{b\cdot y,x}(1))^* - \mathcal{L}^{x,\omega}(1) - (\mathcal{L}^{b\cdot y,\omega}(1))^* + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1) =$$

$$= \mathcal{L}^{x,y}(b) - \mathcal{L}^{x,\omega}(b) - \mathcal{L}^{\omega,y}(b) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(b).$$

Користећи чињеницу да је ω централна и унитална, добијамо

$$\mathcal{L}^{x,\omega}(b) = \mathcal{L}^{x,\omega}(1)b = j(x)^*b,$$

$$\mathcal{L}^{\omega,y}(b) = b\mathcal{L}^{\omega,y}(1) = bj(y),$$

$$\mathcal{L}^{\omega,\omega}(b) = 0,$$

где је j пресликавање из Става 9.8. Према томе, важи

$$\mathcal{L}^{x,y}(b) = \langle x, b \cdot y \rangle_1 + j(x)^*b + bj(y) = \langle [x], b[y] \rangle_1 + j(x)^*b + bj(y).$$

□

10 Примери, примедбе

Следећи пример показује да је индекс система производа двостраних Хилбертових модула над C^*-алгебром $\mathcal{B}$, који је дефинисан у Поглављу 6, уопштење појма индекса система производа који је увео Арвесон (у случају $\mathcal{B} = \mathbb{C}$). (Видети и Примедбу 6.11).

Пример 10.1. Нека је E Арвесонов систем производа, тј. систем производа над $\mathbb{C}$. Тада је $\mathcal{U}/_\sim$ изоморфно векторском простору димензије $\operatorname{ind}(E)$.

Заиста, како сваки Арвесонов систем производа садржи јединствени максимални подсистем типа I истог индекса (систем генерисан свим јединицама), можемо претпоставити да је E генерисан неким непрекидним скупом јединица. Арвесон је доказао ([2, Теорема 6.7.1, Став 3.1.5]) да је E изоморфно конкретном систему производа CCR тока ранга $n = \operatorname{ind}(E)$ који делује на $\mathcal{B}(e^{L^2((0,\infty),K)})$, где је K Хилбертов простор димензије n. Према Примеру 1.19, $\mathcal{U}/_\sim = \{[U^\zeta],\ \zeta \in K\}$, где су U^ζ јединице дефинисане

$$U_t^\zeta(\exp(f)) = \exp(\chi_{(0,t)} \otimes \zeta + S_t f),\ t \geq 0,\ f \in L^2((0,\infty),K)$$

и (S_t) је шифт-полугрупа индекса n која делује на $L^2((0,\infty),K)$ као

$$S_t f(x) = \begin{cases} f(x-t), & x > t \\ 0, & 0 < x \leq t. \end{cases}$$

Узимајући јединицу U^0 за ω, видимо да важи

$$\left\langle [U^\zeta], [U^\eta] \right\rangle_1 = \left\langle U^\zeta, U^\eta \right\rangle_1 =$$

$$= \mathcal{L}^{U^\zeta,U^\eta}(1) - \mathcal{L}^{U^\zeta,U^0}(1) - \mathcal{L}^{U^0,U^\eta}(1) + \mathcal{L}^{U^0,U^0}(1) = \langle \zeta, \eta \rangle_K$$

јер је, на пример,

$$\mathcal{L}^{U^\zeta,U^\eta}(1) = \lim_{t\to 0} \frac{\left\langle U_t^\zeta, U_t^\eta \right\rangle - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tc(U^\zeta,U^\eta)} - 1}{t} = c(U^\zeta, U^\eta) = \langle \zeta, \eta \rangle_K\,,$$

на основу (1.10) и (1.15).

Приметимо да важи

$$\left\langle [U^{\zeta+\eta}] - [U^\zeta + U^\eta], [U^{\zeta+\eta}] - [U^\zeta + U^\eta] \right\rangle_1 = 0$$

и

$$\left\langle [U^{a\zeta}] - [aU^{\zeta}], [U^{a\zeta}] - [aU^{\zeta}] \right\rangle_1 = 0, \quad a \in \mathbb{C},$$

одакле добијамо $[U^{\zeta+\eta}] = [U^{\zeta} + U^{\eta}]$ и $[U^{a\zeta}] = [aU^{\zeta}]$. Према томе, пресликавање $K \ni \zeta \mapsto [U^{\zeta}] \in \mathcal{U}/_{\sim}$ је изоморфизам.

Како је векторски простор потпуно одређен својом димензијом (до на изоморфизам), можемо сматрати Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул $\operatorname{ind}(E)$ одговарајућим уопштењем индекса.

Временски уређени Фокови модули

Временски уређене Фокове модуле први уводе Бат[6] и Скајде у [9], као основне примере система производа Хилбертових модула, што паралелно одговара томе да су симетрични Фокови простори основни примери Арвесонових система производа Хилбертових простора. Детаљно изучавање временски уређених Фокових модула спроводе Либшер и Скајде и резултате приказују у [15]. Непрекидне јединице временски уређеног Фоковог модула су управо експоненцијалне јединице и њихове ренормализације, што одговара случају симетричних Фокових простора, осим што је сада ренормализација јединица знатно компликованија због некомутативности C^*-алгебре $\mathcal{B}$ у општем случају.

Нека је F Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул. Простор $L^2(\mathbb{R}_+, F)$ има структуру Хилбертовог $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула. Пун Фоков модул над $L^2(\mathbb{R}_+, F)$ је дефинисан као

$$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+, F)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}_+, F)^{\otimes n},$$

где је $L^2(\mathbb{R}_+, F)^{\otimes 0} = \mathcal{B}$ и $\omega = 1 \in L^2(\mathbb{R}_+, F)^{\otimes 0}$ представља вакуум. За $n \in \mathbb{N}$ је $L^2(\mathbb{R}_+, F)^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}_+^n, F^{\otimes n})$.
Нека је Δ_n карактеристична функција скупа

$$\{(t_n, \dots, t_1) : t_n > \dots > t_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+^n.$$

Δ_n делује као пројектор на $L^2(\mathbb{R}_+^n, F^{\otimes n})$ и Δ_0 је идентитет на вакууму. Нека је $\Delta = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. Временски уређен Фоков модул је двострани подмодул

$$\mathbb{\Gamma}(F) = \Delta \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+, F))$$

[6]B. V. Rajarama Bhat

у $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+, F))$.
Нека је $\mathbb{I}\Gamma_t(F)$ рестрикција $\mathbb{I}\Gamma(F)$ на $[0,t)$, тј. $\mathbb{I}\Gamma_t(F)$ чине функције које су на n-том нивоу различите од нуле само на $[0,t)^n$. Временски уређени Фокови модули $\mathbb{I}\Gamma_t(F)$ чине систем производа, заједно са изоморфизмима

$$\varphi_{s,t} : \mathbb{I}\Gamma_s(F) \otimes \mathbb{I}\Gamma_t(F) \to \mathbb{I}\Gamma_{s+t}(F)$$

који су дефинисани

$$[\varphi_{s,t}(F_s \otimes G_t)](s_m, \dots, s_1, t_n, \dots, t_1) = F_s(s_m - t, \dots, s_1 - t) \otimes G_t(t_n, \dots, t_1),$$

за $s + t > s_m > \cdots > s_1 \geq t > t_n > \cdots > t_1 \geq 0$ ([24, Теорема 7.1.3]).

$\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F) = (\mathbb{I}\Gamma_t(F))_{t \in \mathbb{R}_+}$ је временски уређен систем производа над F. Он има централну униталну јединицу $\omega = 1$ (вакуум) па је, према томе, просторни систем производа. Међутим, $\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)$ има још много других јединица. У [15, Теорема 3 и Теорема 6] доказује се да су све непрекидне јединице у $\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)$ параметризоване скупом $F \times \mathcal{B}$. Јединица која одговара уређеном пару (ζ, β) је $u(\zeta, \beta) = (u_t(\zeta, \beta))_{t \in \mathbb{R}_+}$, где је је n-та компонента u_t^n од $u_t(\zeta, \beta) \in \mathbb{I}\Gamma_t(F)$ дефинисана

$$u_t^n(t_n, \dots, t_1) = e^{(t-t_n)\beta} \zeta \otimes e^{(t_n - t_{n-1})\beta} \zeta \otimes \cdots \otimes e^{(t_2 - t_1)\beta} \zeta e^{t_1 \beta}$$

и $u_t^0 = e^{t\beta}$ је униформно непрекидна полугрупа у $\mathcal{B}$ са генератором $\beta \in \mathcal{B}$. Ако се изаберу $\beta = 0$ и $\zeta \in F$ произвољно, добијају се експоненцијалне јединице $u(\zeta, 0)$ које рескалирањем помоћу полугрупе $e^{t\beta}$ ($\beta \in \mathcal{B}$ произвољно), дају све остале непрекидне јединице $u(\zeta, \beta)$.

Функција $t \mapsto u_t \in \mathbb{I}\Gamma(F)$ и полугрупа $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t^{(\zeta,\beta),(\zeta',\beta')})$, где

$$\mathcal{B} \ni b \mapsto \mathcal{K}_t^{(\zeta,\beta),(\zeta',\beta')}(b) = \langle u_t(\zeta, \beta), b u_t(\zeta', \beta') \rangle \,,$$

су униформно непрекидне. Генератор $\mathcal{L}$ полугрупе $\mathcal{K}$ је

$$\mathcal{L}^{u(\zeta,\beta),u(\zeta',\beta')}(b) = \langle \zeta, b\zeta' \rangle + \beta^* b + b\beta' \quad (b \in \mathcal{B}). \tag{10.1}$$

Као што важи за Арвесонов систем производа типа I, временски уређен систем производа је генерисан својим експоненцијалним јединицама.

У [25, Теорема 6.3] Скајде показује да за сваки просторни систем производа над $\mathcal{B}$ постоји (јединствени до на двострани изоморфизам) Хилбертов $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модул F, такав да је максималан потпуно просторни подсистем полазног система производа изоморфан са $\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)$. (Систем производа је потпуно просторни ако је генерисан скупом јединица који садржи централну униталну јединицу - видети Дефиницију 4.7). Заправо, потпуно просторни системи производа Хилбертових $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула су временски уређени. Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул F се сматра индексом просторног система производа.

Наредни пример говори о томе да индекс система производа који је дефинисан у Поглављу 6, уопштава појам индекса просторних система производа који је увео Скајде [25].

Пример 10.2. Нека је F Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул. Тада је

$$\operatorname{ind}(\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)) \cong F$$

као Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул.

Узимајући у обзир операције у $\mathcal{U}_{\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)}$ (дефинисане у Поглављу 6) и упоређујући језгра, закључујемо да је пресликавање

$$F \times \mathcal{B} \ni (\zeta, \beta) \mapsto u(\zeta, \beta) \in \mathcal{U}_{\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)}$$

(алгебарски) изоморфизам модула, уколико изаберемо $\omega = u(0,0)$.

Такође, лако се показује да је

$$u(\zeta, \beta)^{\gamma} = u(\zeta, \beta + \gamma). \tag{10.2}$$

Наиме, користећи (5.3) и (10.1) видимо да за произвољно $u(\eta, \alpha) \in \mathcal{U}_{\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)}$ важи

$$\mathcal{L}^{u(\zeta,\beta)^{\gamma}, u(\eta,\alpha)}(b) = \mathcal{L}^{u(\zeta,\beta), u(\eta,\alpha)}(b) + \gamma^* b = \langle \zeta, b\eta \rangle + \beta^* b + b\alpha + \gamma^* b,$$

$$\mathcal{L}^{u(\zeta,\beta+\gamma), u(\eta,\alpha)}(b) = \langle \zeta, b\eta \rangle + \beta^* b + \gamma^* b + b\alpha$$

и примена Леме 5.5 даје једнакост јединица у (10.2). Према томе,

$$\mathcal{U}_{\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)}/_{\sim} = \{[u(\zeta, 0)] \mid \zeta \in F\}$$

па је $\operatorname{ind}(\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F)) \cong F$ у алгебарском смислу.

На основу (10.1) видимо да је

$$\langle u(\zeta,\beta),u(\zeta',\beta')\rangle_1 = \mathcal{L}^{u(\zeta,\beta),u(\zeta',\beta')}(1) - \mathcal{L}^{u(\zeta,\beta),u(0,0)}(1) - \\ - \mathcal{L}^{u(0,0),u(\zeta',\beta')}(1) + \mathcal{L}^{u(0,0),u(0,0)}(1) = \langle \zeta,\zeta'\rangle .$$

Дакле, $\mathrm{ind}(\mathbb{I}\Gamma^{\otimes}(F))$ је изоморфан са F као двострани Хилбертов модул.

Сада следи пример система производа без централне јединице.

Пример 10.3. У [6, Пример 4.2.4] дат је пример система производа који нема ниједну централну јединицу. Овде наводимо детаље и рачунамо индекс тог система производа.

Нека је $\mathcal{B} = K(G) + \mathbb{C}1$ $(1 = \mathrm{id}_G)$ унитализација C^*-алгебре компактних оператора на неком бесконачно димензионом Хилбертовом простору G и нека је $h \in B(G)$ самоадјунговани оператор. Посматрамо Хилбертове $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модуле $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ као десне Хилбертове $\mathcal{B}$-модуле, заједно са левим множењем

$$b \cdot x_t = e^{ith} b e^{-ith} x_t,\ b \in \mathcal{B}.$$

Они формирају систем производа $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ са идентификацијом

$$x_s \otimes y_t = e^{ith} x_s e^{-ith} y_t.$$

Систем производа $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ је генерисан јединицом $1_t \equiv 1$ па је, према томе, типа I. Такође, $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ нема централну јединицу ако и само ако $h \notin \mathcal{B}$.

За сваку централну јединицу $\xi = (\xi_t)$, $\xi_t \in \mathcal{B}_t$ мора да важи

$$b \cdot \xi_t = e^{ith} b e^{-ith} \xi_t = \xi_t b, \quad \text{тј.} \quad b e^{-ith} \xi_t = e^{-ith} \xi_t b,\ b \in \mathcal{B}.$$

Како је центар алгебре $\mathcal{B}$ тривијалан, $e^{-ith}\xi_t$ је умножак идентичког оператора па је ξ_t умножак од e^{ith}. Ако су ξ_t различити од нуле, они могу да се нормализују тако да буде $\xi_t = e^{ith}$. Сада следи да $h = -i\frac{\xi_t}{dt}|_{t=0}$ припада $\mathcal{B}$. Дакле, ако $h \notin \mathcal{B}$, онда систем производа $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ нема централну јединицу.

Израчунајмо сада индекс система производа $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$. Нека је ξ_t произвољна непрекидна јединица и нека је $\xi'_t = e^{-ith}\xi_t$. Очигледно, ξ'_t је униформно непрекидна фамилија. Видимо да важи

$$\xi'_{s+t} = e^{-i(s+t)h}\xi_s \otimes \xi_t = e^{-i(s+t)h}e^{ith}\xi_s e^{-ith}\xi_t = \xi'_s\xi'_t.$$

Из тога следи да је $\xi'_t = e^{tB_\xi}$ за неки ограничен оператор B_ξ на G. Нека је $A_\xi = B_\xi + ih$. Сада добијамо да је свака непрекидна јединица у $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ облика

$$\xi_t = e^{ith}e^{t(A_\xi - ih)}, \tag{10.3}$$

за неко A_ξ. Штавише, налазимо да је

$$A_\xi = \lim_{t\to 0+}\left[\frac{e^{ith}-1}{t}e^{t(A_\xi-ih)} + \frac{e^{t(A_\xi-ih)}-1}{t}\right] = \lim_{t\to 0+}\frac{e^{ith}e^{t(A_\xi-ih)}-1}{t} \in \mathcal{B}$$

јер последњи разломак припада $\mathcal{B}$ и, како су експоненцијалне функције аналитичке, конвергенција је равномерна.

Изаберимо јединицу ω за коју је $A_\omega = 0$. Према (10.3), $\omega_t = 1$.
За произвољне $\xi, \eta \in \mathcal{U}$ и $b \in \mathcal{B}$ важи

$$\begin{aligned}\langle \xi_t, b\cdot\eta_t\rangle = \left\langle e^{ith}e^{t(A_\xi-ih)}, e^{ith}be^{-ith}e^{ith}e^{t(A_\eta-ih)}\right\rangle =\\ = (e^{ith}e^{t(A_\xi-ih)})^*e^{ith}be^{t(A_\eta-ih)} = e^{t(A_\xi^*+ih)}be^{t(A_\eta-ih)}.\end{aligned}$$

На основу тога добијамо

$$\mathcal{L}^{\xi,\eta}(b) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t(A_\xi^*+ih)}be^{t(A_\eta-ih)}-b}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^{t(A_\xi^*+ih)}b(e^{t(A_\eta-ih)}-1) + (e^{t(A_\xi^*+ih)}-1)b}{t} = b(A_\eta - ih) + (A_\xi^* + ih)b.$$

Према томе је

$$\langle [\xi], [\eta]\rangle_1 = \langle \xi, \eta\rangle_1 = \mathcal{L}^{\xi,\eta}(1) - \mathcal{L}^{\xi,\omega}(1) - \mathcal{L}^{\omega,\eta}(1) + \mathcal{L}^{\omega,\omega}(1) = 0,$$

за све $[\xi], [\eta] \in \mathcal{U}/_\sim$. Дакле, $\mathcal{U}/_\sim = \{0\}$.

Примедба 10.4. Управо поменути пример показује да системи производа, чак иако су типа I, не могу бити класификовани на основу индекса. Наиме, за $h \in \mathcal{B}$ систем призвода из тог примера има централну јединицу, док је за $h \notin \mathcal{B}$

нема. Према томе, такви системи производа нису изоморфни упркос чињеници да имају исти индекс.

11 Системи инклузија Хилбертових модула

У овом поглављу уопштавамо појам система инклузија Хилбертових простора који је дефинисан у [8], тако што посматрамо систем инклузија двостраних Хилбертових модула и показујемо да, у одређеним случајевима, неке од особина остају да важе [31].

Системи инклузија Хилбертових простора су параметарске фамилије Хилбертових простора, сличне системима производа, са разликом у томе што су унитарна пресликавања која повезују одговарајуће Хилбертове просторе замењена изометријама. Заправо, ови објекти су доста присутни у самој теорији система производа. Придруживање система производа CP-полугрупама се остварује тако што се прво формира одређени систем инклузија, а потом се, помоћу технике индуктивних лимеса, добија систем производа (детаљи се могу видети у [9]). У [8] су дефинисани системи инклузија Хилбертових простора и употребљена је суштина поменутог поступка (из [9]) да се докаже да сваки систем инклузија индукује систем производа деловањем индуктивних лимеса. Такође је истакнуто да се главне особине система производа, као што су нпр. постојање јединица и структура морфизама, могу видети на нивоу система инклузија.

О системима инклузија се, отприлике у исто време, говори у [20], али под називом "системи потпроизвода". Разматра се њихова општа теорија и, такође, веза са потпуно позитивним (CP) полугрупама. С обзиром на то да постоји опасност од забуне међу терминима "системи потпроизвода" и "подсистеми производа", користимо термин "системи инклузија".

У циљу уопштења појма система инклузија Хилбертових простора и добијања неких сличних резултата у том општијем случају, посматрамо системе инклузија двостраних Хилбертових модула над C^*-алгебром компактних оператора на неком Хилбертовом простору H, тј. над $\mathcal{B} = K(H)$. Познато је да сваки ограничен $\mathcal{B}$-линеаран оператор на Хилбертовом $\mathcal{B}$-модулу има адјунговани оператор (следи из [17], [11]).

C^*-алгебра $\mathcal{B}$ није унитална осим у случају када је H коначне димензије. Током овог поглавља, C^*-алгебру $\mathcal{B} = K(H)$ зовемо матрична алгебра уколико је Хилбертов простор H коначне димензије.

Дефиниција 11.1. H^*-алгебра $\mathcal{I}$ је Банахова алгебра $\mathcal{I}$ са инволуцијом $x \mapsto x^*$ која је уједно и Хилбертов простор са скаларним производом $(\cdot,\cdot) : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ за који важи

$$(xy, z) = (y, x^*z) = (x, zy^*), \quad x, y, z \in \mathcal{I}.$$

Пример 11.2. Идеал Хилберт-Шмитових оператора на Хилбертовом простору H, у ознаци $\mathcal{C}_2$, је H^*-алгебра где је скаларни производ $(\cdot,\cdot) \to \mathbb{C}$ дефинисан са

$$(A, B) = tr(A^*B), \quad A, B \in \mathcal{C}_2.$$

Дефиниција Хилбертовог H^*-модула над H^*-алгебром $\mathcal{I}$ (видети [4]) у случају када је $\mathcal{I} = \mathcal{C}_2$ је

Дефиниција 11.3. Хилбертов $\mathcal{C}_2$-модул W је десни $\mathcal{C}_2$-модул снабдевен скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle : W \times W \to \mathcal{C}_1$ ($\mathcal{C}_1$ је идеал нуклеарних оператора на Хилбертовом простору H) за који важи:

1. $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in W$;
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $x, y, z \in W$;
3. $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$, $a \in \mathcal{C}_2$, $x, y \in W$;
4. $\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle$, $x, y \in W$;
5. $\forall x \in W$ $(x \neq 0)$ $\exists a \in \mathcal{C}_2$ $(a \neq 0)$ тако да важи $\langle x, x\rangle = a^*a$;
6. W је Хилбертов простор са скаларним производом $(x, y) = tr(\langle x, y\rangle)$.

У [5], Дамир Бакић и Борис Гуљаш описују Хилбертове C^*-модуле над C^*-алгебром компактних оператора на неком Хилбертовом простору. Ти резултати су наведени у Ставу 1 поменутог рада и у коментарима који му претходе. Овде их цитирамо у Ставу 11.4 и непосредно пре њега.

Нека је E произвољан Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром свих компактних оператора на неком Хилбертовом простору H (видети Дефиницију 3.1). Нека је

$$E^0_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{L}(E\mathcal{C}_2)$$

линеарни омотач скупа $E\mathcal{C}_2 = \{xa,\ x \in E,\ a \in \mathcal{C}_2\}$. Очигледно, $E^0_{\mathcal{C}_2}$ је подмодул у E и у исто време је (десни) модул над H^*-алгебром $\mathcal{C}_2$. Скаларни производ у E, примењен на елементе из $E^0_{\mathcal{C}_2}$, има вредност у $\mathcal{C}_1$. На основу тога, $E^0_{\mathcal{C}_2}$ је снабдевено скаларним производом $(\cdot,\cdot) = tr(\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Означимо норму индуковану овим скаларним производом:

$$\|x\|^2_{\mathcal{C}_2} = tr(\langle x, x\rangle),\ x \in E^0_{\mathcal{C}_2}.$$

Сада је јасно да важи

$$\|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{C}_2},\ x \in E^0_{\mathcal{C}_2},$$

где је $\|\cdot\|$ норма у Хилбертовом C^*-модулу E.

Став 11.4. *Нека је E Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром $\mathcal{B} = K(H)$, за неки Хилбертов простор H. Тада постоји Хилбертов H^*-модул*

$$E_{\mathcal{C}_2} = \overline{E^0_{\mathcal{C}_2}}^{\mathcal{C}_2} \subset E$$

над H^*-алгебром $C_2 \subset K(H)$, са нормом $\|x\|^2_{\mathcal{C}_2} = tr(\langle x, x\rangle)$. За све $x \in E_{\mathcal{C}_2}$ важи $\|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{C}_2}$. Подмодул $E_{\mathcal{C}_2}$ је густ у E у односу на норму $\|\cdot\|$ из E.

Примедба 11.5. Скаларни производ $(\cdot,\cdot) = tr(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ снабдева Хилбертов H^*-модул $E_{\mathcal{C}_2}$ структуром Хилбертовог простора.

11.1 Системи инклузија и генерисани системи производа

Овде наводимо дефиницију система инклузија двостраних Хилбертових модула над $\mathcal{B}$ и показујемо како сваки систем инклузија генерише одговарајући систем производа помоћу индуктивних лимеса. Та техника се не разликује битно од оне приказане у [8].

Дефиниција 11.6. Систем инклузија (E, β) је фамилија Хилбертових $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модула $E = \{E_t, t > 0\}$, заједно са фамилијом двостраних ($\mathcal{B}-\mathcal{B}$ линеарних) изометрија

$$\beta_{s,t} : E_{s+t} \to E_s \otimes E_t, \quad s, t > 0, \tag{11.1}$$

таквих да важи

$$(\beta_{r,s} \otimes I_{E_t})\beta_{r+s,t} = (I_{E_r} \otimes \beta_{s,t})\beta_{r,s+t}.$$

Тензорски производ у (11.1) је унутрашњи тензорски производ (видети Дефиницију 4.1 (а)). (E, β) је систем производа ако су сва пресликавања $\beta_{s,t}$ унитарна.

Нека је (E, β) систем инклузија. За $t > 0$, скуп подела интервала $(0, t)$, у ознаци J_t, дефинисан је

$$J_t = \{(t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) |\ t_i > 0,\ t_1 + \cdots + t_n = t,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

За свако $\mathfrak{t} = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) \in J_t$, дужина се дефинише као $|\mathfrak{t}| := t_1 + \cdots + t_n = t$.

За $\mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \dots, s_1) \in J_s$ и $\mathfrak{t} = (t_n, t_{n-1}, \dots t_1) \in J_t$, дефинише се заједнички пар $\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t} \in J_{s+t}$ као

$$\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t} = (s_m, s_{m-1}, \dots, s_1, t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) \in J_{s+t}.$$

(Ову операцију можемо назвати операција надовезивања подела.) На скупу J_t постоји парцијално уређење: $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \dots, s_1)$ ако за свако $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ постоји (јединствено) $\mathfrak{s}_i \in J_{s_i}$ такво да је

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{s}_m \smile \mathfrak{s}_{m-1} \smile \cdots \smile \mathfrak{s}_1.$$

За $\mathfrak{t} = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) \in J_t$, дефинишемо

$$E_{\mathfrak{t}} = E_{t_n} \otimes E_{t_{n-1}} \otimes \cdots \otimes E_{t_1}.$$

За $\mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \dots, s_1) \leq \mathfrak{t} = \mathfrak{s}_m \smile \mathfrak{s}_{m-1} \smile \cdots \smile \mathfrak{s}_1 \in J_t$, дефинише се $\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}} : E_{\mathfrak{s}} \to E_{\mathfrak{t}}$ на следећи начин:

$$\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}} = \beta_{\mathfrak{s}_m, s_m} \otimes \beta_{\mathfrak{s}_{m-1}, s_{m-1}} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{s}_1, s_1}, \tag{11.2}$$

где је $\beta_{\mathfrak{s},s} : E_s \to E_{\mathfrak{s}}$ дефинисано индуктивно као

$$\beta_{s,s} = I_{E_s},$$

а за $\mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \dots, s_1) \in J_s$,

$$\beta_{\mathfrak{s},s} = (\beta_{s_m, s_{m-1}} \otimes I)(\beta_{s_m + s_{m-1}, s_{m-2}} \otimes I) \dots (\beta_{s_m + \cdots + s_3, s_2} \otimes I)\beta_{s_m + \cdots + s_2, s_1}. \tag{11.3}$$

Лема 11.7. *За $t > 0$ посматрајмо парцијално уређен скуп J_t који је управо дефинисан. Фамилија $(E_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t} \in J_t}$, заједно са фамилијом пресликавања $(\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \leq \mathfrak{t}}$, је индуктивни систем двостраних Хилбертових $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модула у смислу да важи*

1. $\beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}} = I_{E_\mathfrak{s}},\ \mathfrak{s} \in J_t$*;*

2. $\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{r}} = \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{r}},\ \mathfrak{r} \leq \mathfrak{s} \leq \mathfrak{t} \in J_t$*.*

Доказ. Једино је (2) потребно доказати.
Нека су $\mathfrak{r} = (r_n, \dots, r_1)$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_n \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_1$, где $\mathfrak{r}_i = (r_{ik_i}, \dots, r_{i1}),\ 1 \leq i \leq n$. Дакле,

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{r}_{nk_n} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{n1}) \smile (\mathfrak{r}_{(n-1)k_{n-1}} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{(n-1)1}) \smile \cdots$$
$$\cdots \smile (\mathfrak{r}_{1k_1} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{11}).$$

Сада је

$$\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{r}} = \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}(\beta_{\mathfrak{r}_n,r_n} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{r}_1,r_1}) =$$
$$= [\beta_{\mathfrak{r}_{nk_n},r_{nk_n}} \otimes \beta_{\mathfrak{r}_{nk_{n-1}},r_{nk_{n-1}}} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{r}_{n1},r_{n1}} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{r}_{1k_1},r_{1k_1}} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{r}_{11},r_{11}}]$$
$$(\beta_{\mathfrak{r}_n,r_n} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{r}_1,r_1}) =$$
$$= [\beta_{(\mathfrak{r}_{nk_n} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{n1}),\mathfrak{r}_n} \otimes \beta_{(\mathfrak{r}_{(n-1)k_{n-1}} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{(n-1)1}),\mathfrak{r}_{n-1}} \otimes \cdots \otimes \beta_{(\mathfrak{r}_{1k_1} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{11}),\mathfrak{r}_1}]$$
$$(\beta_{\mathfrak{r}_n,r_n} \otimes \cdots \otimes \beta_{\mathfrak{r}_1,r_1}) =$$
$$= \beta_{(\mathfrak{r}_{nk_n} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{n1}),r_n} \otimes \beta_{(\mathfrak{r}_{(n-1)k_{n-1}} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{(n-1)1}),r_{n-1}} \otimes \cdots \otimes \beta_{(\mathfrak{r}_{1k_1} \smile \cdots \smile \mathfrak{r}_{11}),r_1} =$$
$$= \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{r}}.$$

□

Теорема 11.8. *Нека је (E, β) систем инклузија (Дефиниција 11.6), где је $\mathcal{B}$ матрична алгебра. За свако $t > 0$, нека је*

$$\mathcal{E}_t = \operatorname*{indlim}_{\mathfrak{s} \in J_t} E_\mathfrak{s}$$

индуктивни лимес фамилије $(E_\mathfrak{s})_{\mathfrak{s} \in J_t}$ над J_t. Фамилија $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_t |\ t > 0\}$ има структуру система производа Хилбертових модула.

Примедба 11.9. Подсетимо се основних особина конструкције индуктивног лимеса:

1. Постоје канонске изометрије $i_\mathfrak{s} : E_\mathfrak{s} \to \mathcal{E}_t$ које задовољавају $i_\mathfrak{s}\beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{r}} = i_\mathfrak{r}$ за $\mathfrak{r}, \mathfrak{s} \in J_t,\ \mathfrak{r} \leq \mathfrak{s}$.

2. За $t > 0$, $\mathcal{E}_t = \overline{\operatorname{span}}\{i_\mathfrak{s}(a) : a \in E_\mathfrak{s},\ \mathfrak{s} \in J_t\}$.

3. Универзално својство: За дати двострани Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул J и изометрије $j_{\mathfrak{s}} : E_{\mathfrak{s}} \to J$ такве да важи $j_{\mathfrak{s}}\beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{r}} = j_{\mathfrak{r}}$ за све $\mathfrak{r} \le \mathfrak{s}$, постоји тачно једна изометрија $j : \mathcal{E}_t \to J$ таква да је $j_{\mathfrak{s}} = ji_{\mathfrak{s}}$ за све $\mathfrak{s} \in J_t$.

4. Нека $K \subset J_t$ има следеће својство: За све $\mathfrak{s} \in J_t$ постоји $\mathfrak{t} \in K$ такво да је $\mathfrak{s} \le \mathfrak{t}$. Тада скуп K наслеђује уређење из J_t и $K \hookrightarrow J_t$ је кофинална функција. Важи $\operatorname*{indlim}_{\mathfrak{s}\in J_t} E_{\mathfrak{s}} = \operatorname*{indlim}_{\mathfrak{s}\in K} E_{\mathfrak{s}}$.

Доказ. На основу [9, Став A.10], $\mathcal{E}_t$ је Хилбертов $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ модул. Такође, према [9, Примедба A.7], свако $i_{\mathfrak{s}} : E_{\mathfrak{s}} \to \mathcal{E}_t,\ \mathfrak{s} \in J_t$, је двострана изометрија.

За $s, t > 0$ дефинише се скуп $J_s \smile J_t = \{\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t} |\ \mathfrak{s} \in J_s,\ \mathfrak{t} \in J_t\}$. За било који елемент $\mathfrak{r} \in J_{s+t}$, постоје $\mathfrak{s} \in J_s$ и $\mathfrak{t} \in J_t$ такви да је $\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t} \ge \mathfrak{r}$. Како је $J_{\mathfrak{s}} \smile J_{\mathfrak{t}} \subset J_{s+t}$, према својству (4) конструкције индуктивног лимеса важи

$$\mathcal{E}_{s+t} = \operatorname*{indlim}_{\mathfrak{r}\in J_{s+t}} E_{\mathfrak{r}} = \operatorname*{indlim}_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}\in J_s\smile J_t} E_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}} = \operatorname*{indlim}_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}\in J_s\smile J_t} E_{\mathfrak{s}} \otimes E_{\mathfrak{t}}.$$

За $\mathfrak{s} \in J_s,\ \mathfrak{t} \in J_t$ посматрајмо пресликавање $i_{\mathfrak{s}} \otimes i_{\mathfrak{t}} : E_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}} \to \mathcal{E}_s \otimes \mathcal{E}_t$, где су $i_{\mathfrak{s}} : E_{\mathfrak{s}} \to \mathcal{E}_s,\ i_{\mathfrak{t}} : E_{\mathfrak{t}} \to \mathcal{E}_t$ канонске изометрије. Приметимо да из

$$\mathfrak{s}' \smile \mathfrak{t}' \le \mathfrak{s} \smile \mathfrak{t} \in J_s \smile J_t \quad \text{следи} \quad \mathfrak{s}' \le \mathfrak{s},\ \mathfrak{t}' \le \mathfrak{t}.$$

Сада, како је $\beta_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t},\mathfrak{s}'\smile\mathfrak{t}'} = \beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'} \otimes \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}'}$, видимо да важи

$$(i_{\mathfrak{s}} \otimes i_{\mathfrak{t}})\beta_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t},\mathfrak{s}'\smile\mathfrak{t}'} = i_{\mathfrak{s}}\beta_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'} \otimes i_{\mathfrak{t}}\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}'} = i_{\mathfrak{s}'} \otimes i_{\mathfrak{t}'}.$$

На основу универзалног својства закључујемо да постоји јединствена изометрија

$$B_{s,t} : \mathcal{E}_{s+t} \to \mathcal{E}_s \otimes \mathcal{E}_t, \text{ таква да } B_{s,t}i_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}} = i_{\mathfrak{s}} \otimes i_{\mathfrak{t}}. \tag{11.4}$$

На основу особине (2) конструкције индуктивног лимеса, јасно је да је $B_{s,t}$ унитарно пресликавање.

На крају, да бисмо добили још $(B_{r,s} \otimes I_{\mathcal{E}_t})B_{r+s,t} = (I_{\mathcal{E}_r} \otimes B_{s,t})B_{r,s+t}$, довољно је да посматрамо векторе облика $i_{\mathfrak{r}\smile\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}}(x \otimes y \otimes z),\ x \in E_{\mathfrak{r}},\ y \in E_{\mathfrak{s}},\ z \in E_{\mathfrak{t}}$. Видимо да важи

$$(B_{r,s} \otimes I_{\mathcal{E}_t})B_{r+s,t}i_{\mathfrak{r}\smile\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}}(x \otimes y \otimes z) = (B_{r,s} \otimes I_{\mathcal{E}_t})(i_{\mathfrak{r}\smile\mathfrak{s}}(x \otimes y) \otimes i_{\mathfrak{t}}(z)) =$$

$$= B_{r,s} i_{\mathfrak{r} \smile \mathfrak{s}}(x \otimes y) \otimes i_{\mathfrak{t}}(z) = i_{\mathfrak{r}}(x) \otimes i_{\mathfrak{s}}(y) \otimes i_{\mathfrak{t}}(z),$$

и, са друге стране,

$$(I_{\mathcal{E}_r} \otimes B_{s,t}) B_{r,s+t} i_{\mathfrak{r} \smile \mathfrak{s} \smile \mathfrak{t}}(x \otimes y \otimes z) = (I_{\mathcal{E}_r} \otimes B_{s,t})(i_{\mathfrak{r}}(x) \otimes i_{\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t}}(y \otimes z)) =$$

$$= i_{\mathfrak{r}}(x) \otimes i_{\mathfrak{s}}(y) \otimes i_{\mathfrak{t}}(z).$$

□

Дефиниција 11.10. Систем производа $(\mathcal{E}, B)$ који је конструисан у претходној теореми се зове систем производа генерисан системом инклузија (E, β).

Примедба 11.11. Ако је (E, β) већ систем производа, онда он генерише сам себе.

11.2 Јединице система инклузија

У овом потпоглављу говоримо о морфизмима између система инклузија и о јединицама система инклузија.

Дефиниција 11.12. Нека су (E, β) и (F, γ) системи инклузија. Нека је $C = (C_t)_{t>0}$ фамилија двостраних пресликавања $C_t : E_t \to F_t$, таква да постоји $p \in \mathbb{R}$ за које важи $\|C_t\| \leq e^{tp}$, за свако $t > 0$.

C је слаб морфизам (или само морфизам) ако

$$C_{s+t} = \gamma^*_{s,t}(C_s \otimes C_t)\beta_{s,t}, \quad s, t > 0;$$

C је јак морфизам ако

$$\gamma_{s,t} C_{s+t} = (C_s \otimes C_t)\beta_{s,t}, \quad s, t > 0.$$

Примедба 11.13. Сваки јак морфизам је уједно и слаб морфизам, док обрнуто не мора да важи. Такође, ова два појма су једнака у случају система производа јер су пресликавања $\gamma_{s,t}$ унитарна.

Дефиниција 11.14. Нека је (E, β) систем инклузија. Нека је $\xi = (\xi_t)_{t>0}$ фамилија вектора за коју важи:

1. За све $t > 0$, $\xi_t \in E_t$;
2. Постоји $p \in \mathbb{R}$ такво да је $\|\xi_t\| \leq e^{tp}$ за све $t > 0$;
3. За неко $t > 0$, $\xi_t \neq 0$.

Кажемо да је ξ слаба јединица (или само јединица) ако је

$$\xi_{s+t} = \beta^*_{s,t}(\xi_s \otimes \xi_t), \quad s, t > 0;$$

Кажемо да је ξ јака јединица ако је

$$\beta_{s,t}\xi_{s+t} = \xi_s \otimes \xi_t, \quad s, t > 0.$$

Примедба 11.15. Свака јака јединица је уједно и слаба, док обрнуто не мора да важи. У случају система производа, јаке и слабе јединице се поклапају.

11.3 Изоморфизам између јединица система инклузија и јединица генерисаног система производа

Нека је $\mathcal{B}$ матрична алгебра. Нека је $(\mathcal{E}, B)$ систем производа генерисан системом инклузија (E, β) и нека је $\xi = (\xi_t)$ јединица у (E, β) за коју постоји $p \in \mathbb{R}$ тако да је $\|\xi_t\| \leq e^{tp}$ за свако $t > 0$.

Нека је $t > 0$. Дефинишемо

$$E_{\mathfrak{s}} \ni \xi_{\mathfrak{s}} = \xi_{s_m} \otimes \xi_{s_{m-1}} \otimes \cdots \otimes \xi_{s_1}, \quad \mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \ldots, s_1) \in J_t.$$

За све $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{t}$, на основу дефиниције пресликавања $\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}$ (11.2), видимо да је

$$\xi_{\mathfrak{s}} = \beta^*_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\xi_{\mathfrak{t}}. \tag{11.5}$$

Лема 11.16. *За $b \in \mathcal{B}$, $(i_{\mathfrak{t}}\xi_{\mathfrak{t}}b)_{\mathfrak{t}\in J_t}$ је конвергентна фамилија у $\mathcal{E}_t$.*

Доказ. За $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{s} \in J_t$ важи

$$\langle \xi_{\mathfrak{t}}, \xi_{\mathfrak{t}} \rangle - \langle \xi_{\mathfrak{s}}, \xi_{\mathfrak{s}} \rangle = \langle \xi_{\mathfrak{t}}, \xi_{\mathfrak{t}} \rangle - \left\langle \beta^*_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\xi_{\mathfrak{t}}, \beta^*_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\xi_{\mathfrak{t}} \right\rangle = \langle \xi_{\mathfrak{t}}, \xi_{\mathfrak{t}} \rangle - \left\langle \xi_{\mathfrak{t}}, \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\beta^*_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\xi_{\mathfrak{t}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \xi_\mathfrak{t}, (I_{E_\mathfrak{t}} - \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\beta^*_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}})\xi_\mathfrak{t} \right\rangle \geq 0$$

јер је $\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}\beta^*_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}} : E_\mathfrak{t} \to E_\mathfrak{t}$ пројектор ([24, Дефиниција 1.5.4]).

Дакле, видимо да је $\langle \xi_\mathfrak{t}, \xi_\mathfrak{t} \rangle_{\mathfrak{t} \in J_t}$ растућа фамилија самоадјунгованих оператора у $\mathcal{B}$ која је униформно ограничена ($\| \langle \xi_\mathfrak{t}, \xi_\mathfrak{t} \rangle \| \leq e^{2tp}$) и, према томе, јако конвергира у $\mathcal{B}$, а тиме и униформно ($\mathcal{B}$ је алгебра ограничених оператора на коначно димензионом Хилбертовом простору).
За $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{s} \in J_t$, користећи (11.5) и једнакост $i_\mathfrak{s} = i_\mathfrak{t}\beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}$, добијамо

$$\|i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b - i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b\|^2 = \| \langle i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b - i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b, i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b - i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b \rangle \| =$$

$$= \| \langle i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b, i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b \rangle - \langle i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b, i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b \rangle - \langle i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b, i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b \rangle + \langle i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b, i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}b \rangle \| =$$

$$= \|b^* \langle i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}, i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t} \rangle b - b^* \langle i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}, i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s} \rangle b - b^* \langle i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}, i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t} \rangle b + b^* \langle i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s}, i_\mathfrak{s}\xi_\mathfrak{s} \rangle b\| =$$

$$= \|b^* \langle \xi_\mathfrak{t}, \xi_\mathfrak{t} \rangle b - b^* \langle \xi_\mathfrak{s}, \xi_\mathfrak{s} \rangle b - b^* \langle \xi_\mathfrak{s}, \xi_\mathfrak{s} \rangle b + b^* \langle \xi_\mathfrak{s}, \xi_\mathfrak{s} \rangle b\| =$$

$$= \|b^* \langle \xi_\mathfrak{t}, \xi_\mathfrak{t} \rangle b - b^* \langle \xi_\mathfrak{s}, \xi_\mathfrak{s} \rangle b\|.$$

Како је $b \in \mathcal{B}$ компактан оператор и фамилија $\langle \xi_\mathfrak{t}, \xi_\mathfrak{t} \rangle_{\mathfrak{t} \in J_t}$ конвергира у $\mathcal{B}$, следи да $(b^* \langle \xi_\mathfrak{t}, \xi_\mathfrak{t} \rangle b)_{\mathfrak{t} \in J_t}$ конвергира у $\mathcal{B}$. На основу тога је $(i_\mathfrak{t}\xi_\mathfrak{t}b)_{\mathfrak{t} \in J_t}$ конвергентна фамилија у $\mathcal{E}_t$. □

Теорема 11.17. *Нека је $\mathcal{B}$ матрична алгебра. Нека је (E, β) систем инклузија и $(\mathcal{E}, B)$ систем производа њиме генерисан.*

1. *Канонско преликавање $i = (i_t)$, $i_t : E_t \to \mathcal{E}_t$, је изометрички јак морфизам ових система инклузија.*

2. *Пресликавање $i^* = (i^*_t)$ је изоморфизам између јединица у $(\mathcal{E}, B)$ и јединица у (E, β).*

Доказ. 1. Нека је $s, t > 0$. Тада је $(s + t) \leq (s, t) \in J_{s+t}$ па је

$$i_{(s+t)} = i_{(s,t)}\beta_{(s,t),(s+t)},$$

на основу особине (1) конструкције индуктивног лимеса (Примедба 11.9). На основу (11.3) је

$$i_{s+t} = i_{(s,t)}\beta_{s,t}$$

па је

$$B_{s,t}i_{s+t} = B_{s,t}i_{(s,t)}\beta_{s,t} = (i_s \otimes i_t)\beta_{s,t}, \ \forall s, t > 0,$$

према (11.4). Дакле, i је јак морфизам.

2. Нека је $\eta = (\eta_t)$ јединица у $(\mathcal{E}, B)$. Према томе, постоји $a \in \mathbb{R}$ такво да $\|\eta_t\| \leq e^{ta}$ за све $t > 0$. Такође, $\|i_t^*\eta_t\| \leq e^{ta}$. Сада важи

$$i_{s+t}^*\eta_{s+t} = i_{s+t}^* B_{s,t}^*(\eta_s \otimes \eta_t) = [B_{s,t} i_{s+t}]^*(\eta_s \otimes \eta_t) = [(i_s \otimes i_t)\beta_{s,t}]^*(\eta_s \otimes \eta_t) =$$

$$= (\beta_{s,t}^*(i_s^* \otimes i_t^*))(\eta_s \otimes \eta_t) = \beta_{s,t}^*(i_s^*\eta_s \otimes i_t^*\eta_t)$$

па је $i^*\eta = (i_t^*\eta_t)$ (слаба) јединица у (E, β).
Како је i јак морфизам, одмах следи да је i^* (слаб) морфизам.

За $\mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \ldots, s_1) \in J_t$,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{s}} = \mathcal{E}_{s_m} \otimes \mathcal{E}_{s_{m-1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_{s_1}.$$

Нека је $i_{\mathfrak{s}} : E_{\mathfrak{s}} \to \mathcal{E}_t$ канонска изометрија. Слично као у (11.3) дефинишу се пресликавања $B_{\mathfrak{s},t} : \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}_{\mathfrak{s}}$ и, ако искористимо (11.4), добијамо

$$B_{\mathfrak{s},t} i_{\mathfrak{s}} = i_{s_m} \otimes i_{s_{m-1}} \otimes \cdots \otimes i_{s_1}. \tag{11.6}$$

За сваку јединицу $\eta = (\eta_t)$ у $(\mathcal{E}, B)$, дефинишемо

$$\eta_{\mathfrak{s}} = \eta_{s_m} \otimes \cdots \otimes \eta_{s_1} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{s}}.$$

Тада је

$$B_{\mathfrak{s},t}^* \eta_{\mathfrak{s}} = \eta_t. \tag{11.7}$$

Инјективност пресликавања i^*:
Нека су η, ζ јединице у $(\mathcal{E}, B)$ такве да важи $i_t^*\eta_t = i_t^*\zeta_t$, за све $t > 0$.

Нека је $t > 0$. За свако $\mathfrak{s} = (s_m, s_{m-1}, \ldots, s_1) \in J_t$, према (11.7) и (11.6) важи

$$i_{\mathfrak{s}}^*\eta_t = i_{\mathfrak{s}}^* B_{\mathfrak{s},t}^* \eta_{\mathfrak{s}} = (B_{\mathfrak{s},t} i_{\mathfrak{s}})^* \eta_{\mathfrak{s}} = (i_{s_m}^* \otimes i_{s_{m-1}}^* \otimes \cdots \otimes i_{s_1}^*)(\eta_{s_m} \otimes \eta_{s_{m-1}} \otimes \cdots \otimes \eta_1) =$$

$$= i_{s_m}^*\eta_{s_m} \otimes \cdots \otimes i_{s_1}^*\eta_{s_1} = i_{s_m}^*\zeta_{s_m} \otimes \cdots \otimes i_{s_1}^*\zeta_{s_1} =$$

$$= (i_{s_m}^* \otimes i_{s_{m-1}}^* \otimes \cdots \otimes i_{s_1}^*)(\zeta_{s_m} \otimes \zeta_{s_{m-1}} \otimes \cdots \otimes \zeta_1) =$$

$$= (B_{\mathfrak{s},t} i_{\mathfrak{s}})^* \zeta_{\mathfrak{s}} = i_{\mathfrak{s}}^* B_{\mathfrak{s},t}^* \zeta_{\mathfrak{s}} = i_{\mathfrak{s}}^* \zeta_t,$$

одакле следи $i_{\mathfrak{s}} i_{\mathfrak{s}}^* \eta_t = i_{\mathfrak{s}} i_{\mathfrak{s}}^* \zeta_t \in \mathcal{E}_t$.

За $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{t} \in J_t$, на основу идентитета $i_{\mathfrak{t}} \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}} = i_{\mathfrak{s}}$ важи

$$i_{\mathfrak{s}} i_{\mathfrak{s}}^* i_{\mathfrak{t}} i_{\mathfrak{t}}^* = i_{\mathfrak{s}} i_{\mathfrak{s}}^*.$$

Како је $\mathcal{B}$ матрична алгебра, важи $\mathcal{B} = \mathcal{C}_2$. Примена Става 11.4 и Примедбе 11.5, у овом случају, обезбеђује да је $\mathcal{E}_t = (\mathcal{E}_t)_{\mathcal{C}_2}$ уједно и Хилбертов простор са скаларним производом $(\cdot,\cdot) = tr(\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Према томе, како је $\mathcal{E}_t = \overline{\text{span}}\{i_{\mathfrak{s}}(a) : a \in E_{\mathfrak{s}},\ \mathfrak{s} \in J_t\}$ на основу особине (2) конструкције индуктивног лимеса (Примедба 11.9), растућа фамилија пројектора $(i_{\mathfrak{s}} i_{\mathfrak{s}}^*)$ јако конвергира идентичком оператору на $\mathcal{E}_t$ па добијамо $\eta_t = \zeta_t$.

Сурјективност пресликавања i^*:
Нека је $\xi = (\xi_t)$ (слаба) јединица у (E, β) за коју је $\|\xi_t\| \leq e^{ta}$ за неко $a \in \mathbb{R}$.

Нека је $t > 0$. За свако $\mathfrak{s} = (s_n, \ldots, s_1) \in J_t$, дефинишимо

$$\xi_{\mathfrak{s}} = \xi_{s_n} \otimes \cdots \otimes \xi_{s_1}.$$

За $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{t} \in J_t$ важи

$$\xi_{\mathfrak{s}} = \beta_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}^* \xi_{\mathfrak{t}}. \tag{11.8}$$

На основу Леме 11.16, узимајући $\mathcal{B} \ni b = I$ (идентички оператор), закључујемо да фамилија $(i_{\mathfrak{t}} \xi_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t} \in J_t}$ конвергира у Хилбертовом $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ модулу $\mathcal{E}_t$. Означимо њену граничну вредност

$$\lim_{\mathfrak{t} \in J_t} i_{\mathfrak{t}} \xi_{\mathfrak{t}} = \eta_t \in \mathcal{E}_t. \tag{11.9}$$

Покажимо да је $\eta = (\eta_t)$ јединица у $(\mathcal{E}, B)$.
За $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_s$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k \in \mathcal{E}_t,\ k \geq 1$,

$$\left\langle B_{s,t} \eta_{s+t}, \sum_l x_l \otimes y_l \right\rangle = \sum_l \left\langle \eta_{s+t}, B_{s,t}^* (x_l \otimes y_l) \right\rangle =$$

$$= \sum_l \lim_{\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t} \in J_s \smile J_t} \left\langle i_{\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t}} \xi_{\mathfrak{s} \smile \mathfrak{t}}, B_{s,t}^* (x_l \otimes y_l) \right\rangle =$$

$$= \sum_l \lim_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}\in J_s\smile J_t} \langle (i_{\mathfrak{s}}\otimes i_{\mathfrak{t}})(\xi_{\mathfrak{s}}\otimes\xi_{\mathfrak{t}}), x_l\otimes y_l\rangle =$$

$$= \sum_l \lim_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}\in J_s\smile J_t} \langle i_{\mathfrak{s}}\xi_{\mathfrak{s}}\otimes i_{\mathfrak{t}}\xi_{\mathfrak{t}}, x_l\otimes y_l\rangle = \sum_l \lim_{\mathfrak{s}\smile\mathfrak{t}\in J_s\smile J_t} \langle i_{\mathfrak{t}}\xi_{\mathfrak{t}}, \langle i_{\mathfrak{s}}\xi_{\mathfrak{s}}, x_l\rangle y_l\rangle =$$

$$= \sum_l \langle \eta_t, \langle \eta_s, x_l\rangle y_l\rangle = \sum_l \langle \eta_s\otimes\eta_t, x_l\otimes y_l\rangle = \left\langle \eta_s\otimes\eta_t, \sum_l x_l\otimes y_l\right\rangle.$$

Одавде закључујемо да је η јединица у $(\mathcal{E}, B)$.

Нека је $x\in E_t$. Користећи (11.9), особину (1) конструкције индуктивног лимеса (Примедба 11.9), као и (11.8), видимо да важи

$$\langle i_t^*\eta_t, x\rangle = \langle \eta_t, i_t x\rangle = \lim_{\mathfrak{r}\in J_t} \langle i_{\mathfrak{r}}\xi_{\mathfrak{r}}, i_t x\rangle = \lim_{\mathfrak{r}\in J_t} \langle i_t^* i_{\mathfrak{r}}\xi_{\mathfrak{r}}, x\rangle =$$

$$= \lim_{\mathfrak{r}\in J_t} \left\langle \beta_{\mathfrak{r},t}^* i_{\mathfrak{r}}^* i_{\mathfrak{r}}\xi_{\mathfrak{r}}, x\right\rangle = \lim_{\mathfrak{r}\in J_t} \left\langle \beta_{\mathfrak{r},t}^* \xi_{\mathfrak{r}}, x\right\rangle = \lim_{\mathfrak{r}\in J_t} \langle \xi_t, x\rangle = \langle \xi_t, x\rangle$$

па добијамо $i_t^*\eta_t = \xi_t$. □

Примедба 11.18. Добијени резултат је далеко од општег јер се посматрају само алгебре ограничених линеарних оператора на коначно димензионим Хилбертовим просторима, тј. матричне алгебре.

Примедба 11.19. Један од проблема који настаје уколико се посматрају Хилбертови модули над $B(H)$, где је H бесконачно димензиони Хилбертов простор, јесте у томе што, у општем случају, затворени подмодули у Хилбертовом модулу нису ортогонално допуњиви.

Литература

[1] W. Arveson, Continous analogues of Fock space, *Mem. Amer. Math. Soc.* **80** (1989) no. 409, iv+66 pp.

[2] W. Arveson, *Noncommutative Dynamics and E-Semigroups*, (Springer, 2003)

[3] A. Alevras, One Parameter Semigroups Of Endomorphisms Of Factors Of Type II_1, *J. Oper. Theory* **51** (2004) 161-179

[4] D. Bakić, B. Guljaš. Operators on Hilbert H*-modules. *J. Operator Theory* **46** (2001) 123-137

[5] D. Bakić, B. Guljaš. Hilbert C^*-modules over C^*-algebras of compact operators, *to appear in Acta Sci. Math. (Szeged)* **68** (1-2) (2002) 249-269

[6] S. D. Barreto, B. V. R. Bhat, V. Liebscher, M. Skeide, Type I product systems of Hilbert modules, *J. Funct. Anal.* **212** (2004) 121-181

[7] B. V. R. Bhat, V. Liebscher, M. Skeide, Subsystems of Fock need not be Fock: Spatial CP-semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010) 2443–2456

[8] B. V. R. Bhat, M. Mukherjee, Inclusion systems and amalgamated products of product system, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* ***13** (2010), no. 1, 1-26.*

[9] B. V. R. Bhat, M. Skeide, Tensor product systems of Hilbert modules and dilations of completely positive semigroups, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **3** (2000) 519–575

[10] Ola Bratelli, Derek W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical mechanics 1, second ed. Springer 1987

[11] M. Frank, V. I. Paulsen, Injective and projective Hilbert C^*-modules and C^*-algebras of compact operators. *arXiv:math/0611349v2 [math.OA] 18 Feb 2008*

[12] D. J. Kečkić, B. Vujošević, On the index of product systems of Hilbert modules, *Filomat* 29:5 (2015), 1093–1111

[13] E. C. Lance, *Hilbert C^*-Modules: A toolkit for operator algebraists,* (Cambridge University Press, 1995)

[14] V. Liebscher, Random sets and invariants for (type II) continuous tensor product systems of Hilbert spaces, *Preprint 2001.*

[15] V. Liebscher, M. Skeide, Units for the time oredered Fock module, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **4** (2001) 545–551

[16] V. Liebscher, M. Skeide, Constructing units in product systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008) 989–997

[17] B. Magajna. Hilbert C^*-modules in which all closed submodules are complemented. *Proceedings of the American Mathematical Society.* Volume 125, Number 3, March 1997, 849-852

[18] V. M. Manuilov, E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-Modules*, (American Mathematical Society, 2005)

[19] M. Mukherjee, Index computation for amalgamated products of product systems, *Banach J Math. Anal.* **5-1** (2011) 148–166

[20] O. Shalit, B. Solel, Subproduct systems, *Documenta Mathematica* **14** (2009) 801-869

[21] M. Skeide, Dilations, product systems and weak dilations, *Math. Notes* **71** (2002), 914-923

[22] M. Skeide, Dilation theory and continuous tensor product systems of Hilbert modules, *PQQP: Quantum Probability and White Noise Analysis XV.* 2003, World Scientific

[23] M. Skeide, Classification of E_0-semigroups by product systems, *Preprint, ArXiv*: 0901.1798v3 (2009)

[24] M. Skeide, Hilbert modules and application in quantum probability, *Habilitationsschrift*, Cottbus (2001)

[25] M. Skeide, The index of (white) noises and their product systems, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9** (2006) 617–655

[26] Serban Stratila, Laszlo Zsido, Lectures on von Neumann Algebras, Abacus Press, 1979

[27] Masamichi Takesaki, Theory of Operator Algebras I, (1979) reprint, Springer 2002

[28] B. Tsirelson, From slightly coloured noises to unitless product systems, *ArXiv:math.FA/0006165, 2000*

[29] B. Tsirelson, From random sets to continuous tensor products: answers to three questions of W. Arveson. *Preprint, ArXiv:math.FA/0001070, 2000.*

[30] B. Tsirelson, Non-isomorphic product systems, *Advances in Quantum Dynamics (eds. G. Price et al), Contemporary Mathematics 335, AMS,* 273-328, *arXiv:math/0210457*

[31] B. Vujošević, Sistemi inkluzija Hilbertovih modula, FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA, Trebinje (2014)

[32] B. Vujošević, The index of product systems of Hilbert modules: Two equivalent definitions, *Publications de l Institut Mathematique* 01/2015; 97(111):49-56

БИОГРАФИЈА

Биљана Вујошевић је рођена 19. новембра 1984. у Београду. Дипломирала је 2007. године на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене. Докторске студије на истом факултету, смер Анализа, уписала је 2007. године. Од 2007. године ради на Математичком факултету у Београду у звању сарадника у настави, а од 2009. године у звању асистента.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Биљана Вујошевић

број индекса 2011/2007

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Индекс система производа Хилбертових модула

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 12. 6. 2015.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Биљана Вујошевић

Број индекса 2011/2007

Студијски програм Математика

Наслов рада Индекс система производа Хилбертових модула

Ментор др Драгољуб Кечкић

Потписани/а

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 12. 6. 2015.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ИНДЕКС СИСТЕМА ПРОИЗВОДА ХИЛБЕРТОВИХ МОДУЛА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 12. 6. 2015.

Биљан Вјовић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно

аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.